Definición

Un conjunto V de elementos se dice que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, si en el se han definido dos operaciones:
la suma, $+$, de manera que a cada par de elementos u y v de V se le haga corresponder el elemento $\underline{u+v \text{ de } V}$,
y la multiplicación por un número real, de tal manera que a cada par de elementos u de V y α de $\mathbb{R}$ se le haga corresponder el elemento $\underline{\alpha u \text{ de } V}$, cumpliéndose además los siguientes axiomas:

Para la suma

A1 Conmutativa: $\forall\ u, v \in V,\ u+v = v+u$

A2 Asociativa: $\forall\ u, v, w \in V,\ u+(v+w) = (u+v)+w$

A3 Existencia de elemento neutro: $\exists\ 0_V \in V \ / \ u + 0_V = u \quad \forall\ u \in V$

A4 Existencia de elemento opuesto: $\forall u \in V \quad \exists\ -u \in V \ / \ u + (-u) = 0_V$

Para la multiplicación por un escalar

A5 $1u = u$ 1 es el elemento neutro del producto en $\mathbb{R}$. Se le denomina elemento unidad de V.

A6 Pseudoasociativa respecto de la multiplicación por escalares: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall u \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Distributivas

A7 De la multiplic. por escalar respecto de la suma de vectores[6]: $\alpha(u+v) = \alpha v + \alpha v \quad \forall u, v \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

A8 De la multiplic. por escalar respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Es importante volver a señalar explícitamente la condición dada en la definición de que las dos operaciones sean cerradas, o axiomas de cierre:

C1 $\forall\ u, v \in V,\ u+v \in V$ C2 $\forall u \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u \in V$

Debido a que la multiplicación es "por un número real", se dice que el conjunto V es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o que es un espacio vectorial real.

[6] A los elementos de un espacio vectorial se les designa con frecuencia con el nombre genérico de vectores, heredando la nomenclatura de los elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Propiedades

De la definición de Espacio Vectorial se infieren las siguientes propiedades:

- Por la propiedad conmutativa:
  $0_V + u = u$ $\qquad\qquad$ $-u + u = 0_V$
- El elemento neutro de un espacio vectorial es único.
- El elemento opuesto de cada elemento de un espacio vectorial es único.
- $\forall u \in V \quad 0\ u = 0_V$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha\ 0_V = 0_V$
- $\alpha u = 0_V \quad \Rightarrow \alpha = 0 \ \ o \ \ u = 0_V$
- $(-1)\ \ u = -u$
- La combinación de las operaciones de multiplicación por un escalar y suma es la operación conocida como combinación lineal. La combinación lineal de los elementos u y v (o vectores u y v de V) con escalares α y β de $\mathbb{R}$ es $\alpha\ u + \beta\ v$, y pertenece a V.

Ejemplos (ver HVZ12, pgs. 145-146)

- El conjunto $\mathbb{R}^2$ de los vectores en el plano.
- El conjunto $\mathbb{R}^3$ de los vectores en el espacio.
- El conjunto $\mathbb{R}^n$ de los vectores en el espacio de dimensión n.
- El conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de todas las matrices reales de m filas y n columnas.
- El conjunto de las funciones reales de variable real continuas y definidas en el intervalo $[a, b]$ es espacio vectorial.

  Def. de la suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\qquad$ Def. de la multiplicación por un real: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

- El conjunto P_n de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n.

  Los elementos de P_n se definen por la expresión: $p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$

  Un polinomio tiene grado k si $a_k \neq 0$ y $a_i = 0$ para todo $i > k$.

  Definición de la suma:

  Sean $p_1(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ y $p_2(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$, entonces

  $p(x) = p_1(x) + p_2(x) = (a_o + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$

  Definición de la multiplicación por un real:

  Sean $p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces
  $\alpha p(x) = \alpha a_o + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots + \alpha a_n x^n$

Ejemplos de conjuntos que no son espacios vectoriales

Para justificar que no lo son basta con demostrar que no cumplen uno de los 10 axiomas.

