G282. Álgebra y Geometría. Prácticas MATLAB

Ruth Carballo Fidalgo (UC). Curso 23-24

Contents

Introducción

Introducción a Matlab (Versión 2020) preparada por R. Carballo. Incluida como referencia. Las instrucciones requeridas como contenidos de la asignatura estarán especificadas en el documento pdf de cada práctica.

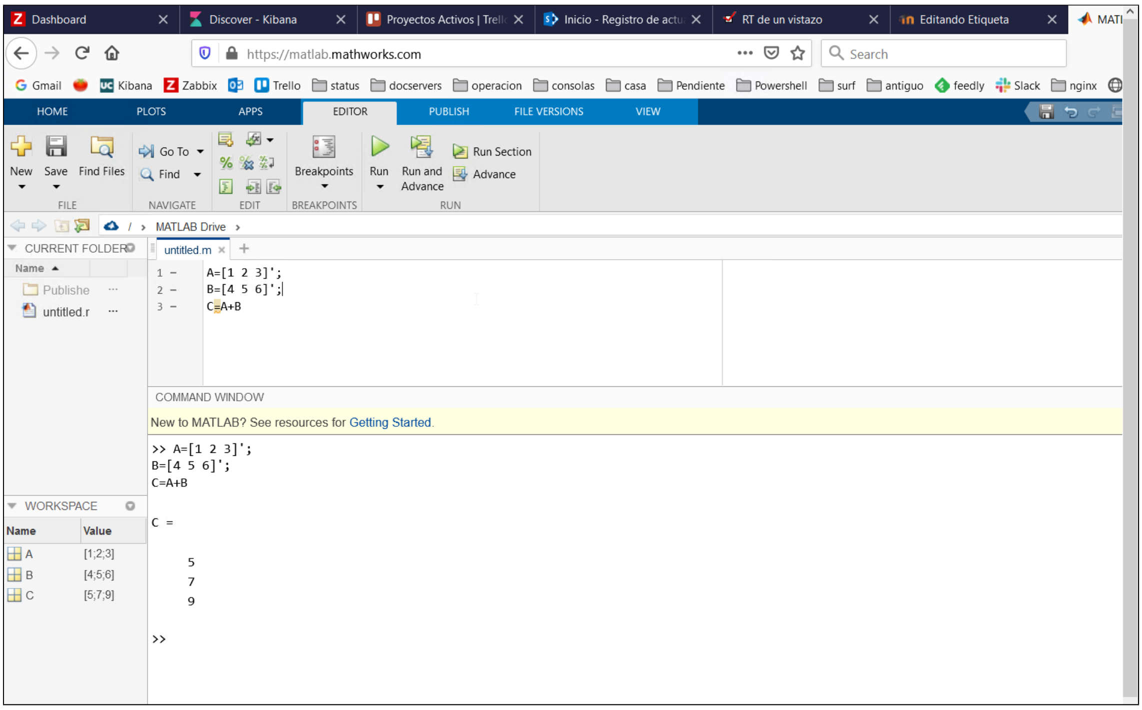
Para realizar las prácticas en las aulas de informática usaremos MATLAB a través de Porticada. MATLAB 2023A → Ejecutar.

Descarga de MATLAB en tu ordenador utilizando la Licencia de la UC

Para poder descargarte el software con la licencia MATLAB de la Universidad de Cantabria tienes que abrir previamente una cuenta en MathWorks www.mathworks.com con la dirección de correo de la universidad pero eligiendo una contraseña distinta de la de la Universidad. Una vez dispongas de esa cuenta, debes conectarte a este enlace del Servicio de Informática de la UC. En la nueva ventana, parte superior derecha, junto con el icono de MATLAB te aparece el enlace Portal Matlab de la UC que debes clicar a continuación. Desde la ventana emergente arrancas el proceso de acreditación, y de descarga/instalación de MATLAB y Simulink. Para ello fíjate en el cuadro negro y clica en el botón azul "Inicia sesión para empezar a utilizarlos". La ventana emergente nos pide la acreditación como miembros de la UC, y seguidamente se nos pide entrar a nuestra cuenta the Mathworks y a continuación nos lleva a la ventana de Descargas/Instalación. Nos quedamos con la versión R2023a, y clicamos en el botón azul "Descargar para Windows" (hay opciones de descarga para otros dos sistemas operativos). Clicamos en el ejecutable para proceder a la instalación. En uno de los pasos nos pide marcar los productos que queremos seleccionar y marcaremos dos: MATLAB y "Symbolic Math Toolbox".

Uso de MATLAB online (por Valvanuz Fernández Quiruelas, curso 21-22, GIM, UC)

Es posible utilizar MATLAB desde cualquier ordenador sin necesidad de instalarlo. Basta con disponer de un navegador y de las credenciales utilizadas para descargarse MATLAB de la página de Mathworks.
Para poder utilizarlo hay que acceder al portal MATLAB Online y validarse con las credenciales de Mathworks. Una vez dentro aparecerá una instancia de MATLAB muy similar a la que aparece cuando lo instalamos en nuestros ordenadores y que nos permitirá trabajar igual que lo hacemos en éstos.
MATLAB online puede ser muy útil cuando tenemos un equipo en el que no está instalado MATLAB o cuando nuestro equipo es muy viejo y tarda mucho en ejecutar las órdenes. Una de las principales ventajas de MATLAB online es que las órdenes se calculan en la nube, no en nuestro equipo.



Dashboard
Discover - Kibana
Proyectos Activos | Trello
Inicio - Registro de actu
RT de un vistazo
Editando Etiqueta
https://matlab.mathworks.com
Search
Gmail
Kibana
Zabbix
Trello
status
docservers
operacion
consolas
casa
Pendiente
Powershell
surf
antiguo
feedly
Slack
nginx
HOME
PLOTS
APPS
EDITOR
PUBLISH
FILE VERSIONS
VIEW
New
Save
Find Files
Go To
Find
Breakpoints
Run
Run and Advance
Run Section
Advance
FILE
NAVIGATE
EDIT
BREAKPOINTS
RUN
MATLAB Drive
CURRENT FOLDER
Name
Publishe
untitled.r
untitled.m
A=[1 2 3]';
B=[4 5 6]';
C=A+B
COMMAND WINDOW
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
>> A=[1 2 3]';
B=[4 5 6]';
C=A+B
C =
5
7
9
>>
WORKSPACE
Name
Value
A
[1;2;3]
B
[4;5;6]
C
[5;7;9]

P.1 Semana 11 de septiembre

Las instrucciones de MATLAB, incluidos los comentarios, están escritos en azul, y las salidas en rojo.

Ejercicio 1.1.5

Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados [1], utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^5$ y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ produce una solución válida del sistema).

$$I : \begin{cases} \quad\;\; x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$II : \begin{cases} \quad\;\; x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

```
% CLASIFICACION Y SOLUCION DEL SISTEMA LINEAL.

A=[0 1 -2 2 0; 1 1 -4 5 2; -1 3 -4 3 0];  % A Matriz de coeficientes

% b vector de terminos independientes (columna)
b=[-7  -23  3]';

% CLASIFICACION:

Am=[A b]         % Matriz ampliada concatenando A con b a la derecha


Am =
     0     1    -2     2     0    -7
     1     1    -4     5     2   -23
    -1     3    -4     3     0     3


% La existencia o no de solucion/es se determina mediante el Teorema
% de Rouche-Frobenius
rank(A)   % rango = numero de cols. pivotales
rank(Am)
% El sistema tiene solucion si esos rangos son iguales
n=size(A,2)  % n es el numero de cols de A = numero de incognitas del SL
% En caso de que el sistema sea compatible, sera indeterm. si n>rango(A)
% siendo n-rango(A) el grado de la indeterminacion.
% Sera determinado si n=rango(A). (Ya sabemos por adelantado que no puede
% suceder, pues n=5 y A solo tiene tres filas)


ans =
       3
```

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

```
ans =
       3
n =
       5

% el Sistema es compatible indeterminado con 5-3=2 parametros libres

% SOLUCION MEDIANTE METODO GAUSS-JORDAN:

% A continuacion aplicamos Gauss-Jordan para obtener
% el sistema equivalente más sencillo posible.
[U j]=rref(Am)  % U proporciona la forma escalonada reducida de Am,
                % que es única.
                % U es la matriz ampliada del sistema equivalente
                % mas sencillo posible.
                % U viene de "upper", porque la matriz al estar escalonada
                % tiene ceros debajo de la diagonal principal.
                % rref es acrónimo de  "reduced row echelon form"
                % j es un vector fila que da los índices de las cols pivotales
                % por lo que length(j), que es el número de entradas de j,
                % es el rango de la matriz que estamos estudiando, Am.
length(j)
U =
     1     0    -2     3     0   -24
     0     1    -2     2     0    -7
     0     0     0     0     1     4

j =
1    2     5

ans =
       3

% Las tres columnas pivotales son la primera, la segunda y la quinta.
% Esas columnas corresponden a las incognitas  x1, x2, x5 ,
% que son las variables basicas, o incognitas principales.
% x3, x4   son las variables libres, tambien llamadas parametros libres.
%
% Procedimiento 1)  A partir de U despejamos las incognitas principales.
% Antes declaramos los parametros libres

syms x3 x4 real            % declaramos

x1 = -24 + 2*x3 - 3*x4  ;  % despejamos
x2 =  -7 + 2*x3 - 2*x4  ;  % despejamos
x3 = x3                 ;  % esta linea y la siguiente se incluyen por
x4 = x4                 ;  % completitud pero se puede prescindir de ellas
x5 = 4                  ;  % despejamos

sol=[x1 x2 x3 x4 x5]'  % solucion en forma vectorial
pretty(sol)            % formato mas legible para datos simbolicos
```

```
sol =

 2*x3 - 3*x4 - 24
  2*x3 - 2*x4 - 7
              x3
              x4
               4

/ 2 x3 - 3 x4 - 24 \
|                  |
|  2 x3 - 2 x4 - 7 |
|                  |
|        x3        |
|                  |
|        x4        |
|                  |
\         4        /

% La solucion en forma vectorial parametrica, separando el vector constante
% y cada vector que queda multiplicado por un parametro libre, es:
%
% solucion = p + x3*v1 + x4*v2 siendo
p  = [-24 -7 0 0 4]'
v1 = [ 2  2 1 0 0]'
v2 = [-3 -2 0 1 0]'


p =
    -24
     -7
      0
      0
      4

v1 =
     2
     2
     1
     0
     0

v2 =
    -3
    -2
     0
     1
     0


[p v1 v2] , rank(ans)   % comprobamos que esos tres vectores son l.i.,
                        % es decir, rango 3.
```

```
ans =
   -24     2    -3
    -7     2    -2
     0     1     0
     0     0     1
     4     0     0
ans =
      3

% La solucion es x = (-24,-7,0,0,4) + x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% Al tener dos parametros libres la solucion la forman las infinitas
% combinaciones lineales de dos direcciones independendientes, trasladadas
% mediante un vector p distinto de cero, y tambien independiente de los
% dos anteriores.

% Procedimiento 2). Una vez escogidos los parametros libres, x_3, x_4, podemos
% obtener la solucion con la funcion solve()

syms x1 x2 x3 x4 x5 real  % declaramos (con esta instrucción, si alguna variable ya
                          % existiera y tuviera un valor asignado se reinicia,
                          % quedando sin valor)
x=[x1;x2;x3;x4;x5]
sol=solve(A*x-b,[x1,x2,x5])   % tambien se podria escribir como
                              % solve(A*x-b==0,[x1,x2,x5]) o como
                              % solve(A*x==b,[x1,x2,x5])
struct with fields:
    x1: 2*x3 - 3*x4 - 24
    x2: 2*x3 - 2*x4 - 7
    x5: 4
sol=[sol.x1; sol.x2; x3; x4; sol.x5]

2*x3 - 3*x4 - 24
 2*x3 - 2*x4 - 7
              x3
              x4
               4

% SOLUCION DEL CORRESPONDIENTE HOMOGENEO

% Aplicando el procedimiento anterior con b = [0 0 0]' (es decir, con
% igual A, la misma funcion rref(), pero los terminos independientes
% cero), se obtendria como solucion:

% sol =  x3*v1 + x4*v2 con los mismos v1 y v2 que en el SL no homogeneo

% x = x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% Veamoslo, aunque sea obvio:

b=[0 0 0]';  Amh=[A b]   , rref(Amh)
```

```
Amh =
     0     1    -2     2     0     0
     1     1    -4     5     2     0
    -1     3    -4     3     0     0

ans =
     1     0    -2     3     0     0
     0     1    -2     2     0     0
     0     0     0     0     1     0

% Aquítendríamos que despejar como antes x1, x2 y x5 en función
% de los parámetros, obteniendo
% x = x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% Lo podríamos hacer directamente con:
syms x1 x2 x3 x4 x5 real
x=[x1 x2 x3 x4 x5]'          % Para escribir el vector podemos utilizar los
                             % separadores ";" o trasponer (')
sol=solve(A*x,[x1,x2,x5])
  struct with fields:

    x1: 2*x3 - 3*x4
    x2: 2*x3 - 2*x4
    x5: 0


sol = [sol.x1; sol.x2; x3; x4; sol.x5]
2*x3 - 3*x4
2*x3 - 2*x4
         x3
         x4
          0

% METODO ALTERNATIVO PARA LA RESOLUCION DE SISTEMAS HOMOGENEOS:

% null(Matriz Coeficientes)  El nombre de null viene de nulo, o cero,
                            % ya que resolvemos [A | 0]

% Hemos visto que la solucion general del SLH no es más que el conjunto de
% todas las combinaciones lineales de dos soluciones independientes v1 y v2.

% La función null() nos dará directamente esas dos soluciones v1 y v2.
% Si hubiera más parámetros libres daría más soluciones
% (da 2  en este caso porque  los parámetros  libres son dos).

% Obviamente el algoritmo null() ya sabe que resuelve un SL homogéneo,
% por tanto la matriz que le demos como argumento se
interpreta como la matriz de coeficientes A.
% En efecto si añadiéramos, por error, la columna de ceros de los términos
% independientes, null() consideraría esa columna como una incógnita más.

sol=null(A)
```

```
   -0.7107    0.3857
   -0.1867    0.6532
    0.4307    0.5941
    0.5240    0.2675
   -0.0000   -0.0000


u1=sol(:,1)
u2=sol(:,2)


u1 =
   -0.7107
   -0.1867
    0.4307
    0.5240
   -0.0000

u2 =
    0.3857
    0.6532
    0.5941
    0.2675
   -0.0000


% La sol. general es sol=alpha*u1+beta*u2, con alpha y beta param. libres.
% El lugar geometrico de las soluciones es el mismo que antes,
% simplemente se estan utilizando dos vectores diferentes de los anteriores
% para generarlo.
% Los vectores que nos da null son unitarios (norma 1) y ortogonales entre si
% (su producto escalar es cero).

% Los vectores v1 y v2 que calculamos con rref como si efectuaramos
% los calculos a mano se pueden obtener tambien como null,
% simplemente haciendolo trabajar en modo simbolico, usando en vez de A, sym(A).

sol= null(sym(A))

sol=
[2, -3]
[2, -2]
[1,  0]
[0,  1]
[0,  0]


% La solucion deducida asi es
x=alpha*(2,2,1,0,0)+beta*(-3,2,0,1,0),
% que es la misma que la obtenida con rref, y que nos evita ahora
% tener que despejar.

%%%%%%%%   FIN DEL EJERCICIO   %%%%%%%%
```

