13 Transformaciones ortogonales

TEOREMA. Una transformación lineal f en $\mathbb{R}^n$ deja invariante el producto escalar, manteniendo por tanto longitudes, distancias y ángulos invariantes, si y solo si su matriz estándar es ortogonal.

Demostración: Sea A la matriz estándar de f.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) &= A\,\vec{x} \cdot A\,\vec{y} = (A\,\vec{x})^t\,A\,\vec{y} = \vec{x}^t\,A^t\,A\,\vec{y} \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= \vec{x}^t\,\vec{y} \end{aligned}$$

La igualdad $\vec{x}^t\,A^t\,A\,\vec{y} = \vec{x}^t\,\vec{y}$ se da $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ si y sólo $A^tA = I$, es decir, si y sólo si A es ortogonal. □

Propiedades más importantes de las transformaciones/matrices ortogonales

- Determinante de A es 1 o -1. Transformación designada como **directa** si el determinante es 1 e **inversa** si el determinante es -1.
- Son inyectivas y sobreyectivas (determinante 1 o -1 y por tanto distinto de cero, rango$A$=n).
- Conservan la norma ($\| f(\vec{x}) \| = \| \vec{x} \|$), el ángulo formado por dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, y la distancia entre dos vectores, a partir de la invarianza del producto escalar.
- Toda tranformación ortogonal transforma base ortonormal en base ortonormal y recíprocamente.
- La composición de matrices ortogonales es ortogonal.
- La inversa de matriz ortogonal (que es igual a la traspuesta) es matriz ortogonal.
- Los únicos autovalores (reales) que pueden darse son 1 o -1.
- Si A posee los autovalores 1 y -1, los correspondientes subespacios propios son ortogonales. En consecuencia, si A es diagonalizable, lo es ortogonalmente.

Estas transformaciones lineales, por conservar las formas de los objetos, se dice que producen movimientos rígidos.

En $\mathbb{R}^2$ el giro alrededor del origen y la simetría ortogonal respecto de una recta vectorial son las únicas transformaciones lineales ortogonales que existen (ver Tema 4).

En $\mathbb{R}^3$ el giro alrededor de un eje vectorial, la simetría ortogonal respecto de una recta vectorial, respecto de un plano vectorial y respecto del origen, y la rotoinversión o giro seguido de simetría respecto del plano perpendicular al eje de giro, son las únicas transformaciones lineales ortogonales que existen.

Clasificación de las transformaciones ortogonales, A, en $\mathbb{R}^2$

Atendiendo a sus autovalores.

	Autovalores	**Clasificación**	**Tipo / Determinante / Traza**
I	no reales	Rotación respecto al origen	Directa / 1 / 2 cos α
Ia	$1, 1$	Rotación de ángulo 0 = Identidad	Directa / 1 / 2
Ib	$-1, -1$	Rotación de ángulo π = Simetría respecto al origen	Directa / 1 / -2
II	$1, -1$	Simetría respecto de recta $S =< \vec{a} >$	Inversa / -1 / 0

La composición de transformaciones ortogonales es ortogonal, por lo que la resultante de componer dos transformaciones de la tabla corresponderá a uno de los cuatro casos.

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes, por tanto:

- La composición de dos rotaciones es una rotación (sumándose los ángulos).
- La composición de dos simetrías es una rotación (si la simetría es la misma la composición es la identidad, que corresponde a la rotación de ángulo 0).
- La composición de simetría y rotación es una simetría.

Clasificación de las transformaciones ortogonales, A, en $\mathbb{R}^3$

Atendiendo a sus autovalores.

	Autoval.	**Clasificación**	**Tipo / Determin. / Traza**
I	1	Rotación alrededor del eje dirigido según $\vec{n}$	Directa / 1 / $1 + 2\cos\alpha$
Ia	$1, 1, 1$	Rotación de ángulo 0 = Identidad	Directa / 1 / 3
Ib	$-1, -1, 1$	Rotación de ángulo π alrededor de un eje (= simetría respecto a eje)	Directa / 1 / -1
II	$1, 1, -1$	Simetría respecto al plano $S =< \vec{a}, \vec{b} >$	Inversa / -1 / 1
III	$-1, -1, -1$	Simetría respecto al origen = composición de rotación de ángulo π y simetría respecto al plano perpendicular al eje de rotación	Inversa / -1 / -3
IV	-1	Composición de rotación alrededor del eje dirigido según $\vec{n}$ y simetría respecto al plano perpendicular a ese eje. También llamada rotoinversión.	Inversa / -1 / $-1 + 2\cos\alpha$

La composición de estas transformaciones corresponderá a uno de los 6 casos dados.