Ejerc. 3.1 Demuestra que los siguientes conjuntos no son espacios vectoriales.

- Conjunto de las matrices de orden n de determinante nulo, con las operaciones de suma y producto por escalar estudiadas. Es subconjunto del espacio vectorial formado por las matrices cuadradas.
- El conjunto de los polinomios de grado exactamente n. Es subconjunto del espacio vectorial formado por los polinomios de grado $\leq n$.
- El subconjunto W del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, definido como $W = \{(a, 1) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$
  (Observa que W es la recta de $\mathbb{R}^2$ de ecuación $y = 1$).

Sea V espacio vectorial real y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$.

- Se dice que $v \in V$ es combinación lineal de los elementos de S si $\exists\ c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R} \ / \ v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p$.

  A los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ se les llama pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden tomar cualquier valor real incluido el 0.

- El conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los elementos de S se denomina conjunto generado por S y se denota $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$ o $< S >$.

- Se dice que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ es linealmente dependiente si existen p reales $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$[7], no todos cero, tales que

  $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p = 0_V$ **[1]**

  Una ecuación como **[1]**, en la que no todos los coeficientes son cero, se denomina relación de dependencia lineal del conjunto.

- Se dice que S es linealmente independiente si y sólo si no es linealmente dependiente.

  Es decir, si $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p = 0_V \quad \Rightarrow \quad c_i = 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, p$

Propiedades en relación con la dependencia e independencia lineal

- $\{0_V\}$ es conjunto linealmente dependiente.
- S formado por dos elementos es linealmente dependiente si y sólo si un elemento es múltiplo del otro.
- S es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si al menos un elemento de S puede expresarse como combinación lineal del resto.

En la Sección 1.2 se adelantaron algunas de estas definiciones y propiedades para los vectores de $\mathbb{R}^n$.

[7] Se ha incluido el paréntesis para recalcar que los coeficientes actúan de forma agrupada

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se cumplen estos resultados:
  - No puede haber conjuntos linealmente independientes formados por más de n vectores. Justificación: La matriz cuyas columnas son los vectores tendrá n filas, y por tanto no puede tener más de n columnas pivotales, tendrá como máximo n.
  - n vectores que formen las n columnas de una matriz A_n son l.i. si y solo si la matriz A es invertible.

- **Ejerc. 3.2** En el espacio vectorial de las matrices cuadradas 2 por 2, obtén la combinación lineal de las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, tomando como coeficientes 2 y -2, respectivamente.

- **Ejerc. 3.3** Justifica que en el espacio vectorial de las funciones reales de variable real, continuas, y definidas en el intervalo $[\ a\ ,\ \ b\ ]$, las funciones $f(x) = \cos^2(x)$, $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ y $h(x) = 1$ forman un conjunto linealmente dependiente. (HVZ12 pg. 151).

- **Ejerc. 3.4** Considera el espacio vectorial $P_3(x)$ y determina si los siguientes conjuntos de polinomios son linealmente dependientes o linealmente independientes.

  a) $A = \{p(x), q(x)\}$, con $p(x) = 1 + x$, $\;q(x) = 1 + 3x$.

  b) $B = \{p(x), q(x), r(x)\}$, con $p(x) = 1 + x + x^2$, $\;q(x) = 1 - x + 3x^2$, $\;r(x) = 2 + 5x^2$.

  c) $C = \{p(x), q(x), r(x)\}$, con $p(x) = 1 + x + x^2$, $\;q(x) = 1 - x + 3x^2$, $\;r(x) = 2 + 4x^2$.

Definición

Sea V espacio vectorial y H un subconjunto no vacío de V. Se dice que H es subespacio vectorial de V, si H es, en sí mismo, espacio vectorial con las mismas operaciones.

- $H \subseteq V$, no vacío, es subespacio de V si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

  C1 $\forall\ u, v \in H,\ u + v \in H$ C2 $\forall u \in H$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u \in H$

  Basta por tanto con que se cumplan los axiomas de cierre.

$\{0_V\}$ es subespacio vectorial de V. Se denomina subespacio cero de V.

El espacio vectorial completo V puede considerarse subespacio vectorial de sí mismo. A los subespacios de V que no son el propio V los denominamos subespacios estrictos.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^3$ todas las rectas que pasan por el origen y todos los planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales. Puedes fijarte, gráficamente, en que la suma y el producto por un real son cerrados tanto en las rectas que pasan por el origen como en los planos que pasan por el origen.

- Los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales, $P_n(x)$, son subespacio de las funciones continuas reales de variable real.

- El conjunto formado por la unión de los polinomios de grado igual a *n con todos los coeficientes iguales* junto con *el polinomio cero*, es subespacio del espacio vectorial $P_n(x)$, formado por los polinomios con coeficientes reales de grado igual o inferior a n.

- Las matrices cuadradas de orden *n diagonales* son subespacio del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n.

- Dado $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$, <u>$< v_1, v_2, \ldots, v_p >$ es subespacio vectorial de V</u>. Se le denomina <u>subespacio generado</u> por $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Lo habíamos llamado en la sección anterior subconjunto generado. Precisamos ahora que es subespacio. En efecto lo es porque se cumplen los axiomas de cierre: la suma de combinaciones lineales es una c.l. de los mismos vectores, y la multiplicación de una c.l. por un real es también c.l. de los mismos vectores.
  Decimos del conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ que es <u>conjunto generador</u> o <u>sistema generador</u> del subespacio vectorial $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$.

  Por ejemplo $\{1, x, x^2\}$ es sistema generador del espacio vectorial formado por todos los polinomios de grado menor o igual que 2. Ese espacio vectorial se puede escribir como $< 1, x, x^2 >$.

- <u>El conjunto de las soluciones de un</u> <u>sistema lineal homogéneo</u> con n incógnitas es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. (En la Secc. 1.2 vimos que la suma soluciones de un SLH es también solución y que el producto de una solución por un real es también solución. Se cumplen los dos "axiomas de cierre", por tanto es subespacio).

  Tomando $A \in M_{m\times n}$ como matriz de coeficientes, $A\vec{x} = \vec{0}$ es el SLH.
  Si $A\vec{x}_1 = \vec{0}$, $A\vec{x}_2 = \vec{0}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{0}$ y $A\alpha\vec{x}_1 = \vec{0}$.

  El conjunto de soluciones se conoce como <u>subespacio nulo de A</u>, y se denota Nul(A) o $\mathrm{N}(A)$.

  $\mathrm{Nul}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\vec{x} = \vec{0}\}$

  Nul(A) es subconjunto de $\mathbb{R}^n$, al estar formado por vectores de $\mathbb{R}^n$.

  También se designa a este subespacio como <u>núcleo de A</u>.

Hay espacios vectoriales que sólo tienen un elemento: los que están formados exclusivamente por el elemento neutro O_V. Para el resto de espacios vectoriales V, siempre existe un conjunto generador de la forma $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ tal que $V =< v_1, v_2 \ldots, v_p >$. Dicho de otra forma, todo espacio vectorial es un subespacio generado.

Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$:

- El espacio vectorial $< (1, 1, 1) >$ es la recta que pasa por el origen, con vector generador (1,1,1).
- El espacio vectorial $< (1, 1, 1), (2, 2, 1) >$ es un plano que pasa por el origen, con vectores generadores (1,1,1) y (2,2,1). Es así no porque sean dos vectores, sino porque son dos y l.i.
  Por ejemplo $< (1, 1, 1), (2, 2, 2) >=< (1, 1, 1) >$
- El espacio vectorial $< (1, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1) >$ es $\mathbb{R}^3$, ya que tenemos tres vectores l.i. Todo vector $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ se puede escribir como comb. lineal de los vectores anteriores.

Un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ se dice que es base de V si es conjunto generador de V y linealmente independiente.

Se verifican los siguientes resultados:

- Dado $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ conjunto generador de V, si se elimina uno a uno cada vector del conjunto que sea c.l. del resto, los vectores que quedan siguen siendo conjunto generador de V y además son conjunto l.i..
- $v \in V$ se escribirá de forma única como c.l. de los vectores del conjunto generador $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ si y solo si ese conjunto es linealmente independiente.
- Si un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ genera V, entonces V no tiene conjuntos l.i. con más de p vectores.
- Todas las bases de V tienen el mismo número de vectores. A ese número se le denomina dimensión de V, denotado $\dim V$.

  El espacio vectorial cero no tiene base, por ser $\{O_V\}$ un conjunto l.d. Se le asigna, por definición, dimensión cero.

$$\dim \mathbb{R}^n = n \qquad \dim P_n = n + 1 \qquad \dim M_{m\times n} = m \times n$$

La dimensión de un espacio vectorial marca el mínimo número de vectores necesarios para ser conjunto generador, y el máximo número posible para ser conjunto l.i.

Sea V de dimensión $n > 0$:

- Todo subconjunto de V formado por n vectores linealmente independientes es base de V.
- Todo subconjunto de V formado por n vectores y que genere V es base.
- Todo subconjunto que genere V tendrá al menos n vectores. Si tiene n serán l.i.. Si tiene más de n será conjunto l.d., y se puede reducir hasta obtener una base.
- Todo subconjunto de V con $k < n$ vectores linealmente independientes puede ampliarse con $n - k$ vectores (que formen con el anterior un conjunto total l.i.) para formar una base de V.

Ejerc. 3.5 Encuentra una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $\{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$. (HVZ12, ejerc. 6, pg. 160).

Ejerc. 3.6 Determina para qué valores de a los vectores $\vec{u}_1 = (a, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ y $\vec{u}_3 = (2, -1, a)$ forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. (HVZ12, ej. 15, pg. 162).

Ejerc. 3.7 En $\mathbb{R}^3$, obtén una base del subespacio generado por el conjunto $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 2)\}$. (HVZ12, pg. 163).

Base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Los vectores dados por las columnas de la matriz real I_n son elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y se denotan como $\vec{e}_i$, con i desde 1 hasta n.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al conjunto $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ se le denomina **base canónica o estándar de $\mathbb{R}^n$**.

- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es sistema generador de $\mathbb{R}^n$, ya que el sistema lineal de matriz ampliada $[\,\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n \mid \vec{v}\,]$ es compatible para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, pues $\mathrm{rg} A = n = \mathrm{rg} A^*$, y por tanto todo $\vec{v}$ puede escribirse como c.l. del conjunto B.

- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, puesto que esos vectores, dispuestos como columnas en la matriz I_n corresponden todos a columnas pivotales (en este caso la matriz coincide con su forma escalonada reducida).

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$
$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$

3.5 Coordenadas

La razón principal de elegir una base de un espacio vectorial en vez de un conjunto generador es que cada vector v de ese espacio puede escribirse de una sola manera como combinación lineal de los vectores de la base.

Sea $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ una base del espacio vectorial V, entonces $\forall v \in V$, v se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de la base. A los coeficientes o pesos $c_1, c_2, \ldots, c_d$, tales que $v = c_1 b_1 + \ldots + c_d b_d$ se les denomina coordenadas de v relativas a la base B.

Las coordenadas, que son d reales, se pueden almacenar como un vector, denominado vector de coordenadas de v respecto a B.

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$$

Notación en el espacio $\mathbb{R}^n$

- El vector de coordenadas de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto de una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ se expresa de acuerdo con la notación indicada cómo:

  $$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad \text{partiendo de } \vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \ldots + c_n \vec{b}_n$$

- Cuando las coordenadas están referidas a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, utilizamos la notación:

  $\vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, prescindiendo de los corchetes y de la referencia a la base.

  $\vec{x} = c_1 \vec{e}_1 + \ldots + c_n \vec{e}_n$,

  Más usual es expresar $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, denotando las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base canónica como x_i. A estas coordenadas las denominamos coordenadas canónicas o coordenadas estándar de $\vec{x}$ $\quad \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \ldots + x_n \vec{e}_n$,.

Ejerc. 3.8 a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ significa que $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ tiene coordenadas $(2, 3, 4, 5)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, o lo que es lo mismo, que $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 5\vec{e}_4$

Respecto de la base $B = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ las coordenadas de $\vec{x}$ son: $[\vec{x}]_B = (2, 1, 1, 1)$. Compruébalo.

b) Considerado el subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^3$, con base $B = \{(1, 1, 1), (2, 2, 1)\}$, determina si el vector $\vec{x} = (5, 5, 6)$ pertenece o no a H, y en caso afirmativo obtén sus coordenadas relativas a la la base B.

Ejerc. 3.9 a) Considerando en $\mathbb{R}^2$ la base $B = \{(5, 1), (2, 3)\}$ y el vector $\vec{v}$ de coordenadas (4,3) respecto de la base B, determina las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

El vector $\vec{v}$ se obtiene así: $\quad 4 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}$

o, escribiendo la combinación lineal como producto matriz-vector: $\quad \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}$

$P_B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ ] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$[8] $\qquad \boxed{P_B \quad [\vec{v}]_B = \vec{v}}$ **[2]**

b) Considerando en $\mathbb{R}^2$ la base $B = \{(5, 1), (2, 3)\}$ y $\vec{v} = (26, 13)$, determina las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B.

Hay que obtener (c_1, c_2) tales que $c_1(5, 1) + c_2(2, 3) = (26, 13)$. O lo que es lo mismo, hay que resolver el SL de matriz ampliada $[\ P_B \mid \vec{v}\ ]$ **[3]**.

Resolviendo $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 26 \\ 1 & 3 & 13 \end{array}\right]$ obtendremos como solución, obviamente, $[\vec{v}]_B = (4, 3)$

Teniendo en cuenta que P_B es invertible, la solución del sistema también se puede obtener así:

$\boxed{[\vec{v}]_B = P_B^{-1}\vec{v}}$ **[4]** .

Esta ecuación también se puede obtener de **[2]** sin más que premultiplicar ambos miembros por P_B^{-1}.

- La ecuación **[2]** nos da la transformación desde $[\vec{v}]_B$ a $\vec{v}$, es decir, de coord. en base B a coord. estándar.
- La ecuación **[4]** da la transformación desde $\vec{v}$ hasta $[\vec{v}]_B$, es decir, de coord. estándar a coord. relativas a base B. En la práctica requiere menos operaciones resolver el sistema (método **[3]**) que calcular la inversa y después premultiplicar por ella (la obtención de la inversa es la que requiere en general más operaciones).

[8] La matriz cuyas columnas son la base B se denota en general como P_B o directamente B. La notación P_B obedece a que P en Álgebra es indicación de independencia lineal de las columnas.

3.6 Formas paramétrica e implícita de los subespacios de $\mathbb{R}^n$

Todo subespacio H de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de las combinaciones lineales o conjunto generado por sus vectores base.

Se expresa $H = < \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d >$, siendo $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$ base de H. d es por tanto la dimensión de H.

Los vectores de H se expresan en forma vectorial paramétrica (o forma explícita) como:

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_d \vec{b}_d$, con α_i parámetros libres.

La expresión anterior nos muestra que H es el conjunto de las soluciones $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de un SLH con n incógnitas y k parámetros libres, por tanto con $n - d$ ecuaciones.

Los vectores de H se expresan en forma implícita como las soluciones de un SLH con $m = n - d$ ecuaciones independientes, es decir, como las soluciones de una ec. matricial $A_{m \times n} \vec{x} = \vec{0}$.

En el documento Tema3-EV-supl-param-impli.pdf tienes material suplementario de justificaciones teóricas de la obtención de las ecuaciones a partir de la base por dos métodos. También tienes ejemplos, tanto de lo anterior como del paso de ecuaciones a base.

Paso de ecuaciones a base: Si un subespacio H de $\mathbb{R}^n$ viene dado en un ejercicio mediante un SLH, la base de H se obtiene resolviendo el SLH. Las k soluciones independientes forman la base de H.

Paso de base a ecuaciones mediante dos métodos:

- Partiendo de una base $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$ las ecuaciones implícitas en las variables $x_1, \ldots, x_n$ pueden obtenerse sin más que imponer que el siguiente sistema lineal sea compatible:
  $[\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ]$, con $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, dejando los x_i como variables.

  En efecto $\vec{x} \in < \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d > \Leftrightarrow [\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ]$ es compatible.

  La ecuación que da lugar al SLH buscado es:

  $\mathrm{rg}([\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d\ ]) = \mathrm{rg}([\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ])$, dejando los x_i como variables, o lo que es lo mismo:

  $\mathrm{rg}([\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ]) = d$, dejando los x_i como variables.

- Se obtiene una base de Nul($[\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d\ ]^t$). Esos vectores base puestos como filas forman una matriz A que es matriz de coeficientes de las ecs. implícitas.

Ejerc. 3.10 Determina una base y la dimensión del subespacio Nul(A), para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

El enunciado también podía haber sido: "Determina una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones implícitas $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 + x_4 = 0$."

Ejerc. 3.11 Determina una base y la dimensión del subespacio Nul(A), siendo $A = [\ 1\ 1\ 1\ ]$.
El enunciado también podía haber sido: "Determina una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación implícita $x_1 + x_2 + x_3 = 0$."

Ejerc. 3.12 Determina la/s ecuación/es implícitas de $H =< (2, -1, 0), (3, 0, -1) >$. H es un <u>hiperplano de $\mathbb{R}^3$</u>. *En* $\mathbb{R}^n$ *se denominan hiperplanos a los subespacios de dimensión* $n - 1$.

Ejerc. 3.13 Sean $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ base de $H =< \vec{b}_1, \vec{b}_2 >$.

a) Determina si $\vec{x} \in H$, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a B.
b) Obtén la ec/ecs. implícita/s del subespacio vectorial H.
c) A partir del resultado anterior obtén una nueva base B' de H.

Ejerc. 3.14 Obtén la/s ec./ecs. implícita/s de $H =< (1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1) >$ utilizando los dos métodos que conoces.

Ejerc. 3.15 Obtén la/s ec./ecs. implícita/s del subespacio de $\mathbb{R}^5$ de base $B = \{(1, 2, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1\}$. (En HVZ12 pgs. 164-165, ejemplo D).

Ejerc. 3.16 Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H. Razona la respuesta.

b) A partir de la base obtenida calcula la ecuación o ecuaciones implícitas de H, denotando a las variables como x_1, x_2, x_3, x_4.

c) Escribe un vector de $\mathbb{R}^4$ que no pertenezca a H. Razona la respuesta.

d) Escribe las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$, sabiendo que sus coordenadas respecto de la base B son (4,2,1), o lo que es lo mismo $[\vec{v}]_B = (4, 2, 1)$.

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base B' de H distinta de la base anterior B.

Dada $A = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_n\ ]$, al subespacio $<\ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n\ >$ se le denomina subespacio generado por las columnas de A y se denota $\mathrm{Col}A$. Por tanto en este ejercicio, denotando $A = [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ \vec{v}_4\ ]$, $H = \mathrm{Col}A$.

Ejerc. 3.17 Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto.

b) A partir de la base B, obtén la/s ec/ecs. implícita/s de H, denotando a las variables de $\mathbb{R}^4$ como x_1, x_2, x_3, x_4.

c1) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 4, -5, -10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

c2) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 8, -10, 10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.