¿Por qué `syms` lo acompañamos con `real`?

```
syms x real  % En esta expresion 'syms' crea la variable simbolica x
             % y obliga a que sea real.
             % o lo que es lo mismo, la parte real de x es x
             % y la parte imaginaria de x es 0

% Observa los siguientes resultados:

2*x-5*x
conj(x)     % Probamos a calcular el conjugado de x y la respuesta es
            % que conj(x) es x
            % porque el conjugado de un real es el mismo real
            % (no hay parte imaginaria que tenga que cambiar de signo).

-3*x
x


syms x    % syms crea la variable simbolica x sin especificar que tipo
          % de numero. Se puede añadir la suposición adicional de que el % número sea real o
          % rational. Si no lo hacemos queda la suposición por defecto
          % que es que se trate de un número complejo)

2*x-5*x   % Aquí todo sigue siendo correcto

conj(x)   % Nos va a decir que conj(x) es conj(x). No puede calcular
          % el conjugado de x porque x se trata como un complejo y no se
          % ha dado informacion de cual es la parte real de x y cual
          % la parte imaginaria.
-3*x
conj(x)

% Esta diferencia entre variables simbolicas reales y complejas
% es importante para nosotros al usar la trasposición con el símbolo '
% Ya que ' significa para MATLAB traspuesta-conjugada.

% Veamoslo en el siguiente ejemplo:

syms x y
[x y]'

 conj(x)
 conj(y)

syms x y real
[x y]'

 x
 y
```

La función transpose(), aplicada a una matriz, columna o fila, devuelve la matriz traspuesta (sin conjugar).

Observa que las funciones `syms` y `sym()` son distintas.
`B=sym(A)` convierte la matriz numérica A en la matriz B, que es igual a A en sus elementos, pero siendo ahora considerados en modo simbólico.

```
% Ejemplo:

A = [ 1/3 2/3 ; -7/3 1/3 ]

A =
    0.3333    0.6667
   -2.3333    0.3333


det(A)

1.6667


det(sym(A))    % obligamos a que la funcion det() trabaje sobre expresiones simbolicas,
               % y en consecuencia obtenemos el resultado exacto.

5/3
```

P.2 Semana 18 de septiembre

Ejercicios de sistemas lineales, operaciones con vectores e introducción a las aplicaciones lineales

Guía:

- `format rat` si queremos usar formato racional
- definir la matriz de coeficientes `A = [ - ... - ; - ... - ; ... ]`
- definir el vector b como `b = [ - ... - ]'`
- definir matriz ampliada como `Am = [ A b]`
- `rref(Am)` para obtener la forma escalonada reducida.
- `null(sym(A))` permite resolver SL homogéneo con matriz de coeficientes A
- Si el sistema es indeterminado no uses `syms` para declarar los parámetros libres. Despeja sobre el papel las incógnitas principales, a partir de la escalonada reducida, y usa los nombres que quieras para los parámetros libres.
- Puedes obtener los rangos de cualquiera de estas tres formas: contando las columnas pivotales visualmente en la forma escalonada reducida, mediante la funcion `rank()`, o determinando los índices de las columnas pivotales utilizando las dos salidas posibles de `rref()` (por ejemplo `[matriz_red j] = rref(matriz)`)
- Las funciones `rref()`, `rank()` y `null()` no pueden utilizarse si la matriz contiene variables, pues dan resultados erróneos).
- Los sistemas de tipo compatible determinado pueden resolverse con la función `linsolve(A,b)`, siendo `A` la matriz de coeficientes y `b` el vector de términos independientes.

Ejercicio 1.2.11. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & - & 5t & = & 1 \\ & & 3y & + & 3z & + & 3t & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 4z & - & 4t & = & 2 \end{array}\right.$,

halla:

a) La solución general en forma vectorial paramétrica.

b) La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.

c) La solución general en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

Ejercicio 1.2.13. Considera el siguiente sistema constituido por 4 masas puntuales:

Punto	Masa
$\vec{v}_1 = (5, -4, 3)$	$m_1 = 2$ g
$\vec{v}_2 = (4, 3, -2)$	$m_2 = 5$ g
$\vec{v}_3 = (-4, -3, -1)$	$m_3 = 2$ g
$\vec{v}_4 = (-9, 8, 6)$	$m_4 = 1$ g

- Calcula el centro geométrico del sistema. $\vec{v}_c = \dfrac{\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k}{k}$

- Calcula el centro de masa, $\vec{v}_{\text{cdm}}$, del sistema, sabiendo que:

$$\vec{v}_{\text{cdm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_k\vec{v}_k}{m_1 + \ldots + m_k}$$

Ejercicio 1.3.7. Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:
$\vec{v} = (\ 17\ \text{mg de vitamina C}\ ,\ 54\ \text{mg de calcio},\ 31\ \text{mg de magnesio})$

Ejercicio 1.4.4. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ que asigna a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:

$$\begin{cases} y_1 \ \text{ es la media de } \ x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \ \text{ es la media de } \ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \ \text{ es la suma de } \ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$

(Añadido) Aplicación de esta matriz para el estudio de casos PCR+ en Cantabria, en los períodos del 1 al 5 y del 8 al 12 de marzo de 2021.

Fecha	Nuevos PCR+
1-3-2021	40
2-3-2021	48
3-3-2021	37
4-3-2021	43
5-3-2021	26
8-3-2021	27
9-3-2021	48
10-3-2021	44
11-3-2021	39
12-3-2021	45

Primera semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	
Segunda semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	

Soluciones:
Sólo se muestra parte de lo que sale por pantalla.

1.2.11

```
Am = [1 2 3 -5 1; 0 3 3 3 3; 1 3 4 -4 2]   % Esta vez empezamos con la ampliada
A  = Am(:,1:4)                             % Aquí extraemos A

% Apartado c)   Resolvemos el SL    A x = 0
% -----------------------------------------

B  = null(sym(A)) % las cols de la salida son los vectores que acompañan
                  % a los parametros en la solucion del SLH
% [-1,  7]
% [-1, -1]
% [ 1,  0]
% [ 0,  1]

% Extraemos de B dichas columnas

b1=B(:,1)
% -1
% -1
%  1
%  0

b2=B(:,2)
%  7
% -1
%  0
%  1

% Respuesta a solucion general del homogeneo:
% x = alpha b1 + beta b2

% Las columnas no pivotales de A nos dicen qué
% incógnitas corresponden a esos parámetros,

rref(A)

%     1     0     1    -7
%     0     1     1     1
%     0     0     0     0

% Son cols 3 y 4, por tanto  z, t

% Podemos escribir también la solución como
%    x = z b1 + t b2

% Apartado a)
% -----------
```

```
Amred = rref(Am)

%      1      0      1     -7     -1
%      0      1      1      1      1
%      0      0      0      0      0

% El SL original, no homogeneo, es compatible.

% Despejando x, y en Amred deducimos la parte constante para x e y
% z, t son parametros libres, z=z   t=t. Su parte constante es cero.

p = [-1 1 0 0]'

%     -1
%      1
%      0
%      0

% Respuesta a la solucion general del original
% x = p + alpha b1 + beta b2
% o   x = p + z b1 + t b2

% Apartado b)
% -----------

xpar= p + 1*b1 + (-2)*b2   % solucion particular pedida, del SL original

% -16
%  2
%  1
% -2

% Comprobaciones
% --------------

% Por ejemplo:
% A * xpar   tiene que producir el vector (1,3,2)
% A * p      tiene que producir el vector (1,3,2) (es la
%            solu. particular con z=0, t=0

% A * b1 tiene que producir (0,0,0)
% A * b2 tiene que producir (0,0,0)
```

1.2.13

```
v1 = [ 5 -4  3 ]' ;
v2 = [ 4  3 -2 ]' ;
v3 = [-4 -3 -1 ]' ;
v4 = [-9  8  6 ]' ;
```

```
m=[2 5 2 1]' ;  % creamos vector m cuyas entradas son las masas
M=sum(m)     ;  % la funcion  sum()  devuelve la suma de las entradas de m
c=m/M        ;  % vector que da la fraccion de masa

% Cada coeficiente o peso en la combinacion lineal es c(i)
% con i=1,2,3,4

cmasas      = c(1) * v1 + c(2) * v2 + c(3) * v3 + c(4) * v4

%   1.3
%   0.9
%   0

% Para el centro geometrico las cuatro masas cuentan igual,
% cada una un 25%, o fracción 1/4.

cgeometrico = 1/4*v1 + 1/4*v2 + 1/4*v3 + 1/4*v4

%   -1.0000
%    1.0000
%    1.5000

% Otro procedimiento consiste en escribir la combinacion lineal como un
% producto matriz-vector. La matriz tiene por columnas los vectores de
% posicion.

% Para el centro de masas el vector de los coeficientes es c
% Para el centro geometrico el vector de los coeficientes es  [1/4 1/4 1/4 1/4]'

% cmasas = [v1 v2 v3 v4] * c;

% cgeo   =  [v1 v2 v3 v4] * [1 1 1 1]' * 1/4;


cmasas'   % pido solucion como fila para que ocupe menos

%    1.3000     0.9000   0.0000


cgeo'     % pido solucion como fila para que ocupe menos

%    -1.0000    1.0000   1.5000
```

1.3.7

```
Am=[1 5 3; 1 2 1; 17 54 31]'
rref(Am)   % aqui vemos que el sistema es incompatible.

%    1     0     0
%    0     1     0
%    0     0     1
```

```
% otro metodo
A=Am(:,1:2)
[rank(A) rank(Am)]

% 2 3

% =>  sist. incompatible
```

