Tutorías presenciales (T.P.)

Ruth Carballo Fidalgo (UC). 2023-2024.

Contents

1 Semana 18 de septiembre

Modelo 1 (dos versiones de datos)

- **No está en los apuntes. El SL es muy similar a HVZ12 Ejercicio 1.1.4b.**

Considerado el sistema lineal: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + \ \ x_3 + x_4 = 3 \\ \ \ x_1 \qquad + 2x_3 \qquad = 3 \end{cases}$

a) (1.4 pts) Escribe la matriz ampliada del SL en la forma escalonada reducida.	b) **(3.0 pts)** Escribe la solución general en forma <u>vectorial paramétrica</u>, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^4$ y α_i parámetros libres.
$A^*_{\text{esc}} =$	$\vec{x} =$
c) **(1.0 pts)** Escribe la ecuación matricial del SL original (no de uno equivalente a él).	d) **(1.0 pts)** Escribe el SL original (no uno equivalente a él) como una ecuación vectorial.
e) **(2.0 pts)** Escribe dos soluciones del SL que sean linealmente independientes entre sí.	f) **(1.6 pts)** Escribe dos soluciones del correspondiente sistema <u>homogéneo</u> que sean linealmente independientes entre sí.
$\vec{x_1} =$ $\qquad$ $\vec{x_2} =$	$\vec{x_1} =$ $\qquad$ $\vec{x_2} =$

No se puntúan las respuestas inconsistentes entre sí. **Se entrega esta hoja con los resultados finales. Justificación completa en hoja aparte.**

Modelo 2 (varias versiones de datos)

- **1.2.8 apartados a) y b) con otros datos.**

  Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ con: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \\ a \end{bmatrix}$, con a parámetro, y el vector $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ b \end{bmatrix}$, con b parámetro.

  a) Obtén el rango del conjunto S en función del parámetro a. **(2.5 pts)**

  b) Determina los valores de a y b para que $\vec{v}_4$ sea combinación lineal de los vectores de S. **(2.5 pts)**

Respuesta apartado a):	**Respuesta apartado b):**

  Si das más de una condición escribe ”y” u ”o”.

- **1.3.6 ampliado.**

  Considera el sistema lineal cuya matriz ampliada tiene la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$

  a) Obtén una forma escalonada de la matriz ampliada. **(2.0 pts)**

  b) ¿ Para que valores de a y b tiene el sistema lineal infinitas soluciones ? **(1.5 pts)**

  c) ¿ Para qué valores de a y b es el sistema lineal incompatible? **(1.5 pts)**

Respuesta a):	**Respuesta b):**	**Respuesta c):**

  Si das más de una condición escribe ”y” u ”o”.

No se puntúan las respuestas inconsistentes entre sí. **Se entrega esta hoja con los resultados finales. Justificación completa en hoja aparte.**

2 Semana 25 de septiembre

1.

(0.30 pts) a) Escribe la matriz estándar (también llamada matriz relativa a la base canónica) de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente al giro de 30 grados en sentido antihorario, alrededor del punto $(0,0)$.	$A =$
(0.30 pts) b) Determina la imagen del $\vec{v} = (4,1)$, con precisión de centésimas, mediante dicha aplicación. *Utiliza para este apartado la aproximación* $\sqrt{3} = 1.73$.	$\vec{v}_{\text{girado}} =$
(0.30 pts) c) Escribe la matriz estándar S de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la simetría o reflexión respecto del eje X.	$S =$
(0.30 pts) d) Escribe la matriz estándar B de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la siguiente <u>composición:</u> giro de 30 grados en sentido antihorario alrededor del punto $(0,0)$, en primer lugar, y en segundo lugar simetría o reflexión respecto del eje X.	$B =$

No se puntúan las respuestas inconsistentes entre sí. **Justificación completa en hoja aparte.**

Distintos modelos: ángulo 30 grados, ángulo 60 grados, y distinto orden en la composición de transformaciones lineales del apartado d)

2. **(0.50 pts)** Ejercicio Leon2015_1.3.12 (pg. 62).

   Sea el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, con matriz A de tamaño 3×4.

   Sabiendo que las columnas de A verifican la relación

   $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{b}$

   ¿qué podemos concluir sobre el número de soluciones?.

   Razona la respuesta.

