Formas paramétrica e implícita de los subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Sean $H \subset \mathbb{R}^n$ subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $B = \{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_d}\}$ una base de H, sabemos entonces que todo $\vec{x} \in H$ se puede expresar de forma única cómo:

  $\vec{x} = \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \ldots + \alpha_d\vec{b}_d \qquad$ **[1]**

  y que, recíprocamente, todos los vectores expresables en esa forma, tomando α_i como parámetro libre, pertenecen a H.

  $H =< B >=< \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d >$

  La ecuación **[1]**, en la que los α_i son parámetros libres, recibe el nombre de <u>ecuación vectorial paramétrica</u> de H. El número de parámetros es igual a la dimensión de H.

- Toda ecuación vectorial paramétrica de la forma anterior es **solución** de un <u>SL homogéneo</u> en las variables o incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ con grado d de indeterminación. El conjunto de ecuaciones mínimo de este sistema, es decir con el número de ecuaciones igual al rango de la matriz de coeficientes, se conoce como <u>forma implícita del subespacio</u>. Cada una de esas ecuaciones se denomina ecuación implícita.

  El número de ecuaciones de la forma implícita ha de ser igual a la diferencia entre el número de variables, n, y el número de parámetros libres d de la solución (dimensión de H), por tanto:

  $$\text{número de ecuaciones} = n - \dim H$$

  La expresión matricial de la forma implícita es: $A_{m\times n}\ \vec{x}_{n\times 1} = \vec{0}_{m\times 1}$

  m es el número de ecuaciones

- Partiendo de una base $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$ las ecuaciones implícitas en las variables $x_1, \ \ldots, \ x_n$ pueden obtenerse sin más que imponer que el siguiente sistema lineal sea compatible:

  $[\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d \mid \ \vec{x}\ ]$, con $\vec{x} = (\ x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n)$, dejando los x_i como variables.

  En efecto $\vec{x} \in< \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d > \Leftrightarrow [\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d \mid \ \vec{x}\ ]$ es compatible.

  La ecuación que da lugar a la forma implícita es entonces:

  $\mathrm{rg}([\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d\ ]) = \mathrm{rg}([\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d \mid \ \vec{x}\ ])$, dejando los x_i como variables, o lo que es lo mismo:

  $\mathrm{rg}([\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d \mid \ \vec{x}\ ]) \ = \ d$, dejando los x_i como variables.

- Recíprocamente, partiendo de la forma implícita de H y resolviendo el SLH se obtiene la solución general y a partir de esta una base de H. La solución tendrá d parámetros libres, y por tanto la forma $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_d\vec{v}_d$, siendo el conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d\}$ de vectores linealmente independientes entre sí la base buscada.

- El subespacio cero se expresa en forma implícita cómo: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

- El espacio completo $\mathbb{R}^n$ se expresa en forma paramétrica cómo:

  $\vec{x} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ /\ x_i \in \mathbb{R}\}$

Algunos ejercicios resueltos

Ejemplo 1

a) Obtén la expresión vectorial paramétrica y la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ $H =< (1,-2,-5),(2,5,8) >$

b) Obtén una base sencilla de H a partir de su forma implícita.

Sol:

a) $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es la expresión vectorial paramétrica

En efecto tiene el mínimo número de parámetros posible, pues los dos vectores son l.i. (uno no es múltiplo del otro).

Obtengamos a continuación la forma implícita:

$\vec{x} \in \ < \vec{a}_1, \vec{a}_2 > \ \Leftrightarrow \ [\ \vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \mid \vec{x}\ ]$ es compatible. **[2]**

Denotando $\vec{x} = (x,y,z)$, el sistema que ha de ser compatible es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ -2 & 5 & | \ y \\ -5 & 8 & | \ z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & 9 & | & 2x+y \\ 0 & 18 & | & 5x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & 9 & | & 2x+y \\ 0 & 0 & | & 5x+z-4x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & 9 & | & 2x+y \\ 0 & 0 & | & x-2y+z \end{bmatrix}$$

El SL es compatible $\Leftrightarrow$ rgA^*=rg$A$=2 $\Leftrightarrow \quad x-2y+z=0$

Por tanto $H \ = \ < (1,-2,-5),(2,5,8) > \ = \{\ (x,y,z) \ \in \ \mathbb{R}^3 / \ x-2y+z=0\}$

El subespacio vectorial $H =< \vec{a}_1, \vec{a}_2 >$ tiene una única ecuación implícita que es:

$\boxed{x-2y+z=0}$

Obsérvese como la ecuación implícita es efectivamente un SLH.

Número de ecuaciones = dimensión del espacio total $-$ número de parámetros libres

1 = 3 $-$ 2

La expresión matricial de la forma implícita es: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

La comprobación de que los vectores originales cumplen la forma implícita:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Resolviendo el SL dado por la forma implícita obtendremos una base más sencilla.

$$\begin{cases} x = \ 2y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad \boxed{B = \{(2,1,0),(-1,0,1)\}}$$

Comentario a [**2**]

El SL $\begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ -2 & 5 & | \ y \\ -5 & 8 & | \ z \end{bmatrix}$ es compatible $\Leftrightarrow$ rgA^*=rg$A$=2 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & 5 & y \\ -5 & 8 & z \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando la última ecuación se obtendría la misma forma implícita.

Ejemplo 2

Obtén la expresión vectorial paramétrica y la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ $H =< (1, -2, -5) >$

Sol.:

$\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ / $\alpha \in \mathbb{R}$ es la expresión paramétrica.

Nótese que $< (1, -2, -5) >$ es la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y $(1, -2, -5)$.

- Ecuaciones paramétricas escalares: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \qquad / \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -5\alpha \end{cases}$

  Eliminando el parámetro α en las ec. anteriores obtenemos la forma implícita: $\begin{cases} y = -2x \\ z = -5x \end{cases}$

- También podríamos haber obtenido la forma implícita por el método directo:

  $\begin{bmatrix} 1 & | \ x \\ -2 & | \ y \\ -5 & | \ z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & | \ x \\ 0 & | \ 2x + y \\ 0 & | \ 5x + z \end{bmatrix}$ El SL es compatible $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ z + 5x = 0 \end{cases}$

  Por tanto $H =< (1, -2, -5) >= \{ \ (x, y, z) \ \in \ \mathbb{R}^3 / \ \begin{cases} y + 2x = 0 \\ z + 5x = 0 \end{cases} \ \}$

  También se puede expresar $H = \{ \ (x, y, z) \ \in \ \mathbb{R}^3 / \ y + 2x = 0 \ , \ z + 5x = 0 \ \}$

  La forma implícita del subespacio vectorial $< (1, -2, -5) >$ es por tanto:

  $$\begin{cases} 2x + y \qquad = 0 \\ 5x \qquad + z = 0 \end{cases}$$

  En forma matricial: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3

Obtén la expresión paramétrica y la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$
$H = < (1, -2, -5), (2, 5, 8), (1, 0, 1) >$

Sol.:

La dimensión del subespacio es al menos 2, ya que ningún par de vectores son múltiplos entre sí.

Obtendremos en primer lugar la forma implícita, que nos permitirá determinar directamente la dimensión del subespacio.

$\vec{x} \in < \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 > \Leftrightarrow [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3 \mid \vec{x}\ ]$ es compatible. Denotando $\vec{x} = (x, y, z)$, el sistema que ha de ser compatible es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid x \\ -2 & 5 & 0 & \mid y \\ -5 & 8 & 1 & \mid z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid x \\ 0 & 9 & 2 & \mid 2x+y \\ 0 & 18 & 6 & \mid 5x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid x \\ 0 & 9 & 2 & \mid 2x+y \\ 0 & 0 & 2 & \mid x-2y+z \end{bmatrix}$$

El SL es compatible $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Por tanto no hay ecuaciones implícitas, pues no hay restricciones que imponer.

$H = < (1, -2, -5), (2, 5, 8), (1, 0, 1) > \;=\; \mathbb{R}^3 \;=\; \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ **[3]**

H es $\mathbb{R}^3$, por tanto tiene dimensión 3 y 3 parámetros libres.

Una posible expresión paramétrica es: $$\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad / \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

con tres parámetros y tres vectores l.i. Sin embargo, al ser el subespacio el propio $\mathbb{R}^3$, deberíamos dar una expresión más sencilla, como **[3]**:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad / \ x, y, z \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4

Obtén una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$: $\Pi = \{(x, y, z) \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$

Sol.:

En primer lugar pasamos de la forma implícita $2x - y + 3z = 0$ a la forma paramétrica resolviendo el sistema[1]

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2x + 3z \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \ / \ x, z \in \mathbb{R}$$

El conjunto $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$ es linealmente independiente (un vector no es múltiplo del otro) y sistema generador de todo $(x, y, z) \in \Pi$, por tanto es base de Π

[1] Se escoge como incógnita principal "y" a pesar de no ser columna pivotal porque su expresión en función de "x" y "z" es más sencilla que la de "x" como función de "y" y "z"

Otro método para la obtención de la forma implícita

• Consideremos en $\mathbb{R}^2$ un subespacio H de dimensión 1. La forma implícita de H tendría una única ecuación:

$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad$ **[4]**

Nótese que de la misma forma que conocida la matriz de coeficientes $[\ a_1\ a_2\ ]$ podemos resolver para encontrar (x_1, x_2), conocida la solución podríamos usar la matriz $[\ x_1\ x_2\ ]$ y resolver para determinar los coeficientes (a_1, a_2).

En efecto $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ y $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$ son el mismo producto escalar, que resume la ecuación **[4]**

Si en la expresión de la izquierda, $A\vec{x} = 0$, tomamos la traspuesta de ambos miembros obtenemos la expresión de la derecha $\vec{x}^t A^t = 0$ (0 es escalar - matriz 1×1 - y su traspuesta es el mismo valor 0).

• Tomemos ahora un subespacio H de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$. Tendríamos una única ecuación implícita, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_3 = 0$, y dos soluciones independientes.

Partiendo de $A = [\ a_1\ a_2\ a_3\ ]$ podemos resolver para encontrar las dos soluciones independientes (v_1^1, v_2^1, v_3^1) y (v_1^2, v_2^2, v_3^2). Entonces se verifica:

$$\begin{cases} a_1v_1^1 + a_2v_2^1 + a_3v_3^1 = 0 \\ a_1v_1^2 + a_2v_2^2 + a_3v_3^2 = 0 \end{cases}$$

Este par de ecuaciones nos muestra que resolviendo desde la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{bmatrix}$ obtendríamos la solución (a_1, a_2, a_3)

Las comprobaciones “coeficientes de ecuación $\times$ solución $= 0$ ” se expresan matricialmente así :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \\ v_3^1 & v_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nótese de nuevo que la ecuación de la derecha se puede obtener sin más que obtener las traspuestas en los dos miembros de la ecuación de la izquierda.

• Veamos ahora el caso de un subespacio H de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$. Tendríamos entonces dos ecuaciones implícitas $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$ y una única solución independiente.

Tomando la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ resolveríamos encontrando dicha solución (v_1^1, v_2^1, v_3^1), que cumple:

$$\begin{cases} a_{11}v_1^1 + a_{12}v_2^1 + a_{13}v_3^1 = 0 \\ a_{21}v_1^1 + a_{22}v_2^1 + a_{23}v_3^1 = 0 \end{cases}$$

Con lo que resolviendo desde la matriz $\begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \end{bmatrix}$ obtendríamos las dos soluciones independientes: (a_{11}, a_{12}, a_{13}) y (a_{21}, a_{22}, a_{23}), recuperando las filas de la matriz de coeficientes original.