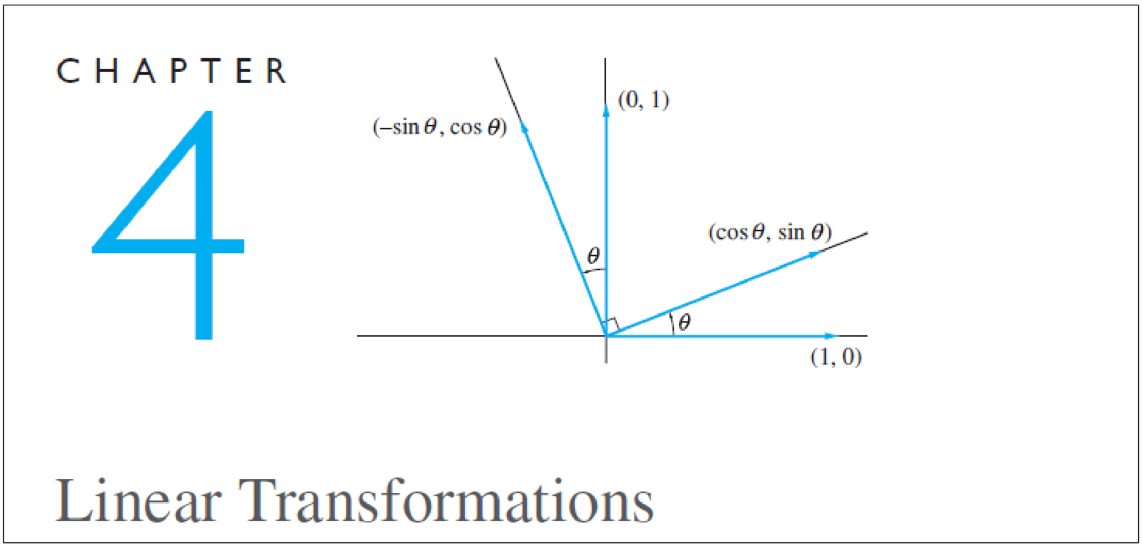
1.4.4

```
% Construimos la matriz de forma que:
% y1 sea la media de los tres primeros dias, de ahi 1/3
% y2 es la media de los 5 dias, de ahi 1/5
% y3 es la suma de casos de los 5 dias, de ahi coeficientes 1

A=[1/3 1/3 1/3 0 0; 1/5 1/5 1/5 1/5 1/5 ; 1 1 1 1 1]
%    0.3333    0.3333    0.3333         0         0
%    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000
%    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000



% metodo para obtener la estadistica de la semana 1
% -------------------------------------------------

PCRplus_s1 = [40 48 37 43 26]'
%    40
%    48
%    37
%    43
%    26

A * PCRplus_s1
%   41.6667
%   38.8000
%  194.0000

% metodo para obtener los resultados de las dos semanas a la vez
% --------------------------------------------------------------

% Preparamos la matriz de datos de forma que:
% primera columna son los datos de la primera semana
% segunda columna son los datos de la segunda semana

PCRplus = [40 48 37 43 26 ; 27 48 44 39 45]'
%    40    27
%    48    48
%    37    44
%    43    39
%    26    45

A * PCRplus
%   41.6667   39.6667
%   38.8000   40.6000
%  194.0000  203.0000
```

P.3 Semana 25 de septiembre y 2 de octubre

<u>**Aplicaciones lineales: Giro en $\mathbb{R}^2$ alrededor del origen**</u>

Matriz estándar del giro en $\mathbb{R}^2$ de centro en el origen y ángulo θ.
Ejercicio 1.4.12 (Tema 1, pag. 33 de las diapositivas)



S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9ª. Pearson. 2015.

La matriz estándar del endomorfismo, o matriz respecto de la base canónica, es:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

En efecto, siendo $\vec{e}_1 = (1, 0)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)$,

$$A = [\, f(\vec{e_1}) \;\; f(\vec{e_2}) \,] \quad \textit{con} \quad \begin{cases} f(\vec{e_1}) = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_2 \\ f(\vec{e_2}) = -\operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2 \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ en el sentido antihorario o positivo

$-\pi < \theta < 0$ en el sentido horario o negativo

Ejercicio Adicional 1.4.13

En $\mathbb{R}^2$, escribe la matriz estándar correspondiente al giro de 50 grados en sentido antihorario de centro en el origen.	$A =$
Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$	$\vec{v}_{\text{girado1}}=$
Comprueba que las normas de los dos vectores son iguales, utilizando la función `norm()`	$\parallel \vec{v} \parallel =$ $\parallel \vec{v}_{\text{girado1}} \parallel =$
Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ para un giro de 50 grados en sentido horario.	$\vec{v}_{\text{girado2}}=$
Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ para un giro de 180 grados	$\vec{v}_{\text{girado3}}=$

Inversa de un endomorfismo e inversa de una matriz cuadrada. Determinantes.

Los siguientes resultados son equivalentes:

- A_n es invertible
- rg$A$=n
- det$A \neq 0$

La función `inv()` calcula la inversa de una matriz. Al igual que ocurre con las funciones `rank()`, `rref()` y `null()`, no debe usarse esta función si la matriz incluye variables simbólicas.

La funcion `det()` calcula el determinante de una matriz.

Antes de calcular la inversa de una matriz debes asegurarte de que el valor de su determinante ni es cero ni compatible con cero dentro de la precision numérica de MATLAB.

HVZ12_EjemploE_pg44 (enunciado en pg. 39 de las diapositivas). Encuentra la inversa de la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2)$.

Ejercicio 2.9 (enunciado en pg. 59 de las diapositivas). Clasifica el sistema lineal en función del parámetro a, haciendo uso del determinante de la matriz de coeficientes.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & a\,x_3 & = & a \\ 2\,x_1 & - & a\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: ....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: ....

El sistema es incompatible si y sólo si: ....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Comprueba que las respuestas presentadas son consistentes entre sí, es decir, que no hay valores de a repetidos entre los tres tipos. Y comprueba además que todos los posibles valores de a ($\in \mathbb{R}$) están considerados.

Ejercicio 2.10 (enunciado en pg. 60 de las diapositivas). Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, y sabiendo que $D = ABC = \begin{bmatrix} 11 & 17 & 108 \\ 17 & 1 & 108 \\ 4 & 10 & 108 \end{bmatrix}$, calcula la matriz C. Si no existe, indícalo explícitamente.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO ADICIONAL 1.4.13  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> a=50
        50

>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    0.6428   -0.7660
    0.7660    0.6428

>> v=[4 3]'
     4
     3

>>vg1=A*v
    0.2730
    4.9925

>> norm(v)
     5
>> norm(vg1)
    5.0000

>> A = [cosd(-a)   -sind(-a) ;   sind(-a)    cosd(-a)]
    0.6428    0.7660
   -0.7660    0.6428

vg2 = A*v
    4.8693
   -1.1358

>> norm(vg2)
     5

>> a = 180
   180

>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    -1     0
     0    -1

>> vsimetrico_respecto_origen = A*v
 -4
 -3
>> % Con el giro de 180 grados se obtiene el vector opuesto.
>> % Esta transformacion se conoce con dos nombres: giro de 180
>> % grados y simetría respecto del origen.
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solucion HVZ12_EjemploE_pg44  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>>  A = [3 2 ; 1 2]
>>  B=inv(A)

    0.5000   -0.5000
   -0.2500    0.7500

>> format rat
>> inv(A)

       1/2           -1/2
      -1/4            3/4

>> % g(x1,x2) = (1/2 x1 -1/2 x2, -1/4 x1 + 3/4 x2)


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solucion EJERCICIO 2.9  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> syms a real
>> A=[-1 -2 a; 2 -a 2; 1 2 4]
>> b=[-a -2 3]'

 [-1, -2, a]
 [ 2, -a, 2]
 [ 1,  2, 4]

-a
-2
 3

% 1)   CASO SCD
>> det(A)  % el SL, con tres ecuaciones y tres incognitas, es comp.
           % determinado si y solo si rgA=3
           % si y solo si det(A) distinto de cero.
           % No puedo usar rank() porque la matriz es simbóloca,
           % y además el enunciado dice que haga uso del determinante.
           % Ya que no puede haber infinitas soluciones,  rg(A)
           % no puede ser menor que 3, por tanto ha de ser 3.
           % Con eso ya tengo garantizada la compatibilidad, pues
           % rg(A*) también es 3 ya que hay tres filas.

 a^2 + 8*a + 16

% Da como resultado la "expresión desarrollada", un polinomio en a
% de grado 2, desarrollado. Desarrollado significa expresado como sumas.
```

```
>> solve(ans)  % en vez de hacer solve(det(A))
               % hacemos solve(ans)  ans=última expresión calculada
 - 4
 - 4

% Las dos raíces del polinomio de grado 2 tienen el mismo valor, a=-4.
% Recordemos que todo polinomio en una variable de grado n y coeficientes
% reales tiene n raíces, reales y/o complejas, simples o múltiples.

>> factor(det(A))  % Da la expresión del determinante factorizada, concretamente
% los factores. En este caso (a+4) (a+4), de forma que det(A) = (a+4)^2

[a + 4, a + 4]

% Conclusion: el SL es comp. determ.  si y solo si a distinto de -4

% 2) Si a=-4 el sistema será compatible indeterminado o incompatible.

A1 = subs(A,a,-4)  % analizamos este caso usando la función
                % subs()  substitute(expresión o matriz, variable, valor)
% [-1, -2, -4]
% [ 2,  4,  2]
% [ 1,  2,  4]

b1 = subs(b,a,-4)

[rank(A1) rank([A1 b1])]

     2     3
% Compatible indeterminado nunca
% Incompatible para a=-4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solucion EJERCICIO 2.10  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


>> A=[2 -3 -5; -1 4 1; 1 -3 -4] , B=[2 1 -4; 0 1 4; 1 -2 -3],
>> D=[ 11 17 108  ; 17 1 108; 4 10 108]

     2    -3    -5
    -1     4     1
     1    -3    -4

     2     1    -4
     0     1     4
     1    -2    -3

    11    17   108
    17     1   108
     4    10   108
```

```
% El procedimiento más sencillo es el siguiente:
% Partiendo de A*B*C=D  analizamos si A*B es invertible

>> det(A*B)
-216

% obtenemos determinante distinto de cero, por tanto sí lo es

% inv(A*B)* A*B * C = inv(A*B)*D  es como queda la ec. premultiplicando
%                                 los dos miembros por esa inversa
%                                 =>  C = inv(A*B)*D

C=inv(A*B)*D
    2.0000    1.0000   -29
    2.0000    2.0000    11
    1.0000         0     4

% Comprobación:
% A*B*C-D tiene que dar como resultado una matriz de ceros del tamaño de D
>> A*B*C-D
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

P.4 Semana 2 de octubre

Ejercicios donde se pide calcular Nul(A)

Nul(A) es el conjunto de soluciones del SL $A\vec{x} = \vec{0}$

Ejemplo 1 $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

```
A=[1 2 3; 4 5 6; 5 7 10]

%      1      2      3
%      4      5      6
%      5      7     10

null(sym(A))

% Empty sym: 3-by-0
```

En este ejemplo A tiene rango 3, por lo que la única solución es la trivial, $(0, 0, 0)$.
La salida "Empty sym: 3-by-0" indica que espera vectores de tres componentes como solución, pero que no consigue ninguna columna ('by-0'), porque no hay ningún parámetro libre. `null` solo produce las soluciones no triviales.

Ejemplo 2 $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

```
A=[1 2 3; 4 5 6; 5 7 9]

%      1      2      3
%      4      5      6
%      5      7      9

% Hemos cambiado el elemento (3,3) (fila 3 y columna 3), de forma que
% la tercera fila pase a ser la suma de la primera y la segunda.
% Ahora el rango es 2.

null(sym(A))

%   1
%  -2
%   1
```

$\text{Nul}(A) = \{(1, -2, 1)\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$
La base del subespacio Nul(A) es $\{(1, -2, 1)\}$
Al resolver el SL $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ la solución son los coeficientes de la c.l. de las columnas de A que producen el cero, por tanto $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$, siendo $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$ las columnas de A.
$\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$, es la relación de dependencia lineal que cumplen las columnas.