Matriz respecto a base natural y matriz estándar A

$\mathbb{R}^2$:

	Autovals	Base natural[5]	Matriz asociada respecto de ella
I	no reales	Estándar o cualquier base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ con los vectores ordenados en sentido antihorario[6]	$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ $0 < \alpha < \pi$ (rot. en sentido antihorario) o $-\pi < \alpha < 0$ (rot. en sentido antihorario)
Ia	$1, 1$	Cualquier base	Matriz identidad I
Ib	$-1, -1$	Cualquier base	Matriz $-I$
II	$1, -1$	$B = \{\ \vec{a},\ \vec{b}\ \}$ con eje de simetría $< \vec{a} >$ y $\vec{b}$ ortogonal a $\vec{a}$	$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

[5] Proporciona la matriz asociada más sencilla posible.

[6] Es equivalente a decir que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ corresponda a un giro de la base estándar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.
También es equivalente a que la base sea ortonormal y $|\ \vec{u}_1\ \vec{u}_2\ | = 1$

En el caso II la matriz estándar A se obtiene como:
$A = BDB^{-1}$, siendo B la matriz cuyas columnas son la base B.

$\mathbb{R}^3$:

	Autovalores	Base natural	Matriz asociada respecto a ella
I	1	$B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ con $\vec{n}$ correspondiendo al eje dirigido y $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ base ortonormal tal que $\vec{a} \times \vec{b}$ tiene la dirección y sentido de $\vec{n}$ [7]	$F = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $0 < \alpha < \pi$ (sentido horario) o $-\pi < \alpha < 0$ (sentido antihorario)
Ia	1,1,1	Cualquier base	Matriz I
Ib	$-1, -1, 1$	$B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ con $\vec{n}$ vector base del eje de simetría y $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ base del plano perpendicular al eje de simetría	$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
II	$1, 1, -1$	$B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ con $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ base del plano de simetría y $\vec{n}$ vector ortogonal al plano de simetría	$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
III	$-1, -1, -1$	Cualquier base	Matriz $-I$
IV	-1	$B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ con $\vec{n}$ correspondiendo al eje dirigido y $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ base ortonormal tal que $\vec{a} \times \vec{b}$ tiene la dirección y sentido de $\vec{n}$ [7]	$F = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

[7] Es equivalente a que la base $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ sea ortonormal y $\vec{a}$, $\vec{b}$ estén escogidos de forma que $\mid \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{n} \mid$ sea positivo.

En los casos I, Ib, II y IV la matriz estándar A se obtiene como:
$A = BDB^{-1}$, o como
$A = BFB^{-1}$, siendo B la matriz cuyas columnas son la base B.

Ejemplo 16
a) En $\mathbb{R}^3$, obtén la matriz estándar A correspondiente al giro de 90 grados alrededor del eje dirigido según el vector $\vec{v} = (1,1,0)$.
b) Comprueba que es ortogonal.
c) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (1,-1,0)$.

Sol.:

a) Partiremos de la matriz $F = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\text{sen}(90) & 0 \\ \text{sen}(90) & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, que es la matriz de la transformación tomando como referencia una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}\}$, tal que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ sea base ortonormal del plano perpendicular al eje de giro, y que $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ tenga el mismo sentido que $\vec{v}$.

Una vez determinada B, podremos calcular la matriz estándar A efectuando el cambio de base:
$$A = BFB^{-1}$$

Si usamos $\vec{v}$ dividido por su norma, en vez de $\vec{v}$, la matriz B será ortonormal, y simplificamos la fórmula:
$$A = BFB^t$$

La base del plano la obtenemos a partir de su implícita que es $x + y = 0$ (el plano es el complemento ortogonal del eje). Resolviendo el SL por el método habitual nos queda la base $\{\vec{a} = (1,-1,0)\,,\, \vec{b} = (0,0,1)\}$. En este caso del procedimiento habitual se ha obtenido directamente una base ortogonal del plano.

El determinante $|\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{v}\,|$ es negativo, o lo que es lo mismo, el producto vectorial del primero por el segundo no tiene el mismo sentido que el tercero. Lo resolvemos tomado como primer vector el opuesto de $\vec{a}$. La base ortonormal del plano es $\{-\vec{a}/\parallel \vec{a} \parallel, \vec{b}\}$. El segundo vector ya es unitario.

