- Sean H y F subespacios de $\mathbb{R}^n$, se define intersección de H y F así :
  $H \bigcap F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \;/\; \vec{v} \in H \;\; \text{y} \;\; \vec{v} \in F\}$
  Obviamente, $H \bigcap F \subseteq H \;\; , \;\; H \bigcap F \subseteq F \;\; , \;\; H \bigcap F = H \Leftrightarrow H \subseteq F$.

- $H \bigcap F$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$. $\dim(H \bigcap F) \leq \dim H$ y $\dim(H \bigcap F) \leq \dim F$

- Los vectores de $H \bigcap F$ son los que cumplen a la vez las ecuaciones implícitas de H y las ecuaciones implícitas de F, por tanto las ecuaciones implícitas de $H \bigcap F$ se obtienen uniendo las ecuaciones de H y de F, y eliminando en el sistema lineal homogéneo resultante las ecuaciones que sean combinación lineal de otras.
  Las ecuaciones redundantes se convierten en filas de ceros en la eliminación gaussiana.
  Resolviendo las ecuaciones de $H \bigcap F$ se obtiene la base de $H \bigcap F$.

- **Ejemplos sencillos**

  - $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \;/\; z = 0\}$ Plano XY
    $F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \;/\; y = 0\}$ Plano XZ
    $H \bigcap F = \{(x, y, z) \;/\; y = 0 \;,\; z = 0\}$ Eje X
    Base de $H \bigcap F = \{(1, 0, 0)\}$

  - $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \;/\; y = 0 \;,\; z = 0\}$ Eje X
    $T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \;/\; x = 0 \;,\; z = 0\}$ Eje Y
    $G \bigcap T = \{(x, y, z) \;/\; x = 0 \;,\; y = 0 \;,\; z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$

  - $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \;/\; z = 0\}$ Plano XY
    $F \subset \mathbb{R}^3 = < (1, 1, 1) >$ Recta no incluida en el Plano XY
    Las ecs. implícitas de F son $x = y$, $x = z$
    $H \bigcap F = \{(0, 0, 0)\}$; $x = y = z = 0$

- Sean H y F subespacios de $\mathbb{R}^n$, se define suma de H y F así :

  $H + F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \ \text{con} \ \vec{v}_1 \in H \ \text{y} \ \vec{v}_2 \in F\}$

  $H + F \neq H \bigcup F$

  (se puede analizar por ejemplo tomando H: eje X y F: eje Y en $\mathbb{R}^3$. La suma es el plano XY y es subespacio, pero la unión de los dos ejes no es subespacio.)

  $H \subseteq H + F \ , \ F \subseteq H + F \ , \ H + F = H \Leftrightarrow F \subseteq H.$

- $H + F$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

  $\dim(H + F) \geq \dim H$ y $\dim(H + F) \geq \dim F$.

- La unión de una base de H y una base de F es conjunto generador de $H + F$.

  Podemos escribir la afirmación anterior así: Dadas B_H base de H y B_F base de F, entonces $H + F = < B_H \bigcup B_F >$

  $B_H \bigcup B_F$ es conjunto generador de $H + F$. Para convertir el conjunto generador en base tenemos que eliminar los vectores dependientes, es decir, que sean combinación lineal del resto.

  $\dim\,(H + F) \leq \dim H + \dim F$, con la igualdad en el caso de que la unión de las bases de H y F sea conjunto l.i. y por tanto directamente base.

- Se dice que $H + F$ es suma directa si $\dim\,(H + F) = \dim H + \dim F$. Se denota $H \bigoplus F$.
- Sea H subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se dice que G es subespacio complementario de H respecto de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n = H \bigoplus G$.
- Todo subespacio H de $\mathbb{R}^n$ tiene subespacio complementario.

Consideramos la matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Col}A$ denota el <u>subespacio generado por las columnas de A</u>, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

$A = [\ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \dots\ \ \vec{a}_n\ ]\qquad \mathrm{Col}A\ =\ <\vec{a}_1\ ,\ \vec{a}_2\ ,\ \dots\ ,\ \vec{a}_n>$

Nótese que Col$A$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$, pues las columnas de A son vectores de m entradas (m filas).

Obviamente $\dim(\mathrm{Col}A) = \mathrm{rg}(A)$, pues las columnas de A que sean c.l. de otras hay que quitarlas para obtener la base.

Recordemos que el <u>subespacio nulo de A</u>, denotado $\mathrm{Nul}A$, es el conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\vec{x} = \vec{0}\}$.

Nul$A$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$, y obviamente $\dim(\mathrm{Nul}A) = n - \mathrm{rg}(A)$.

La dimensión del subespacio nulo de A o núcleo de A es el número de soluciones independientes en el SLH o, lo que es lo mismo, el grado de indeterminación del SLH.

Se obtiene entonces: $\boxed{\dim(\mathrm{Nul}A) + \dim(\mathrm{Col}A) = n}$

Ejerc. 3.21 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determina

a) Una base y la dimensión de Col$A$.
b) Una base y la dimensión de Nul$A$.

Ejerc. 3.22 Escribe el vector $\vec{v} = (5, 6)$ como suma de dos vectores, uno sobre la recta $\{(x, y) \ / \ y = 2x\}$ y otro sobre la recta $\{(x, y) \ / \ y = x/2\}$ (*Tomado de Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications". Quinta edición. 2016. Pearson pg. 90*).

Ejerc. 3.23 Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
* el plano Π: $3x + 6y - z = 0$
* la recta r : $\{(1, 2, 3)\lambda \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Obtén una base de Π.

b) Justifica si la suma de Π y r es o no suma directa.

c) Justifica si Π y r son o no complementarios.

d) Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (4, -1, 42)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ del plano Π y un vector $\vec{v}_2$ de la recta r. En caso de que sea posible:

Calcula $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_1$ obtenido se encuentra en el plano Π.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_2$ obtenido se encuentra en la recta r.

Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

Ejerc. 3.24 Considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + 2z + t = 0\}$.

a) Halla una base y la dimensión de F

b) Halla la dimensión y una base de un subespacio complementario de F, denotándolo F'

c) Descompón $\vec{v} = (2, 1, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ de F y un vector $\vec{v}_2$ de F'

Ejerc. 3.25 Obtén una base de un subespacio G complementario de $F =< (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4) >$.

Ejerc. 3.26 Dado el subespacio F de $\mathbb{R}^4$ dado por: $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 - x_4 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$

a) Obtén una base de F

b) Obtén una base de un subespacio G complementario de F.

(*Basado en HVZ12 ejercicio 4.5.5 pg 175. En el libro solo apartado b)).*