Ejemplo 3 $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

```
A=[1 2 3; 3 6 9; -1 -2 -3]

%     1     2     3
%     3     6     9
%    -1    -2    -3

% Hemos cambiado las filas 2 y 3 para que sean
% múltiplos de la primera.
% Tenemos por tanto rango 1

null(sym(A))

% [-2, -3]
% [ 1,  0]
% [ 0,  1]
```

$\text{Nul}(A) = \{(-2,1,0)\alpha + (-3,0,1)\beta \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
La base del subespacio $\text{Nul}(A)$ es $\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$
Ya que A tiene rango 1 tenemos dos relaciones de dependencia lineal:
$-2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{0}$,
$-3\vec{a}_1 + \vec{a}_3 = \vec{0}$,

P.5 Semanas del 16 y del 23 de octubre

Ejemplo de obtención de base de subespacio generado, ec/s implicitas, y relación/es de dependencia lineal

Ejerc. 3.17 modificado

Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H. Razona la respuesta.

b) A partir de la base B, obtén la/s ec/ecs. implícita/s de H, denotando a las variables de $\mathbb{R}^4$ como x_1, x_2, x_3, x_4.

c1) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 4, -5, -10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

c2) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 8, -10, 10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

d) Añadido: Obtén las relaciones de dependencia lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ es decir, ecuaciones de la forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4 + c_5\vec{v}_5 = \vec{0}$, donde no todos los reales c_i son cero, que permitan despejar los vectores eliminados en el apartado a) como combinación lineal del resto.

Ejerc. 3.20

Sean las bases de $\mathbb{R}^3$:
$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ con $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2$ y $\vec{u}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
y $B' = \{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \vec{u'}_3\}$ con $\vec{u'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{u'}_2 = \vec{e}_2$ y $\vec{u'}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$,
siendo los $\vec{e}_i$ los vectores de la base canónica.
a) Justifica que ambos conjuntos son base.
b) Obtén las coordenadas en la base B' del vector $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$
c) Obtén la matriz de cambio de base de B a B'.
d) Obtén las coordenadas de $\vec{x}$ en la base estándar.

(HVZ12 ejemplo A, pg. 158. Cambiando ligeramente el enunciado y ampliándolo).

Solución 3.17

```
Se usa:
%  para indicar los datos que salen por pantalla
%% para los comentarios en el script


APARTADO a
----------

v1=[1 0 -3 2]'; v2=[0 1 2 -3]'; v3=[-3 -4 1 6]'; v4=[1 -3 -8 7]'; v5=[ 2 1 -6 9]';
S=[v1 v2 v3 v4 v5]
%  1  0 -3  1  2
%  0  1 -4 -3  1
% -3  2  1 -8 -6
%  2 -3  6  7  9
rref(S)
%  1  0 -3  0  4
%  0  1 -4  0 -5
%  0  0  0  1 -2
%  0  0  0  0  0

%% Vemos que las columnas pivotales son 1,2 y 4.
%% Por tanto la base B de H es  B={v1,v2,v4}
%% La dimensión de H es 3, porque la base tiene tres vectores

APARTADO b
----------

syms x1 x2 x3 x4 real
x=[x1 x2 x3 x4]' ;
B=[v1 v2 v3]     ;
Bx=[B x]  % La parte izda. es la base y a la derecha escribimos x simbólico.

% [  1,  0,  1,  x1]
% [  0,  1, -3,  x2]
% [ -3,  2, -8,  x3]
% [  2, -3,  7,  x4]

%% El formato de salida de Bx, con corchetes a los lados y comas
%% separando los elementos, es debido a que Bx es matriz simbolica,
%% al construirse con variables simbolicas.

%% Las tres primeras columnas proporcionan rango 3, pues son base.

%% (x1,x2,x3,x4) pertenece a H si y solo si
%% Bx (con el vector generico añadido a la derecha) no aumenta el rango,
%% es decir, rg(Bx)=3, no pasa a ser 4.

%% Al ser Bx cuadrada podemos usar directamente la condición
%% de que el determinante sea 0 (para que el rango no sea 4).
```

```
det(Bx) %% la expresion resultante igualada a cero es la ec. implicita.

% 10*x1 - 5*x2 + 4*x3 + x4

%% Por tanto la ec implicita es:   10x1 - 5x2 + 4x3 + x4 = 0

%% A=[10 -5 4 1], por tanto la ec. implicita tb la podemos escribir
%% como A x = 0 , con la A dada  (x  vector y 0 también vector)

%% Otra forma (método 2, pg. 75 de las diapositivas)

A=(null( sym(B')))'
% [10 -5 4 1]

APARTADOS c1 y c2
-----------------

syms a real , v=[a 4 -5 -10]'
A*v  %% v pertenece a H si y solo si cumple la ecuación implicita A * v = 0
     %% por tanto A*v ha de ser 0
% 10*a - 50
solve(ans)
% 5             %% a=5

%% PARA OTRO MODELO DE EJERCICIO
v=[a 8 -10 10]'
A*v
% 10*a - 70
solve(ans)
% 7             %% a = 7

APARTADO d
----------

%% Recordemos que la solución de un SL proporciona
%% el conjunto de coeficientes por los que hay que
%% multiplicar las columnas para que la combinación
%% lineal de estas produzca el vector de términos independientes.
%% El apartado d) nos pide calcular los coeficientes
%% que producen el vector 0.

%% null(sym(S)) nos dará las dos soluciones independientes,
%% es decir las dos relaciones de dependencia lineal,
%% independientes entre sí.
%% Sabemos de antemano que tenemos dos soluciones independientes
%% porque en la escalonada reducida de S teníamos dos parámetros libres.
```

```
>> null(sym(S))
% [3, -4]
% [4, 5]
% [1, 0]
% [0, 2]
% [0, 1]

%% Las relaciones de dependencia lineal son:
%%  3 v1 + 4 v2 + v3 = 0
%% -4 v1 + 5 v2 + 2 v4 + v5 = 0

%% De la primera y segunda podemos despejar, respectivamente, los vectores
%% dependientes v3 y v5 como combinación lineal de los vectores de B

%% v3 = - 3 v1 - 4 v2
%% v5 =   4 v1 - 5 v2 - 2 v4
```

Solución 3.20

```
Se usa:    %  para indicar los datos que salen por pantalla
           %% para los comentarios en el script

APARTADO a
----------

u1=[1 0 1]'; u2=[0 1 0]'; u3=[0 1 1]';
B=[u1 u2 u3]

%     1     0     0
%     0     1     1
%     1     0     1

v1=[1 -1 0]'; v2=[0 1 0]'; v3=[2 0 1]';
Bp=[v1 v2 v3]

%     1     0     2
%    -1     1     0
%     0     0     1

%% R3 tiene dimensión 3. Si tengo un conjunto de
%% tres vectores de R3 que sean l.i. es decir
%% de rango 3, entonces el conjunto es base.

rank(B)   %% el resultado 3 confirma que es base
% 3

rank(Bp)  %% el resultado 3 confirma que es base
% 3

APARTADO b
----------
```

```
x_B = [3 2 0]';

x=B*[3 2 0]'  %% también podría calcular  x como [u1 u2]*[3 2]'
              %% ya que el  último sumando de la c.l. tiene coeficiente cero

%  3
%  2
%  3

x_Bp = Bp^-1 * x

%    -3
%    -1
%     3

linsolve(Bp,x)  %% Al ser un SL SCD podría haber utilizado linsolve()
                %% en vez de la expresión anterior Bp^-1*x

%    -3
%    -1
%     3

APARTADO c
----------

%% B a B'  es la composicion de
%% 1º) B a Bcan,   2º) Bcan a B'
%% 1º) B           2º) B'^-1
%%  =>

P = Bp^-1 * B

%    -1     0    -2
%    -1     1    -1
%     1     0     1

%% Comprobación con P del apartado anterior

P*x_B

%    -3
%    -1
%     3

APARTADO d
----------

%% Ya se calcularon en el apartado b.
%% x=(3,2,3)
```

P.6 Semanas del 23 y del 30 de octubre

Aplicaciones lineales

Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla

Ejercicio 4.5 Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:
a) simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}\,x$
b) proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

Considerada la figura con los vértices P, M, Q, R y T dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simetrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = ($, $)$	$P' = ($, $)$
$M = (6, 7)$		
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

Ampliación del ejercicio: Obtén las siguientes tranformaciones lineales adicionales de la figura original:
c) Dilatación de un factor 2.
d) La siguiente composición de aplicaciones: dilatación de un factor 2 y a continuación simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}x$.
e) Giro centrado en el origen, de ángulo 20 grados en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Denota a las matrices obtenidas para las transformaciones a), b), c), d) y e) como As ('s' por simetría), Ap ('p' por proyección), Ad ('d' por dilatación), Acompos y Ag ('g' por giro), respectivamente.

Representación gráfica de los resultados obtenidos en las cinco transformaciones.

> Las funciones de MATLAB de representación gráfica se usan para la mejor comprensión de los contenidos, pero no son materia exigida en la asignatura.

Solución Ejercicio 4.5:

```
% datos = [ 6 6 ; 7 7 ; 8 6 ; 7 5 ; 6 6]'  % que estan en estándar.
                   % se repite el último punto para cerrar la figura
                   % en la representación gráfica

%  S  = [ 1 0 ; 0 -1 ]  % matriz de la simetría referida a su base natural
%  Pr = [ 1 0 ; 0  0 ]  % matriz de la proyección referida a su base natural

%  B = [ 3 1 ; -1 3 ]'  % base natural para la simetría y la proyección
                        % vector de la recta de simetría o de proy. en col 1
                        % vector perpendicular                      en col 2


% Marco teórico:
% A = B*F*inv(B)  % Cambio de base: de matriz F referida a base natural
                  % a matriz A referida a base estándar

                  % Copia de deducción A = B*F*inv(B) de los apuntes:

                  %   Ecuaciones de partida:
                  %     B xB = x  => xB = inv(B)*x
                  %     B yB = y  => yB = inv(B)*y
                  %
                  %     F xB = yB    A x = y
                  %
                  %   A partir de ellas, sustituyendo xB e yB
                  %     F inv(B) x = inv(B) y

                  %     B F inv(B) x =  y      premultiplicando por B
                  %     A = B F inv(B)

% Ejecución:
 datos = [ 6 6 ; 6 7 ; 7 7 ; 8 6 ; 7 5; 6 6 ]'
 B = [ 3 1 ; -1 3 ]'
 S  = [1 0; 0 -1]    ;  Pr = [1 0; 0  0]
 As = B*S*inv(B)       % es la matriz estándar pedida (simetría)
 Ap = B*Pr*inv(B)      % es la matriz estándar pedida (proyección)

 datos_s = As*datos    % los vectores simétricos (las imágenes pedidas)
 datos_p = Ap*datos    % los vectores proyectados (las imágenes pedidas)

% Ejecución para la gráfica
plot([ -9  24] , [ -3  8] , 'k-' )   % recta desde -3*(3,1) hasta 8*(3,1)
                                     % de (-9,-3) a (24,8)
hold on

axis equal  % incrementos de x   y  de y son iguales
plot([0], [0] , '+k')                % cruz negra en el origen (0,0)


% datos(1,:)        % en fila 1    coordenadas x de los vectores
```