Como base válida para F tomamos entonces $B = \{(-1,1,0)/\sqrt{2}, (0,0,1), (1,1,0)/\sqrt{2}\}$.

$$B = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz estándar: $A = BFB^t = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

b) Se puede comprobar que la matriz A es ortogonal sin más que efectuar el producto AA^t y encontrar como resultado la identidad.

c) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

ALGUNAS COMPROBACIONES

Se puede comprobar gráficamente que la imagen de $\vec{v}$ es el vector esperado.

Se puede comprobar sin dificultad que $\lambda = 1$ es autovalor de A y que su subespacio propio asociado es $V_1 =< (1, 1, 0) >$, sin más que resolver el SLH $[\ \ A - I \mid \vec{0}\ ]$

OTRO PROCEDIMIENTO

Podemos utilizar el hecho de que conocida la transformación de una base se puede deducir la matriz estándar, con este procedimiento:

$AC = M$, siendo A la matriz estándar, C la base y M los transformados de la base.

Por tanto $A = MC^{-1}$.

En efecto en este caso, debido a los valores simples de la dirección del eje de giro y del ángulo, es inmediato encontrar una base con la orientación natural de la transformación, cuyas imágenes sean fáciles de obtener.

Concretamente, por ejemplo:

$A(-1, 1, 0) = (0, 0, \sqrt{2}) \qquad A(0, 0, 1) = (1, -1, 0)/\sqrt{2} \qquad A(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$

Vemos la solución con este planteamiento usando MATLAB.

```
C = [ -1 1 0        ; 0 0 1                  ; 1 1 0]'      ;
M = [  0 0 sqrt(2) ; 1/sqrt(2) -1/sqrt(2)  0; 1 1 0]'      ;
A = M*inv(C)

%     0.5000    0.5000    0.7071
%     0.5000    0.5000   -0.7071
%    -0.7071    0.7071         0
```

Ejemplo 17. Sea $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ la matriz estándar de una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestra que T es una transformación ortogonal.
b) Obtén los autovalores y base de cada subespacio propio encontrado.
c) Clasifica cualitativa y cuantitativamente la transformación geométrica.

<u>Sol.:</u>

a) Multiplicamos T por T^t y obtenemos I, quedando demostrado que es una matriz ortogonal.

b) Mediante el método de Sarrus encontramos que el polinomio característico es $-s^3-1=0$
Lo resolvemos por Ruffini. La primera raíz, -1, es inmediata, y queda la ecuación de segundo grado $s^2-s+1=0$. Las raíces de esta ecuación son complejas.
El único autovalor es $\lambda=-1$

Por el procedimiento habitual se obtiene que $V_{-1} =< (1,-1,1) >$, siendo una base del subespacio propio $B = \{ (1,-1,1) \}$

c) Al ser T matriz ortogonal y tener sólo el autovalor -1 se trata de una rotoinversión.
El eje de rotación es V_{-1}, por lo que tenemos que la dirección alrededor de la cual se produce el giro tiene de base el vector $(1,-1,1)$.
Nos falta determinar el sentido sobre el eje y el ángulo rotado.

Para ello buscaremos un vector del plano perpendicular, calcularemos su transformado, y a partir de ellos podremos obtener el sentido y el ángulo.
El plano tiene ec. implícita $x-y+z=0$. Resolviendo el sitema obtenemos la base $\{ \vec{a}=(1,1,0)\,, \vec{b}=(0,1,1) \}$. (Es la base del complemento ortogonal del eje de giro).

Tomamos $\vec{a}$, que es el más sencillo. $\quad f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$

El ángulo que forman es

$$\text{arcocoseno}\left(\frac{(1,1,0)\cdot(1,0,-1)}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = \text{arcocoseno}(1/2)$$

Por tanto 60 grados.

Efectuamos ahora $\vec{a} \times f(\vec{a})$: $\quad \vec{a} \times f(\vec{a}) = (1,1,0) \times (1,0,-1) = (-1,1,-1)$

Por tanto lo que se manifiesta en el plano es un giro de 60 grados alrededor del eje dirigido según $\vec{n}=(-1,1,-1)$.
Obviamente en el plano perpendicular al eje de giro no se produce inversión, o simetría.

Conclusión respecto del movimiento:

$$\boxed{\text{Rotoinversión de 60 grados alrededor del eje dirigido según } \vec{n}=(-1,1,-1)}$$

Este movimiento también se puede describir como la composición de una rotación de 60 grados alrededor del eje dirigido según $\vec{n}$ seguida de una simetría respecto del plano perpendicular al eje.