3. **(0.50 pts)** Considera el sistema lineal cuya matriz ampliada es $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array}\right]$

¿Para que valores de a tiene el sistema solución única?

Escribe "todo a" o "ningún a" si ese fuera el caso.

Justificación completa:

Preguntas en otras dos versiones:

- ¿Para que valores de a tiene el sistema infinitas soluciones?
- ¿Para que valores de a es el sistema incompatible?

O esta otra versión del tercer ejercicio:

Considera el sistema lineal cuya matriz ampliada es $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \end{array}\right]$

Versión1: ¿Para que valores de β tiene el sistema infinitas soluciones?

Escribe "todo β" o "ningún β" si ese fuera el caso.

Justificación completa:

Versión 2: Explica si el sistema puede ser incompatible.

3 Semana 2 de octubre

EJERCICIO 1

<table>
<tr>
<td>(0.3 pts) a) Obtén $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix}$ utilizando simplificaciones de los siguientes tipos:

Sacar factor común
Operaciones de reemplazamiento en las filas: $(F_i = F_i + \alpha F_j)$</td>
<td>Escribe aquí la expresión más simplificada posible del determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} =$</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.3 pts) b) Basándote en el resultado anterior, escribe a la derecha para qué valores a, b la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$ <u>es invertible</u>. Si obtienes más de una condición usa los nexos adecuados “y” u “o”. No presentes justificaciones de este apartado.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Justificación del apartado a):

Versión 2 usando la matriz $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, se piden los valores a, b, c. Es el ejercicio 2.12 de las diapositivas.

Versión 3 usando la matriz $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & 2b \\ 1 & a^3 & 0 \end{vmatrix}$

Versión 4 usando la matriz $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2a & b^2 \\ 1 & 0 & b^3 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 2

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ determina los elementos de la segunda columna de A^{-1} a partir de los cocientes entre los cofactores que correspondan y el determinante de A. No determines los elementos de las demás columnas.

Primer elemento	Segundo	Tercero

Justificación:

Otras versiones: primera columna, primera fila, segunda fila

Otra versión del **EJERCICIO 1**:

EJERCICIO 1 (0.6 pts) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$, escribe el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} a & 2g & d \\ b & 2h & e \\ c & 2i & f \end{vmatrix} =$$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} -7g & -7h & -7i \\ -7a & -7b & -7c \\ -7d & -7e & -7f \end{vmatrix} =$$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -2d & -2e & -2f \end{vmatrix} =$$

Justificación:

4 Semana 16 de octubre

1. EJERCICIO 3.16. Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H.

Base: dim:
....

b) A partir de la base obtenida, calcula la ecuación o ecuaciones implícitas de H (denota las variables como x_1, x_2, x_3 y x_4).

Ec.:
....

c) Escribe un vector que no pertenezca a H.

$\vec{w}$:
....

d) Escribe las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$, sabiendo que sus coordenadas respecto de la base B son (4,2,1), o lo que es lo mismo $[\vec{v}]_B = (4, 2, 1)$.

....

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base B' de H distinta de la base anterior B.

B' :
....

(O con datos ligeramente modificados)

Los dos ejercicios siguientes son del libro "Linear Algebra with Applications" edición 9. S.J. Leon. Pearson. 2015. (O tienen los datos ligeramente modificados).

2. (Ejercicio 13 pg. 145). Dados los vectores $\vec{x}_1 = (-1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (3, 4, 2)$, $\vec{x} = (2, 6, 6)$ e $\vec{y} = (-9, -2, 5)$,

a) ¿Pertenece $\vec{x}$ al subespacio generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$? .... (sí o no)

b) ¿Pertenece $\vec{y}$ al subespacio generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$? .... (sí o no)

(*Pista RC: Es lo mismo que preguntar si el vector es combinación lineal del conjunto* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.)

c) Añadido: Obtén la ec. implícita del subespacio generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ denotando las variables como x, y, z

Ec.: ....

3. (Ejercicio 10 pg. 162). Los vectores $\vec{x}_1 = (1,2,2)$, $\vec{x}_2 = (2,5,4)$, $\vec{x}_3 = (1,3,2)$, $\vec{x}_4 = (2,7,4)$, $\vec{x}_5 = (1,1,0)$ generan $\mathbb{R}^3$. Reduce el conjunto para formar una base de $\mathbb{R}^3$.