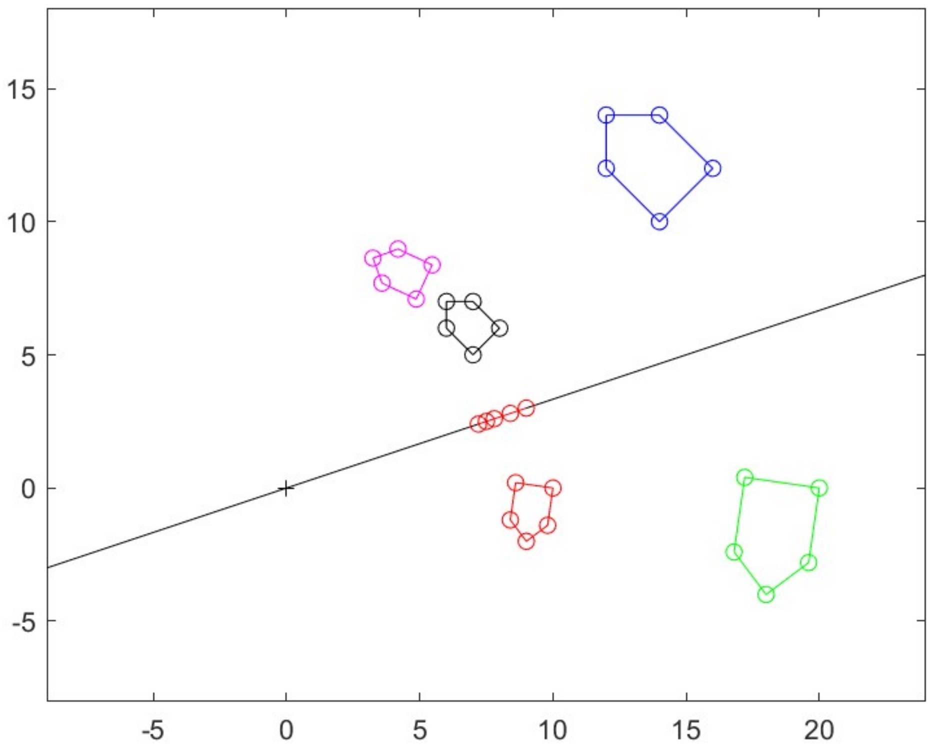
```
% datos(2,:)       % en fila 2    coordenadas y de los vectores

plot(datos(1,:)   , datos(2,:)   , 'ok-')     % original en negro 'k'
plot(datos_s(1,:) , datos_s(2,:) , 'or-')     % transformado en rojo 'r'
plot(datos_p(1,:) , datos_p(2,:) , 'or-')     % transformado en rojo 'r'
saveas(figure,'figura_ejerc_4_5_ab.jpg')


datos =
     6     6     7     8     7     6
     6     7     7     6     5     6

B=
     3    -1
     1     3

S =
     1     0
     0    -1

Pr =
     1     0
     0     0

As =
    0.8000    0.6000
    0.6000   -0.8000

Ap =
    0.9000    0.3000
    0.3000    0.1000

datos_s =
    8.4000    9.0000    9.8000   10.0000    8.6000    8.4000
   -1.2000   -2.0000   -1.4000    0.0000    0.2000   -1.2000

datos_p =
    7.2000    7.5000    8.4000    9.0000    7.8000    7.2000
    2.4000    2.5000    2.8000    3.0000    2.6000    2.4000


% datos_s'  y datos_p' nos daran  las coordenadas (x,y) de cada punto
% para cubrir, respectivamente, las columnas 2 y 3 de la tabla.

datos_s'

    8.4000   -1.2000
    9.0000   -2.0000
    9.8000   -1.4000
   10.0000    0.0000
    8.6000    0.2000
    8.4000   -1.2000
```

```
datos_p'

    7.2000    2.4000
    7.5000    2.5000
    8.4000    2.8000
    9.0000    3.0000
    7.8000    2.6000
    7.2000    2.4000
```

Añadimos al fichero .m las transformaciones lineales c), d) y e)

```
% Ad = 2*eye(2)  % Matriz estándar de la dilatación de factor 2.
                 % eye(2) es la matriz identidad de orden 2.
                 % Ad es la matriz asociada respecto de cualquier base.
                 % Demostración: Supuesto que en cierta base F=2*eye(2)
                 % A = B * F * inv(B) = B * 2*eye(2) * inv(B) =
                 % 2 * B*inv(B) = 2 * eye(2)

% Acompos = As * Ad   % Matriz estándar: primero dilatación y despues simetría
                      % Nótese que en este caso el orden es indiferente.

% a = 20         % ángulo de 20 grados (degrees)

% Matriz estándar de giro 20 grados en sentido positivo,
% es decir, contrario al de las agujas del reloj o antihorario


% Ag = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]  % 'd' para ángulo en grados

                 % Se aplicaría la misma fórmula, pero a=-20, si el giro pedido
                 % fuera en el sentido de las agujas del reloj
% Ejecución

Ad      = 2*eye(2)
Acompos = As * Ad

a = 20   ; Ag = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]

datos_d      = Ad*datos       % dilatación aplicada a figura original

datos_compos = Acompos*datos  % dilat. y después simetría aplicada a fig. original

datos_g      = Ag*datos       % giro aplicado a figura original


plot(datos_d(1,:), datos_d(2,:), 'ob-')           % dilatación           color azul
plot(datos_compos(1,:), datos_compos(2,:), 'og-') % 1º) dil. 2º) simetr. color verde
plot(datos_g(1,:), datos_g(2,:), 'om-')           % giro                 color magenta
saveas(figure(1),'figura_ejerc_4_5_abcde.jpg')
```

```
Ad =
     2     0
     0     2

Acompos =
    1.6000    1.2000
    1.2000   -1.6000

a =
   20

Ag =
    0.9397   -0.3420
    0.3420    0.9397

datos_d =
    12    12    14    16    14    12
    12    14    14    12    10    12

datos_compos =
   16.8000   18.0000   19.6000   20.0000   17.2000   16.8000
   -2.4000   -4.0000   -2.8000    0.0000    0.4000   -2.4000

datos_g =
    3.5860    3.2440    4.1837    5.4654    4.8677    3.5860
    7.6903    8.6300    8.9720    8.3743    7.0926    7.6903
```



Ejercicio 4.9 Dada la aplicación lineal f en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtén la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1,-1,0),(-2,1,1),(1,1,1)\}$.

S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Ed. 9. Pearson 2015. Pg. 212. Ejemplo 2.

Añadido: Comprueba los tres invariantes: determinante, rango y traza.

```
A=[2 2 0; 1 1 2; 1 1 2]

% La relación entre la matriz A asociada a la base canónica y
% la matriz F asociada a la base B, viene dada por la ecuación  A = B*F*B^-1
% Podemos despejar F como,  F=B^-1*A*B, y ese es el resultado

B=[1 -1 0; -2 1 1; 1 1 1]'
F = B^-1*A*B
```

```
A =
     2     2     0
     1     1     2
     1     1     2

B =
     1    -2     1
    -1     1     1
     0     1     1

F =
         0         0         0
         0    1.0000   -0.0000
         0         0    4.0000
```

El resultado pedido es esta matriz F.

Conservación de los invariantes

```
[ det(A)    det(F)   ]
[ rank(A)   rank(F)  ]
[ trace(A)  trace(F) ]
```

```
ans =
     0     0

ans =
     2     2

ans =
     5     5
```

Observamos que determinante, rango y traza de las matrices relativas a las dos bases tienen los mismos valores.

P.7 Semana del 6 de noviembre

Tema 5. Autovalores, autovectores y diagonalización

Ejemplo 9 ampliado

```
A= [3 2; 3 -2] ;  n=2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Obtención de los autovalores
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

syms a
                        %% | A - a I |  es el polinomio caracteristico de A
                        %% Queremos determinar todas las raíces del polinomio, es decir
                        %% tanto las reales como las complejas,
                        %% por lo que no añadimos la opción
                        %% 'real' en la expresión 'syms a'

a=solve(det(A-a*eye(2)))  %% La salida contiene todas las raíces del pol. característico.

                        %% Serán n raíces en total
                        %%   si hay raíces complejas aparecerá cada una con su conjugado
                        %%   las raíces reales son los autovalores
                        %%     si sólo hay un autovalor diferente, lo llamamos lambda
                        %%     si hay varios autovals diferentes:  lambda1, lambda2, etc
                        %% en MATLAB preferimos llamarlos  a1, a2, etc

%  -3
%   4

%% Los autovalores son -3 y 4, ambos de multiplicidad algebraica 1

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Obtención de una base de cada subespacio propio
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Hay dos subespacios propios, el asociado a -3, y el asociado a 4

Bmenos3=null(sym(A-(-3)*eye(n)))  %% Las cols de la salida nos dan una base B de V(-3).
                                  %% Es decir una base de las soluciones del SL  A x = -3 x
                                  %% que es el mismo SL que    (A - (-3) I) x = 0

                    %% si, estando A bien copiada, el resultado es que no existe base,
                    %% entonces el "valor -3" dado no corresponde a un autovalor, porque la
                    %% dim de un subesp. propio siempre es como mínimo 1.

% -1/3
%   1

%% Podríamos tomar como base de este subespacio propio {(-1,3)} si queremos evitar denominadores.

B4=null(sym(A-4*eye(n)))      %% las cols de la salida nos dan una base B de V(4).
                              %% Es decir una base de las soluciones del SL  A x = 4 x
                              %% que es el mismo SL que   (A - 4 I) x = 0

% 2
% 1

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Existencia o no de base de R2 formada por autovectores de A
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% Por comodidad
b1=Bmenos3*3 ; b2=B4 ;

%% Es un resultado general que la unión de las bases de los distintos subespacios propios es
%% un conjunto linealmente independiente.

B=[b1 b2]
% [ -1, 2]
% [  3, 1]

rank(B)  %% confirmamos que la unión es l.i.
% 2

%% Al tener dos autovectores l.i. tenemos B={b1,b2} %% base de R2 formada por autovectores de A.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Comprobación de los autovectores, cada uno con su autovalor
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A*b1 - (-3)*b1   %% comprob. de que A*b1 = -3 b1
A*b2 -    4*b2   %% comprob. de que A*b2 =  4 b2

% 0
% 0

% 0
% 0

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Diagonalización
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% La matriz de la aplicación lineal respecto a la base B de R2, formada por autovectores,
%% es la matriz D cuyos elementos son los autovalores en el mismo orden
%% en el que aparecen los correspondientes autovectores en la base B.

D=diag([-3 4])

% [-3, 0]
% [ 0, 4]

%% La razón es que:
%%     f(b1) = -3*b1   por tanto f(b1) = -3 b1 + 0 b2 , y de ahí la primera columna  [-3 0]'
%%     f(b2) =  4*b2   por tanto f(b2) =  0 b1 + 4 b2 , y de ahí la segunda columna  [ 0 4]'

%% D es la matriz asociada a la base B
%% de la misma forma que A es la asociada a la base canónica.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Comprobación de A = B D B^-1 en la forma más sencilla AB = BD
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A*B

% [ 3, 8]
% [-9, 4]

B*D

% [ 3, 8]
% [-9, 4]
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Comprobación de los invariantes
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[trace(A) trace(D)]
[det(A)   det(D)]
[rank(A)  rank(D)]

%   1     1
% -12   -12
%   2     2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Interpretación geométrica del endomorfismo f, representado por A
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% La transformación lineal deja invariante la recta  r: <(-1,3)>, ya que los vectores de la recta
%% permanecen en la recta. f(r) = r
%% Los vectores no permanecen fijos en ella, sino que cada uno se transforma en -3 veces él mismo.
%% Los vectores sólo estarían fijos si el autovalor fuera el 1.

%% Lo mismo sucede con la recta s: <(2,1)>. Los vectores se transforman en 4 veces ellos mismos, y
%% f(s) = s

%% Todos los vectores que están fuera de alguna de las dos rectas sufren un cambio de dirección
%% en la transformación, ya que no son vectores propios.

%% Utilizando como sistema de referencia la base B={(-1,3),(2,1)}, la matriz asociada a f
%% queda muy sencilla,  D=[-3 0; 0 4].
%% Las coordenadas xB=(alpha,beta) del vector original simplemente se transforman en
%% yB=(-3*alpha,4*beta) en el vector transformado.
```

Ejemplo 11. Estudia si son diagonalizables las siguientes matrices. En caso afirmativo obtén B invertible y D diagonal tales que $X = BDB^{-1}$, siendo X la matriz dada, y presenta la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

```
%% Pide determinar si la transformación es diagonalizable.

%% Lo será si todas las raíces del polinomio característico son reales,
%% y si ninguno de los autovalores es defectivo.
%% Esta segunda condición significa que todos los autovalores cumplen que su multiplicidad
%% algebraica coincide con la dimensión del subespacio propio.

%% En ese caso existirá base B de R3 formada por autovectores
%% y esa es la matriz B que se pide, y D será la matriz diagonal que
%% tiene en la diagonal principal los autovalores correspondientes en el mismo orden.

%% Primera transformacion lineal:
%% -----------------------------

A=[2 0 0; 0 4 0; 1 0 2]
syms a
solve(det(A-a*eye(3)))

% A =
%     2     0     0
%     0     4     0
%     1     0     2

% 2
% 2
% 4

%% Las tres raíces son reales, y por tanto autovalores,
%% por lo que se cumple la primera condición de la diagonalización.
%% Los autovalores son lambda=2 doble y lambda=4 simple.

%% La segunda condición es que para los autovalores múltiples
%% dim Vlambda = multiplicidad de lambda.
%% Tenemos lambda=2 doble, por tanto dim V(2) ha de ser 2.

a1=2; B1=null(    sym( A-a1*eye(3) ) );
%     0
%     0
%     1

%% Este subespacio no aporta dos vectores l.i., es decir dim Vlambda no es igual a 2
%% => no existe base de R3 formada por autovectores de A y A no es diagonalizable.


%% Segunda transformación lineal:
%% -----------------------------

%% Estudiamos ahora la matriz T del enunciado
A = [ 2 0 0 ; -1 4 0; -3 6 2]    %% volvemos a llamar A a la matriz
solve(det(A-s*eye(3)))

% A =
%     2     0     0
%    -1     4     0
%    -3     6     2
```

```
% 2
% 2
% 4

%% De nuevo tenemos tres autovalores, y tenemos que comprobar la dimensión del
%% subespacio propio correspondiente a lambda=2, que tiene multiplic. algebraica 2.

a1=2; B1=null(    sym( A-a1*eye(3) ) );
%     2     0
%     1     0
%     0     1

%% Este subespacio aporta los dos autovectores l.i. necesarios =>
%% existe base de R3 formada por autovectores de A, y por tanto A es diagonalizable.

%% Se pide determinar B invertible y D diagonal tales que A = B D B^-1

%% B ha de tener como columnas una base de R3 de autovectores
%% D los autovalores correspondientes en su orden.

a2=4; B2=null(    sym( A-a2*eye(3) ) );
% 0
% 1/3
% 1

%% B={(2,1,0),(0,0,1),(0,1/3,1) }  es la base de R3 formada por autovectores de A


B=[B1 B2]            %% Es la matriz B pedida

D=diag([2 2 4])      %% Es la matriz D pedida

% B =
% [ 2,  0,   0]
% [ 1,  0, 1/3]
% [ 0,  1,   1]

% D =
%     2     0     0
%     0     2     0
%     0     0     4


%% comprobamos A*B = B*D, aunque no lo pide el ejercicio.

A*B
B*D

%% Ambos productos dan el siguiente resultado:
% [ 4, 0,   0]
% [ 2, 0, 4/3]
% [ 0, 2,   4]

%% Lo anterior es suficiente comprobación, pero a modo de repaso puedes
%% comprobar también que:
%%
%%     el primer autovector se transforma en 2 veces él mismo.
%%     el segundo en 2 veces él mismo.
%%     el tercero en 4 veces él mismo.

%% A*B(:,1)-s1*B(:,1)
```

```
0
0
0

%% A*B(:,2)-s1*B(:,2)

0
0
0

%% A*B(:,3)-s2*B(:,3)

0
0
0
```

P.8 Semana 13 de noviembre

Tema 6. Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

Ejemplo 8. a) Encuentra la ecuación implícita del plano de E_3 que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 3, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$. b) Obtén el centro geométrico de los tres puntos y comprueba que se encuentra sobre el plano.

Solución de Ejemplo 8

```
P=[1 2 1]'; Q=[-2 3 -1]'; R=[1 0 4]';

PQ=Q-P; PR=R-P;

syms x y z real;  %% Declaramos las variables porque las necesitamos
                  %% para la expresión de la ec. implícita

X=[x y z]'

%% ------------------------------------------------------------------
%% Ec. implícita del plano a partir de la condición de ortogonalidad
%% ------------------------------------------------------------------

n=cross(PQ,PR) %% cross(a,b) obtiene el producto vectorial a x b

% -1
%  9
%  6

dot( X-P ,n) %% dot(a,b) obtiene el producto escalar a.b

% -x + 9 y + 6 z - 23

%% El producto escalar anterior igualado a cero es la ec. implicita
%% -x + 9 y + 6 z - 23 = 0   o  -x + 9 y + 6 z = 23

%% ------------------------------------------------------------------
%% Ec. implícita del plano utilizando el determinante
%% ------------------------------------------------------------------

det([X-P , PQ, PR])


%% El determinante anterior igualado a cero es la ec. implícita
%% -x + 9 y + 6 z - 23 = 0   o  -x + 9 y + 6 z = 23
```

```
%% ------------------------------------------------------------------
%% Centro geométrico o punto medio o centroide de P, Q, R
%% Este punto es el baricentro del triángulo,
%% que es el punto donde se cortan las medianas
%% ------------------------------------------------------------------

B=1/3*(P+Q+R)

%      0
%     1.6667
%     1.3333

%% ------------------------------------------------------------------
%% Comprobación de que P,Q,R y B cumplen la ec. implícita.
%% La comprobación de que tres de los puntos la cumplen confirma
%% que la ec. implícita obtenida es correcta.
%% ------------------------------------------------------------------

%% La ec. implícita es (nx,ny,nz).(x,y,z) = 23

%% Una posible forma de confirmación es obtener   n' * [P Q R B]
%% El resultado tiene que ser [23 23 23 23]

n' * [P Q R B]

% 23    23    23    23
```

P.9 Semana 20 de noviembre

Tema 5. Autovalores, autovectores y diagonalización

Ejemplo 11 con la función de MATLAB eig()

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
primera matriz a estudiar
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A = [2 0 0; 0 4 0; 1 0 2];
[ B D ] = eig(sym(A)) % La segunda matriz, D, es una matriz diagonal con las raíces de
                      % |A-lambda I| en la diagonal principal. Si todas las raíces
                      % son reales, entonces D es la matriz de autovalores.
                      % La primera matriz, B, tiene tantas columnas como autovectores l.i.
                      % existan, y cada columna es un autovector, estando éstos ordenados
                      % en el mismo orden en el que sus autovalores asociados aparecen
                      % en D.

% B =
% [0, 0]
% [1, 0]
% [0, 1]

% D =
% [4, 0, 0]
% [0, 2, 0]
% [0, 0, 2]

% La matriz no es diagonalizable. Todas las raíces del polinomio característico
% son reales, pero el autovalor de multiplicidad 2 sólo aporta un autovector en B.

% La base del subespacio propio V(4) es {(0,1,0)}   dim=1
% La base del subespacio propio V(2) es {(0,0,1)}   dim=1


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
segunda matriz a estudiar
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A = [ 2 0 0 ; -1 4 0; -3 6 2];
[ B D ] = eig(sym(A))

% B =
% [  0, 2, 0]
% [1/3, 1, 0]
% [  1, 0, 1]

% D =
% [4, 0, 0]
% [0, 2, 0]
% [0, 0, 2]

% La matriz es diagonalizable. Todas las raíces del polinomio característico
% son reales, y el autovalor de multiplicidad 2  aporta 2 autovectores en B.

% La base del subespacio propio V(4) es {(0,1/3,1)}         dim=1
% La base del subespacio propio V(2) es {(2,1,0),(0,0,1)}   dim=2
```

```
% Hay que tener cuidado al usar eig() en modo numérico (no simbólico), ya que
% puede dar como resultado una matriz B con columnas que no sean l.i.

% En la primera matriz por ejemplo:

A = [2 0 0; 0 4 0; 1 0 2];
[B D] = eig(A)

% B =
%          0    0.0000         0
%          0         0    1.0000
%     1.0000   -1.0000         0

% D =
%      2     0     0
%      0     2     0
%      0     0     4

det(B)  % ans 4.4409e-16

% Las dos primeras columnas de B son l.d., por tanto la matriz
% no es diagonalizable.
% Aparece el segundo autovector por errores de redondeo.

% En la segunda matriz :

A = [ 2 0 0 ; -1 4 0; -3 6 2];
[B D]=eig(A)

% B =
%          0         0    0.8944
%          0    0.3162    0.4472
%     1.0000    0.9487         0

% D =
%      2     0     0
%      0     4     0
%      0     0     2

det(B)  % -0.2828

% En este caso B es efectivamente matriz invertible, y la matriz A
% considerada sí es diagonalizable.


% CONCLUSIÓN: Debemos calcular siempre el determinante de la B obtenida
% para confirmar que tenemos base de Rn formada por autovectores.
```

Tema 6. Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

Ejercicio 1, ampliado y modificados ligeramente los datos. Para el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 2.5)$ y $C = (-3, 6.5)$, obtén:
a) Los ángulos interiores en A, B y C.
b) El perímetro.
c) El área.
d) El centro geométrico, centroide o baricentro.
e) El cuarto vértice del paralelogramo de vértices consecutivos CAB.
f) Un vector bisector en el vértice A (vector que divida el ´angulo interior en A en dos partes iguales).

Este ejercicio es muy similar al Ejercicio 1 de los apuntes de este tema. La diferencia es la inclusión aquí del apartado f), y el cambio de datos. ($A = (1, 1), B = (5, 3), C = (-3, 7)$) en los apuntes).

Sol.:
Las instrucciones de MATLAB, incluidos los comentarios, están escritos en azul, y las salidas en rojo.

a) Ángulos.

```
% Introducimos los datos que son las coordenadas de los tres vértices A, B, C y
% seguidamente determinamos los vectores AB, AC, BC

 A=[1 1]'; B=[5 2.5]'; C=[-3 6.5]';  % introducidos como vectores columna
 AB=B-A   ,   AC=C-A  , BC=C-B


AB =
    4.0000
    1.5000
AC =
   -4.0000
    5.5000
BC =
    -8
     4


% tomamos AB y AC para calcular el ángulo en el vértice A

 angA=acosd(dot(AB,AC)/norm(AB)/norm(AC));

% dot( , )  es el producto escalar de los vectores que aparecen como argumentos
% norm(  )  es la norma o longitud del vector
% acosd( )  es el arcocoseno en grados

% tomamos BA y BC para obtener con el mismo procedimiento el ángulo en B
% (BA=-AB)

 angB=acosd(dot(-AB,BC)/norm(AB)/norm(BC));

% tomamos CA y CB para obtener el ángulo en vértice C (CA=-AC , CB=-BC)

 angC=acosd(dot(-AC,-BC)/norm(AC)/norm(BC));

[ angA  angB angC]   % Pedimos que los valores de los ángulos se muestren como
                     % una fila para ahorrar espacio.
  105.4713   47.1211   27.4076


angA + angB + angC  - 180   % Este resultado deber salir 0, como comprobación
                            % de que la suma de los ángulos es 180
```

```
0
```

b) Perímetro.

```
peri=norm(AB)+norm(BC)+norm(AC)

20.0170
```

c) Área.

```
% Situamos el triángulo en el plano XY de R3, añadiendo a los vértices
% la coordenada z=0
% Hallamos el área a partir de la norma del producto vectorial de los vectores
% AB3, AC3, siendo AB3, AC3 los vectores AB, AC, pero considerados no sobre R2
% sino sobre el plano XY de R3.
% Es necesario hacerlo así ya que el producto vectorial es una operación en R3

AB3 = [AB ; 0] % extendemos el vector col. AB con una tercera coord. igual a 0
AC3 = [AC ; 0] % extendemos el vector col. AC con una tercera coord. igual a 0
area=1/2*norm(cross(AB3,AC3))

% cross( , )  producto vectorial de los vectores que aparecen como argumentos

AB3 =
    4.0000
    1.5000
         0
AC3 =
   -4.0000
    5.5000
         0
area =
    14
```

d) Centroide

```
cen= 1/3*(A+B+C)

    1.0000
    3.3333
```

e) El cuarto vértice, D, del paralelogramo de vértices consecutivos CAB.

```
AD = AB+AC       % AB+AC  es el vector AD.
D = A + AD       % D es igual a A + el vector AD
                 % También se puede entender así: OD = OA + AD

AD =
     0
     7

D =
     1
     8
```

f) Un vector bisector en el vértice A.

```
% El ángulo en A se obtuvo en un apartado anterior.
% En este apartado obtendremos un vector con origen en A que divide el ángulo
% anterior en dos partes iguales, o lo que es lo mismo, que forma el mismo ángulo
% con AB y con AC

v=AB/norm(AB)+AC/norm(AC)  % es necesario tomar los vectores en las orientaciones
                           % AB y AC con la misma longitud, porque solo así
                           % la suma de los vectores da como resultante un vector
                           % que divide el ángulo en A en partes iguales.
v =
    0.3482
    1.1599
```

P.10 Semana 27 de noviembre

Ejemplo 11. Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

a) Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto: $\vec{v} = (17\ mg\ de\ vitamina\ C, 54\ mg\ de\ calcio, 31\ mg\ de\ magnesio)$

b) Determina el aporte más cercano al aporte exacto que se podría conseguir combinando los dos alimentos.

```
% a)
format rat
a1=[1 5 3]'    % distribución de nutrientes en el alimento A
a2=[1 2 1]'    % distribución de nutrientes en el alimento B
v=[17 54 31]'  % objetivo de distribución de nutrientes

%  v se puede obtener por combinación lineal de {a1,a2} si el sistema lineal
%  [a1 a2 | v ] es compatible.
%  Haría falta además que en la solución encontrada (x,y) ninguno de los dos
%  reales fuera negativo.

%  a1 =
%        1
%        5
%        3

%   a2 =
%        1
%        2
%        1

%   v =
%       17
%       54
%       31

% Es obvio que [a1 a2] tiene rango 2, pues los vectores no son uno múltiplo del otro.
% Confirmación:

rank([a1 a2])    % ans = 2

% Si rango de [a1 a2 v] es 3 quedará demostrado que v no puede obtenerse combinando
% las dos clases de alimento.

rank([a1 a2 v])  % ans = 3

% b) El aporte más cercano es la proyección ortogonal de v sobre W=<a1 a2>.
% Llamamos a este vector vproy.