Esquema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación de la derecha se obtiene a partir de la de la izquierda tomando traspuestas en los dos miembros.

Esquema para un subespacio H de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d siendo A la matriz de coeficientes de su forma implícita y $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$ el conjunto de soluciones independientes o base de H:

- Resolviendo $A\vec{x} = \vec{0}$ obtenemos el conjunto de vectores que forma la base B.

- Definida $P_B = [\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d\ ]$, resolviendo $P_B^t\vec{x} = \vec{0}$ (con la traspuesta colocamos los vectores base en las filas) obtenemos el conjunto de vectores solución ($n \times 1$) tales que la traspuesta de cada uno es una fila ($1 \times n$) de la matriz de coeficientes A. El número de vectores solución = número de filas de A = número de ecuaciones, es $n - d$.

  Si en vez de partir de una base B de H partimos de un sistema generador S de H (con d vectores l.i. y desde $d + 1$ hasta $d + s$ combinaciones lineales de los anteriores), una vez hecha la eliminación gaussiana el sistema de ecuaciones tendría un número de ellas igual al del sistema anterior, $P_B^t\vec{x} = \vec{0}$, porque las s ecuaciones adicionales desaparecen por ser los coeficientes de esas filas c.l. de los de las filas anteriores.

Ejemplo 5

Obtén la forma implícita de $H =< (1, 0, 2), (0, 1, 1) >$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix}$$

La solución es $y = -z$, $x = -2z$, por tanto $\vec{x} = (-2, -1, 1)z$

La forma implícita es entonces: $2x + y - z = 0$

Ejemplo 6

Obtén la forma implícita de $H =< (1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1) >$ utilizando los dos métodos que conoces.

Sol.:

Método 1a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | \ x \\ 1 & 2 & | \ y \\ 0 & -1 & | \ z \\ 0 & 1 & | \ t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & | & y-x \\ 0 & -1 & | & z \\ 0 & 1 & | & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & | & y-x \\ 0 & -1 & | & z \\ 0 & 0 & | & z+t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & | & y-x \\ 0 & 0 & | & y-x+z \\ 0 & 0 & | & z+t \end{bmatrix}$$

La forma implícita es: $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$

Comprobación de que los vectores $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ de la base de H cumplen las ecuaciones de la forma implícita:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_1} = \vec{0} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_2} = \vec{0}$$

Los dos productos producen el vector $\vec{0}$ por tanto está comprobado que la forma implícita es correcta.

Es más sencillo realizar la comprobación anterior así:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\vec{0} \ \ \vec{0}]$$

La ec. matricial es $A\ [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ ]\ =\ [\ \vec{0}\ \vec{0}\ ]$

<u>Método 1b:</u> La condición de que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$ tenga rango 2 implica que no tenga menores de orden 3 no nulos. Orlando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$[1] tendremos las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2z - x + y - z = 0 \Rightarrow -x + y + z = 0 \ (\ por\ Sarrus) \\ -t - z = 0 \ (\ por\ cofactores\ de\ la\ primera\ columna) \end{cases}$$

<u>Método 2:</u>

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{P_B^t}\!\!\!\begin{matrix} | \ 0 \\ | \ 0 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Despejando las incógnitas principales en función de las variables libres tenemos:
$x = -z + t$, $y = z - t$, por tanto $(-z + t, z - t, z, t)$ y soluciones independientes:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto una forma implícita de H es: $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes es distinta a la obtenida con el primer método, pero los dos sistemas lineales son equivalentes.

[1] Se usa la siguiente propiedad: el rango es 2 si los menores de orden 3 que "orlan", es decir que contienen, a un menor de orden 2 distinto de cero, son cero. En este caso solo dos menores de orden 3 contienen el menor de orden 2 no nulo seleccionado. Igualándolos a cero obtenemos las dos ecuaciones buscadas.