   B : ....

5 Semana 13 de noviembre

Formato 1. Sobre 12 puntos.

(**3 pts**) **Ejercicio 4.9 con diferentes datos.** Dada la aplicación lineal f en $\mathbb{R}^3$ con matriz asociada $F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ respecto de la base $B = \{(1,5,1),(0,1,2),(0,1,-1)\}$, obtén su matriz asociada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, o matriz estándar asociada.

Si usas MATLAB toma el enunciado dado.
Si lo resuelves a mano considera $\mathbb{R}^2$ *y la matriz* $F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *respecto de la base* $B = \{(1,5),(0,1)\}$ para simplificar los cálculos.

Respuesta La matriz estándar es :

Presenta a continuación todos los cálculos y todas las justificaciones.
...

Ejercicio 5.12 (nuevo). Considerada la aplicación lineal f dada por las ecuaciones:
$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 3x_2 - 9x_3 \\ y_2 = \qquad\quad 5x_2 + 18x_3 \\ y_3 = \qquad -2x_2 - 7x_3 \end{cases}$$, se pide:

a) La matriz estándar A de la aplicación lineal (**1 pts**):

$A =$

b) Una base del subespacio propio correspondiente al autovalor $\lambda = -1$ (**2 pts**):

$B =$

c) **(2 pts)** Escribir X en la respuesta correcta sobre diagonalización.

	f es diagonalizable			f no es diagonalizable

Presenta a continuación todos los cálculos y todas las justificaciones.
...

Ejercicio 5.1. Obtén los autovalores de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ y una base de cada subespacio propio. Presenta los resultados en la Tabla. (**4 pts**).

Autovalor (rellena una fila para cada autovalor distinto, usando las que necesites)	Base del subespacio propio (vector o vectores entre llaves y separados por coma si hay más de uno)
$\lambda =$	$B =$
$\lambda =$	$B =$

<u>Presenta a continuación todos los cálculos y todas las justificaciones.</u>

...

Formato 2. Sobre 10 puntos.

(**6 pts**). Para este ejercicio se permite usar MATLAB.
Ejercicio 4.5 o con otros datos. Obtén la matriz estándar de la siguiente transformación lineal en $\mathbb{R}^2$:

* simetría respecto de la recta $y = 3\,x$

Otras versiones:
* simetría sobre la recta $y = 4\,x$ o $y = 2\,x$, o $y = \frac{1}{2}\,x$ o $y = \frac{1}{4}\,x$.
* Proyección sobre alguna de las rectas anteriores.

<u>Presenta a continuación todos los cálculos y todas las justificaciones.</u>
...

(**4 pts**). **Ejercicio 5.1 o con otros datos**
Obtén los autovalores de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ y una base de cada subespacio propio. Presenta los resultados en la Tabla.

Autovalor (rellena una fila para cada autovalor distinto, usando las que necesites)	Base del subespacio propio (vector o vectores entre llaves y separados por coma si hay más de uno)
$\lambda =$	$B =$
$\lambda =$	$B =$

Los otros modelos de datos son:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

<u>Presenta a continuación todos los cálculos y todas las justificaciones.</u>
...

6 Semana 20 de noviembre

Formato 1.

1. **Ejercicio 4.3 ampliado y con otros datos.** (Suma 1.2 puntos que se escalan a **5.0 pts**).

Considerada la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1,0,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,1,2)$ y $f(\vec{e}_3) = (1, 1+c, 6)$, se pide:	
(0.20 pts) a) La matriz estándar asociada A	$A =$
(0.50 pts) b) La dimensión y una base de Nul$f$ (o Ker$f$) en función del parámetro c. Para cada dimensión de Nul$f$ da la contestación en un rectángulo, usando los que necesites.	
(0.25 pts) c) Escribe el/los valores de c para los que la aplicación es inyectiva (cada vector del subespacio imagen tiene un único antecedente).	
(0.25 pts) d) Escribe el/los valores de c para los que la aplicación es sobreyectiva (todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tienen antecedente(s)) .	

