Apéndice 1. Matrices elementales y factorización LU

1 Matrices elementales

Si partimos de la matriz identidad I y efectuamos exactamente una operación elemental en sus filas, la matriz resultante se denomina **matriz elemental**.

Ejemplos de matrices elementales de orden 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{1(3)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1 \quad \text{Se multiplica la 1ª fila por 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 \quad \text{Se suma a la 3ª fila la 1ª por } -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_3 \quad \text{Se intercambia fila 2ª con fila 3ª}$$

2 Inversa de una matriz elemental

Si E es una matriz elemental tiene inversa, y E^{-1} es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental inversa.

La inversa de $F_{i(\alpha)}$ es $F_{i\ (1/\alpha)}$

La inversa de $F_{ij\ (\alpha)}$ es $F_{ij\ (-\alpha)}$

La inversa de F_{ij} es F_{ij}

Ejemplos para las matrices anteriores:

$$E_1^{-1}E_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^{-1}E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3^{-1}E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Operación elemental sobre A como producto de A por matriz elemental

Dadas la matriz $A_{m\times n}$ y la matriz elemental E correspondiente a una operación elemental, la matriz $B_{m\times n}$ que resulta de efectuar dicha o. e. sobre $A_{m\times n}$ es igual al producto $EA_{m\times n}$.

Esquema:

$$A \underset{\text{o.e.}}{\longrightarrow} B \;\Rightarrow\; B = E\,A \qquad E \text{ multiplica por la izda (pre-multiplica)}$$

Ejemplo 1: A partir de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ queremos obtener la matriz B que tiene intercambiadas las filas 2 y 4. Determina la matriz elemental E tal que $E\;A = B$

E es 4×4, pues A tiene 4 filas. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, sumar a la 2ª fila la 1ª multiplicada por (-2) utilizando el producto por una matriz elemental.

E es 3×3, pues A tiene 3 filas.

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz elemental que resulta de sumarle a la fila 2ª de I_3, la 1ª multiplicada por (-2).

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coincide con el resultado obtenido al sumar a la 2^a fila de A la 1^a multiplicada por (-2), es decir, al efectuar $F_{21(-2)}$ sobre A.

4 Transformación triangular

Tomado de Leon, Steve. Linear Algebra with Applications PDF EBook, Global Edition, Pearson Education, Limited, 2015. Página 83.

Si una matriz A_n se puede escalonar a una forma estrictamente triangular superior, es decir, con los elementos de la diagonal principal distintos de cero, efectuando únicamente operaciones elementales de reemplazamiento, es decir sin necesidad de hacer ningún intercambio de filas[1], entonces A se puede factorizar como $A = LU$, siendo L una matriz triangular inferior invertible, con unos en la diagonal principal, y U la matriz triangular superior antes mencionada.

Ejemplo 3:

Aplicación a la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = U$$

Pasos efectuados y su orden: $F_{21(-1/2)}$, $F_{31(-2)}$ y $F_{32(3)}$

$E_3E_2E_1A = U$

Premultiplicando por $(E_3E_2E_1)^{-1}$

$A = (E_3E_2E_1)^{-1}U$

$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & 1 \end{bmatrix} = L$$

$A = LU$

L es triangular inferior, invertible, con unos en la diagonal principal, y los elementos l_{ij} para $i > j$ son los opuestos de los escalares k de las operaciones $F_i = F_i + kF_j$.

Aplicación para la resolución de SLs. Ejemplo 4:

Resuelve el SL $A\vec{x} = \vec{b}$, con A la matriz del ejemplo anterior y $\vec{b} = (4, 9, 5)$.

Aprovechando $A = LU$ podemos escribir el SL como $LU\vec{x} = \vec{b}$.

Definiendo $\vec{y}$ como $U\vec{x} = \vec{y}$, tendremos un primer SL $L\vec{y} = \vec{b}$ que podemos resolver calculando $\vec{y}$ mediante sustitución hacia adelante.

Seguidamente resolvemos $\vec{x}$ en el SL $U\vec{x} = \vec{y}$ mediante sustitución hacia atrás.

[1] La eliminación gaussiana simple no necesita de escalamientos, sólo reemplazamientos y permutaciones

Aquí vemos el SL completo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

La resolución de $L\vec{y} = \vec{b}$ es como sigue:

$y_1 = 4$

$y_2 = 9 - 1/2\, y_1 = 9 - 2 = 7$

$y_3 = -5 - 2\, y_1 + 3\, y_2 = -5 - 8 + 21 = 8$

Por tanto $\vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

La resolución de $U\vec{x} = \vec{y}$ es como sigue:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$8x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 1$

$3x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_2 = (7 - x_3)/3 = 6/3 = 2$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = (4 - 4x_2 - 2x_3)/2 = (4 - 8 - 2)/2 = -6/2 = -3$

La solución es $\vec{x} = (-3, 2, 1)$

Este procedimiento reduce mucho el número de operaciones en sistemas lineales con n alta, reduciendo con ello el tiempo de ejecución y los errores de redondeo.