% Método 1
% --------
% Lo obtendremos mediante el método descrito en la Sección 4, descomponiendo el espacio
% principal R3 como suma de W + Wco (Wco es el complemento ortogonal de W
```

```
W=[a1 a2]

% dim(Wco) = 3 - 2 = 1
% La base {n} de Wco está formada por un vector n que sea a la vez
% ortogonal a a1 y a a2.

n=null(sym(W'))  % las columnas son la base de W_co

%  1/3
% -2/3
%   1

a1'*n                % ans= 0   comprobación de que n es ortog a a1
a2'*n                % ans= 0   comprobación de que n es ortog a a2

B=[a1 a2 n]          % Es base de R3, con los dos primeros vectores
                     % en W y el tercero en el compl. ortog. de W.

% [1, 1,  1/3]
% [5, 2, -2/3]
% [3, 1,    1]

% [a1 a2 n | v ]      % Resolviendo el SL compatible determinado con esta
                      % matriz ampliada, obtendremos  sol=(alpha,beta,gamma)

sol = linsolve(B, v) % función para resolver un SCD

% sol =
% 48/7
%  10
% 3/7

vproy = sol(1)*a1 + sol(2)*a2     % sol tiene 3 entradas, sol(i) es la entrada i

% vproy =
% 118/7
% 380/7
% 214/7

double(vproy)   % para pasar a formato decimal

% ans =
%      16.8571
%      54.2857
%      30.5714

% En este ejercicio la base de Wco también se podría haber
% obtenido mediante el producto vectorial de a1 por a2
n2 = cross(a1,a2)

% ans =
%    -1
%     2
%    -3

% Este vector n2 normal al plano no coincide con el vector n determinado
más arriba, aunque obviamente sí es proporcional.
```

```
% La base B sería entonces [a1 a2 n2]
% El vector vproy resultante será obviamente el mismo.


% Nótese que si estuvieramos por ejemplo en R4, con dim W =2,
% tendríamos dos vectores en el complemento ortogonal n, o, y el
% SL a resolver sería [a1 a2 n o | v ], siendo de nuevo la proyección
% vproy=sol(1)*a1 + sol(2)* a2


% Método 2a:
% ---------
% Procedimiento de la sección 5.
% Teniendo en cuenta que R3 = W + Wco, con dimensiones respectivas 2 y 1,
% lo que haremos es calcular en primer lugar la proyección de v sobre Wco (dimensión d=1),
% que llamaremos z, y seguidamente obtendremos  vproy = v - z .
% De esta forma nos evitamos calcular de forma directa la proyección sobre W (dimensión d=2).

z = dot(v,n)/dot(n,n)*n   ,  vproy=v-z

%  1/7
% -2/7
%  3/7

% 118/7
% 380/7
% 214/7


% Método 2b:
% ---------
% Determinaremos una base ortogonal de W (d=2) y aplicaremos la fórmula de la proyección
% de un vector sobre dicho subespacio, que requiere conocer una base ortogonal del
% subespacio.
% En este caso dim W=2, por tanto
% vproy = dot(v,b1)/dot(b1,b1)*b1 + dot(v,b2)/dot(b2,b2)*b2 ,
% siendo {b1, b2} base ortogonal de W.

% La base ortogonal de W la obtendremos con la función orth().
% orth() devuelve, de hecho, una base ortonormal.

Worton=orth(W)
%   -0.2042    0.9417
%   -0.8446   -0.0314
%   -0.4950   -0.3348

Worton'*Worton          % Comprobación de que la base es ortonormal
                        % (U'*U = I  en matrices U cuyas cols. son base ortonormal del
                        % subespacio generado por ellas)

%    1.0000   -0.0000
%   -0.0000    1.0000

u1=Worton(:,1) ;  u2=Worton(:,2)
vproy=dot(v,u1)*u1+dot(v,u2)*u2   % Al haber tomado una base ortonormal no es necesario
                                  % escribir los denominadores  dot(ui,ui) (su valor es 1).
```

```
%   16.8571
%   54.2857
%   30.5714

% La fórmula usada es válida para cualquier base ortonormal u ortogonal de W
% (si no es ortonormal hay que incluir los denominadores dot(bi,bi) ).

% Como ya hemos visto más arriba, orth() devuelva directamente base ortonormal.


% Método 3. Matriz de proyección usando una de estas formas:
% ----------------------------------------------------------

% Ap1 = B*inv(B'*B)*B'            con B base de W                B=[a1 a2]
% Ap2 = B*B'                      con B base ortonormal de W     B=[u1 u2 ]

% Ap3 = B*diag([1 1 0])*inv(B)    A partir de su conocida forma diagonal respecto
%                                 de la base natural B=[a1 a2 n] de autovectores.

B = [ a1 a2 ]  ; Ap1 = B*inv(B'*B)*B'

U = [ u1 u2 ]  ; Ap2 = U*U'

B = [ a1 a2 n] ; Pr=diag([1 1 0]); Ap3 = B *  Pr * inv(B)

Ap1 =
    0.9286    0.1429   -0.2143
    0.1429    0.7143    0.4286
   -0.2143    0.4286    0.3571

Ap2 =
    0.9286    0.1429   -0.2143
    0.1429    0.7143    0.4286
   -0.2143    0.4286    0.3571

Ap3 =
    [13/14, 1/7, -3/14]
    [  1/7, 5/7,   3/7]
    [-3/14, 3/7,  5/14]

% El último formato queda simbólico por haber usado "sym" al calcular n.

vproy=Ap1*v   % el mismo formato de resultado para Ap2*v
% vproy =
%   16.8571
%   54.2857
%   30.5714

Ap3*v
% 118/7
% 380/7
% 214/7

double(ans)
%   16.8571
%   54.2857
%   30.5714
```

P.11 Semana 4 de diciembre

Tema 7. Espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$

<u>Resolución aproximada de sistemas lineales incompatibles. Método de mínimos cuadrados</u>

Partimos de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, incompatible, con $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_m]$. El hecho de que el SL sea incompatible significa que $\vec{b}$ no es combinación lineal de las columnas de A, es decir,

$\vec{b}$ no pertenece a $<\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_m\ >= \text{Col}A$.

Aunque no podemos resolver el SL $A\vec{x} = \vec{b}$, sí tiene solución el SL $A\vec{x} = \hat{\vec{b}}$, siendo $\hat{\vec{b}}$ la proyección ortogonal de $\vec{b}$ sobre $<\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_m\ >$.

Al ser $\hat{\vec{b}}$ la mejor aproximación de $\vec{b}$ para la que existe solución, o dicho de otra forma, el vector más cercano a $\vec{b}$ para el que existe solución, llamamos a la solución del nuevo SL compatible $\boxed{A\ \vec{x} = \hat{\vec{b}}}$ solución o aproximación de mínimos cuadrados del sistema incompatible.

Seguidamente veremos cómo obtener en la práctica la solución de mímimos cuadrados $\vec{x}$, limitándonos al caso en el que las <u>columnas de A son conjunto l.i.</u>, o lo que es lo mismo, en el que las columnas de A forman base de Col$A$. Este es por tanto el caso en el que la solución de mínimos cuadrados es única.

El siguiente desarrollo lo puedes encontrar también en el enunciado del Ejercicio 3 del Tema 7.

$A\vec{x} = \hat{\vec{b}}, \qquad \hat{\vec{b}} = \text{proy}_{\text{Col}A}\vec{b} = A(A^tA)^{-1}A^t\,\vec{b}$

Por tanto $A\vec{x} = A(A^tA)^{-1}A^t\,\vec{b}, \quad A\vec{x} - A(A^tA)^{-1}A^t\,\vec{b} = \vec{0}$

Sacando factor común A tenemos: $\quad A(\vec{x} - (A^tA)^{-1}A^t\vec{b}) = \vec{0}$,

Acabamos de obtener la ec. de un SLH en el que las cols. de la matriz de coeficientes A son l.i., por tanto la única solución posible es la trivial $\vec{0}$.

$\vec{x} - (A^tA)^{-1}A^t\vec{b} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = (A^tA)^{-1}A^t\vec{b}$

Finalmente, podemos reescribir la ec. anterior como:

$$\boxed{A^t\ A\ \vec{x} = A^t\ \vec{b}}$$

Esta ecuación se conoce como **"Las ecuaciones normales"** del problema de mínimos cuadrados.

Resolviendo este sistema obtenemos $\vec{x}$.

Error cuadrático medio del ajuste: Norma al cuadrado de $\vec{b} - \hat{\vec{b}}$ dividido entre el número de puntos n.

Ejemplos 14 y 15. Considera el siguiente conjunto de datos (x, y):

(0,1), (3,4), (6,5)

Ejemplo 14: Obtén el polinomio interpolador para estos datos.

Ejemplo 15: Obtén el mejor ajuste por mínimos cuadrados de los datos mediante una función lineal.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CON POLINOMIO DE GRADO 2 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Vemos que x1,x2,x3 son los tres distintos. Por tanto existe un polinomio
% de orden 3-1=2, único, que pasa por los tres puntos.

% El polinomio es  a0+a1*x+a2*x^2
% Calcularlo es obtener los coeficientes a0,a1,a2

% Los 3 puntos cumplen, concretamente y conjuntamente, estas ecuaciones:

% a0 + a1 0 + a2 * 0^2 = 1
% a0 + a1 3 + a2 * 3^2 = 4
% a0 + a1 6 + a2 * 6^2 = 5

% que podemos reescribir así:

% 1 *a0 + 0 *a1 + 0^2 *a2 = 1
% 1 *a0 + 3 *a1 + 3^2 *a2 = 4
% 1 *a0 + 6 *a1 + 6^2 *a2 = 5

% Vemos que la matriz de coeficientes es
% 1  0   0
% 1  3   3^2
% 1  6   6^2
% Es la denominada matriz de Vandermonde para [0 3 6]
% Este tipo de matrices son invertibles siempre que los números [ ... ] sean
% todos distintos entre sí.

% Al ser la matriz de coeficientes invertible, el SL es SCD, por tanto a0,a1,a2
% son solución y única.

format rat, A = [ 1 1 1 ; 0 3 6 ; 0 9 36 ]' ,  ydatos =  [ 1 4 5 ]'
%    1    0     0
%    1    3     9
%    1    6    36

%     1
%     4
%     5

rref([A ydatos])
%       1       0       0        1
%       0       1       0       4/3
%       0       0       1      -1/9

%    p(x) = 1 + 4/3 x - 1/9 x^2     Este es el polinomio interpolador

% Comprobamos a continuación que el error cuadrático medio es cero,
```

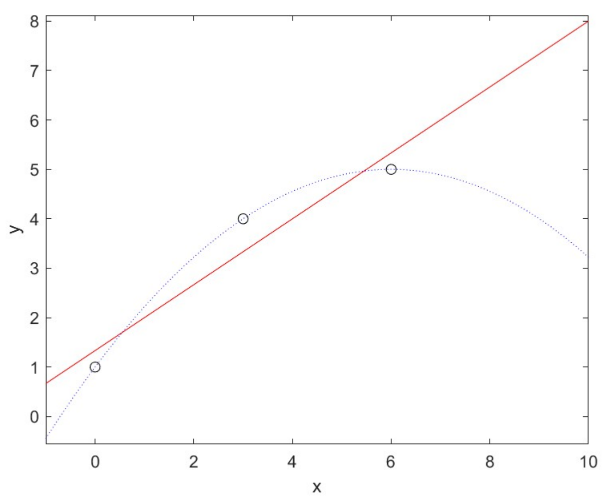
```
% ya que los puntos cumplen exactamente el modelo.

syms x
p2 = 1 + 4/3 *x - 1/9* x^2 ;
ymodelo(1) = subs(p2,x,0)   ;
ymodelo(2) = subs(p2,x,3)   ;
ymodelo(3) = subs(p2,x,6)   ;
ydatos'
% 1     4     5
ymodelo
% [1, 4, 5]                         % son iguales, como era de esperar.

mse=1/3*norm(ydatos-ymodelo')       % mean squared error (error cuadrático medio)
% 0

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CON POLINOMIO DE GRADO 1 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Una función lineal es un polinomio de grado 1
% La forma es   a0 + a1*x

% Las ecuaciones son:

% a0 + a1 0 = 1
% a0 + a1 3 = 4
% a0 + a1 6 = 5

% O:

% 1 *a0 + 0 *a1  = 1
% 1 *a0 + 3 *a1  = 4
% 1 *a0 + 6 *a1  = 5

% El SL puede ser, dependiendo del término independiente, incompatible o compatible
% determinado. En el primer caso ninguna recta pasará por los tres puntos,
% en el segundo pasará una, porque los puntos están alineados.

% Lo resolveremos por el método de mínimos cuadrados, es decir, resolveremos el SL con la
% misma matriz de coeficientes y como vector a la derecha la proyección de [1 4 5]'
% sobre el subespacio generado por {(1,1,1), (0,3,6)}.
% Si [1 4 5]' perteneciera a ese subespacio el vector coincide con su proyección, por lo que
% la solución de mínimos cuadrados encontrada es la solución verdadera.

% Resolvemos aquí este ejercicio por dos procedimientos.
%  1) Obteniendo la matriz de proyección, el vector proyectado, y
%     resolviendo el nuevo SL
%  2) Resolviendo directamente las ecuaciones normales.

% 1)
A = [1 1 1; 0 3 6]'   % Esta es la matriz de coeficientes del SL que tendremos que resolver.
                      % Y a la vez las columnas son la base del subespacio sobre el que tenemos
                      % que proyectar el vector [1 4 5]'

%    1    0
%    1    3
%    1    6
```

```
% Calculamos ahora la matriz de proyección Apr

Apr = A*(A'*A)^-1*A'  ;  % Mediante la fórmula larga   (2a en Tema 7)

U=orth(A), Apr = U*U'    % Mediante la fórmula corta   (2b en Tema 7)

%     5/6        1/3        -1/6
%     1/3        1/3         1/3
%    -1/6        1/3         5/6

proyydatos=Apr*ydatos   % La mejor recta tiene estas coordenadas "y".
                        % Es la mejor recta en el sentido de que
                        % la norma del vector diferencia o error
                        % (1,4,5) - (1.3333, 3.3333, 5.3333)
                        % es mínima. Otra recta, daría un error mayor.

%       4/3
%      10/3
%      16/3

format short, proyydatos, format rat  % Mostramos por pantalla proyydatos en formato decimal
%    1.3333
%    3.3333
%    5.3333

rref([A proyydatos])
%   1         0           4/3
%   0         1           2/3
%   0         0           0

% La solución es:
%    4/3
%    2/3

linsolve(A, proyydatos)   % Otra forma de resolver el SL SCD
%       4/3
%       2/3

% 2) Usar las ecuaciones normales reduce el número de operaciones, y por ende
%    los errores de redondeo.

Amp=[ A'*A  A'*ydatos ]  % Esta es la matriz ampliada de "las ecuaciones normales".
%       3             9             10
%       9            45             42

rref(Amp);
% 1             0             4/3
% 0             1             2/3

% La solución es:
%    4/3
%    2/3

linsolve(A'*A, A'*ydatos)   % Otra forma de resolver el SL SCD
%       4/3
%       2/3

%  p(x) = 4/3 + 2/3 x   % Esta es la función lineal o polinomio de grado 1 que mejor ajusta.
```

```
p1 = 4/3  + 2/3* x         ;
ymodelo(1) = subs(p1,x,0)  ;
ymodelo(2) = subs(p1,x,3)  ;
ymodelo(3) = subs(p1,x,6)  ;

ydatos'
% 1     4     5
ymodelo
% [4/3, 10/3, 16/3]   % el modelo no pasa por ninguno de los puntos (datos)

mse=1/3*norm(ydatos-ymodelo')
%(2^(1/2)*3^(1/2))/9
format short, double(mse)
%    0.2722

% De las infinitas rectas posibles, ésta es la que minimiza la suma de los cuadrados
% de las distancias entre los datos y el modelo.
```

<u>Código representación gráfica en MATLAB</u>

```
% Representamos los tres puntos
figure()
plot(0,1,'ko') ; hold on
plot(3,4,'ko')
plot(6,5,'ko')

% Representamos los modelos, sobre rango de x discretizado

x=-1:.1:10;
p2=1+4/3*x-1/9*x.^2;
plot(x,p2,':b')          % en  azul, línea discontinua

p1=4/3+2/3*x;
plot(x,p1,'r')           % en rojo

axis equal
xlabel('x') ; ylabel('y')
saveas(figure(1),'Pr11T7Ejem14_15.jpg')
```



P.12 Semana 11 de diciembre

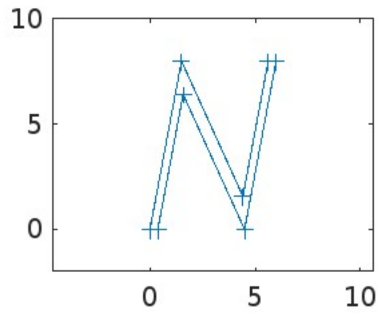
Aplicación de matrices para gráficas

Estudiamos varios ejemplos del libro:
Lay, Lay y McDonald, 2016. Linear Algebra and its Applications. Quinta edición. Pearson. ISBN 978-0-321-98238-4 ISBN 0-321-98238-X.

- Otros ejemplos de aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ (EJEMPLO 3 pg 66.)
- Coordenadas homogéneas y transformaciones afines (EJEMPLOS 1-6. pg 140-141-142)

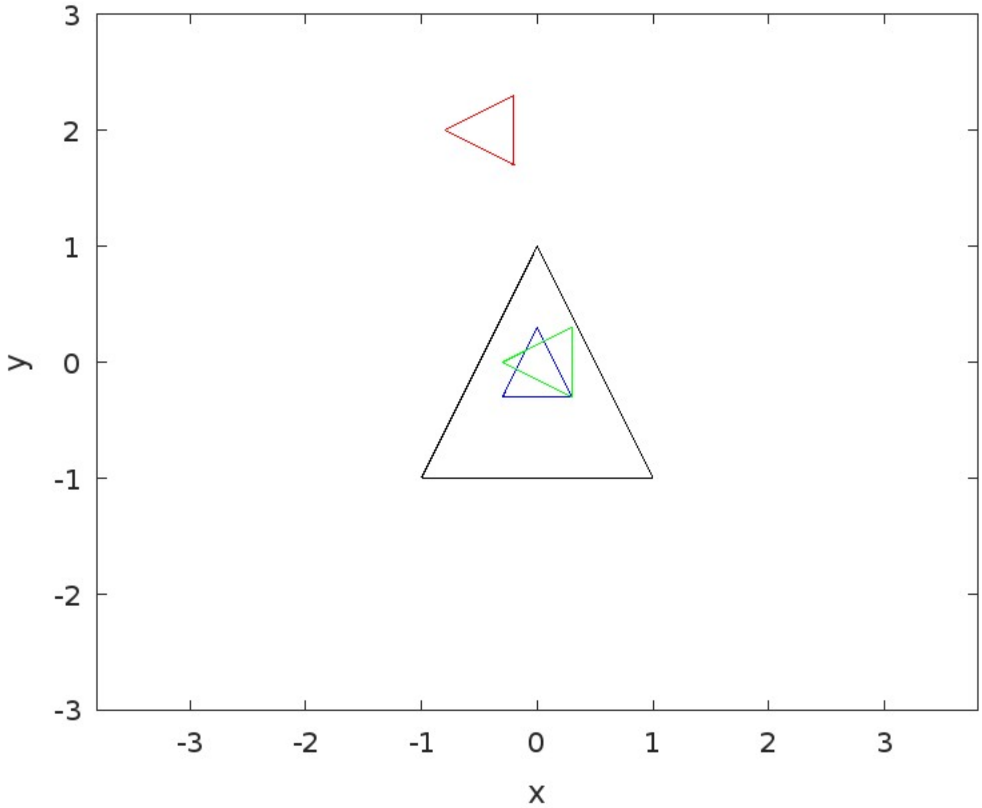
```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Aplicación en gráficos en el plano %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% La siguiente matriz de datos son las coordenadas x (fila1) e y (fila2)
% de los vértices de una letra N gruesa.

D=[0  0.5  0.5  6  6  5.5  5.5  0  0; 0  0  6.42  0  8  8  1.58  8  0];

A=[1 0.25; 0 1]  % Transformación de shear (cizalladura) horizontal
                 % Nótese que el shear vertical del mismo factor tendría
                 % matriz estándar asociada de la forma A=[1 0; 0.25 1]

D1=A*D           % Tenemos como resultado la letra N inclinada hacia la derecha

S=[0.75 0 ; 0 1] % Esta matriz corresponde a una compresión horizontal o
                 % compresión de las coordenadas x por un factor 0.75.
                 % Es lo que llamado en el Tema 4 un escalamiento anisótropo.
                 % La letra S viene del inglés "shrink", comprimir.

S*A              % El resultado es la matriz de la composición de las dos
                 % transformaciones, 1º shear, 2º compresión según el eje X

D2=S*A*D         % Tenemos como resultado la letra N inclinada hacia la derecha
                 % y seguidamente comprimida según la coordenada x

figure(1)
plot(D(1,:), D(2,:), '+-')  % símbolo +  conector continuo
xlim([-2 10])               % límites para eje x
ylim([-2 10])               % límites para eje y
axis equal                  % incrementos iguales en x e y tienen el mismo tamaño.


figure(2)     ,  plot(D1(1,:), D1(2,:), '+-')
xlim([-2 10]) ,  ylim([-2 10]) , axis equal

figure(3)     ,  plot(D2(1,:), D2(2,:), '+-')
xlim([-2 10]) ,  ylim([-2 10])  , axis equal
```

```
saveas(figure(3),'Pr12_letraN.jpg')
```




```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Coordenadas homogéneas, para poder incluir la traslación, %
% que no es una aplicación lineal                           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Traslación: transformación f(x,y) = (x+h, y+k)
% No se puede hacer mediante una matriz porque no es una aplicación linal.
% Por ejemplo f(0,0) no es igual a (0,0)

% Pero sí se puede hacer mediante multiplicación por matriz utilizando
% las "coordenadas homogéneas". Simplemente añadimos una coordenada a los
% puntos, de valor fijo 1.  (x,y)  -->  (x,y,1)
% Cuando sumamos vectores o multiplicamos por un escalar, sólo usamos las
% dos primeras coordenadas.
% Sin embargo en la multiplicación matriz * vector en coordenadas homogéneas
% sí usamos las tres coordenadas.

% Para la traslación:

%  1 0 | h      x      x + h
%  0 1 | k      y      y + k
%  ----|--  *  ---  =  -----
%  0 0 | 1      1        1

% Cualquier transformación lineal en R2 con matriz estándar A se puede
% representar en coordenadas homogéneas como una matriz con la forma
%
% a11 a12 | 0
% a21 a22 | 0
% --------|---
%  0   0  | 1

% Por ejemplo giro antihorario de ángulo a alrededor del origen:

%  cos(a) -sin(a) | 0
%  sin(a)  cos(a) | 0
%  ---------------|---
%    0       0    | 1
```

```
% Simetría respecto de la recta x = y

%  0 1 | 0
%  1 0 | 0
%  ----|---
%  0 0 | 1

% Escalamiento de factor s según eje X y de factor t según eje Y.

%  s 0 | 0
%  0 t | 0
%  ----|---
%  0 0 | 1

% Ejercicio. Encuentra la matriz T 3x3 que corresponde a la siguiente
% composición de transformaciones:
%   1º) escalamiento de factor 0.3
%   2º) giro de 90 grados en sentido antihorario alrededor del origen
%   3º) traslación de cada punto mediante v0=(0.5, 2).

% Aplica esa transformación al triángulo de vértices (-1,-1),(1,-1),(0,1).

D=[-1 1 0 -1; -1 -1 1 -1; 1 1 1 1]  % Coordenadas homogéneas

A=[0.3 0; 0 0.3]
Ah=[A [0 0]' ; 0 0 1]
% Tb se podría escribir:
Ah=[0.3 0 0 ; 0 0.3 0; 0 0 1]

B=[cosd(90) -sind(90); sind(90) cosd(90)]
Bh=[B [0 0]' ; 0 0 1]

Ch=[eye(2) [-0.5 2]' ; 0 0 1]

close all  % borra las tres figuras anteriores

T=Ch*Bh*Ah
%         0   -0.3000    0.5000
%    0.3000         0    2.0000
%         0         0    1.0000

figure(1)
plot(D(1,:), D(2,:), 'k-')
xlim([-3 3]); ylim([-3 3]) ; axis equal ; hold on
D1=Ah*D       ; plot(D1(1,:), D1(2,:), 'b-')
D1=Bh*Ah*D    ; plot(D1(1,:), D1(2,:), 'g-')
D1=Ch*Bh*Ah*D ; plot(D1(1,:), D1(2,:), 'r-')
xlabel('x') ; ylabel('y')
saveas(figure(1),'Pr12_coord_homogen.jpg')
```


3
2
1
0
-1
-2
-3
y
-3
-2
-1
0
1
2
3
x