Otros modelos:
$f(\vec{e}_1) = (1,0,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,1,2)$ y $f(\vec{e}_3) = (1,1+c,8)$
$f(\vec{e}_1) = (1,0,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,1,3)$ y $f(\vec{e}_3) = (1,1+c,-3)$
$f(\vec{e}_1) = (1,0,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,1,-3)$ y $f(\vec{e}_3) = (1,1+c,6)$

2. **Ejercicio 5.9**. **(5.0 pts)**

Formato 2.

1. **Ejercicio 4.3 ampliado y con otros datos.** (Suma 1.2 puntos que se escalan a **5.0 pts**).
   Es el mismo que el del Formato 1

2. **Ejemplo 8.** a) Encuentra la ecuación implícita del plano de E_3 que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 4, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$.
   b) Obtén el centro geométrico de los tres puntos y comprueba que se encuentra sobre el plano.

(3.5 pts) a) Ecuación implícita	
(1.5 pts) b) Centro geométrico	

7 Semana 27 de noviembre

Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

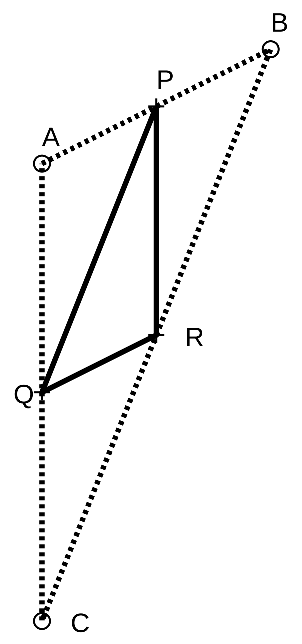
Fecha: Nombre:

Es obligatorio presentar, en todos los apartados, los resultados en la plantilla, y las justificaciones y resultados intermedios aparte.

Presenta los resultados con su valor numérico con precisión de una décima o la expresión numérica exacta más simplificada posible.

Formato 1

Ejercicio 6.9. NUEVO.
En el plano E_2 considera los puntos $P = (4, 7)$, $Q = (2, 2)$ y $R = (4, 3)$ dados, y los puntos A, B y C indicados en la figura.



	Resultado	Puntuación
a) Área del triángulo PQR		1.5
b) Coordenadas del centro geométrico del triángulo PQR		1
c) Perímetro del triángulo PQR		1
d) Coordenadas de A		1
e) Coseno del ángulo interior en A		1.5

Ejercicio 6.10. NUEVO. En E_3,

a) (1 pts) obtén las coordenadas del punto medio M del segmento PQ, con $P = (1, 2, 3)$ y $Q = (4, 5, 7)$.

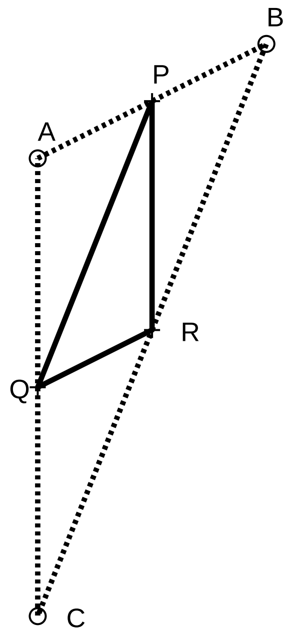
b) (3 pts) obtén la ecuación implícita del plano que pasa por el punto M y es perpendicular al segmento PQ.

M :	
Ecuación implícita:	

JUSTIFICACIONES DE LOS DOS EJERCICIOS:

Formato 2

Ejercicio 6.9. NUEVO.
En el plano E_2 considera los puntos $P = (4, 7)$, $Q = (2, 2)$ y $R = (4, 3)$ dados, y los puntos A, B y C indicados en la figura.



	Resultado	Puntuación
a) Área del triángulo PQR		1.7
b) Coordenadas del centro geométrico del triángulo PQR		1.2
c) Perímetro del triángulo PQR		1.2
d) Coordenadas de A		1.2
e) Coseno del ángulo interior en A		1.7

Hay otra versión en la que en los apartados d) y e) se piden, respectivamente, coordenadas de B y coseno del ángulo interior en B.

Ejercicio 6.11. NUEVO. 3.0 pts. Determina la ecuación implícita del plano que contiene la recta

$$x = \frac{y-1}{2} = z + 3$$

, y es paralelo a la recta $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

JUSTIFICACIONES DE LOS DOS EJERCICIOS: