

11 Polinomio interpolador

Dado un conjunto de datos experimentales (x_i, y_i) con i desde 1 hasta n y tales que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, llamamos **polinomio interpolador** de esos datos al polinomio de menor grado cuyo gráfico pasa por todos los puntos. En trabajos científicos un polinomio de este tipo puede usarse, por ejemplo, para estimar valores entre puntos conocidos, y de ahí su nombre de polinomio interpolador.

Veremos a continuación que dicho polinomio es único y que su grado es menor o igual que $n - 1$.

El modelo de un polinomio de grado $n - 1$ es:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1}$$

La condición de que todos los puntos cumplan el modelo significa que se ha de cumplir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases},$$

con matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$

Esta matriz es la llamada matriz de Vandermonde de orden n , que tiene rango n si y solo si $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ (visto en el Ejercicio 13 del Tema 2). Al ser cuadrada de orden n y rango completo, el SL es compatible determinado. Por tanto obtendremos una solución única $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. El grado del polinomio lo determinará el mayor coeficiente no nulo. En efecto, aunque el modelo que estamos usando es un polinomio de grado $n - 1$, los polinomios de menor grado están incluidos en el modelo, y simplemente tienen los coeficientes más altos nulos.

Por ejemplo si tenemos $n = 3$ y los tres puntos están alineados y con pendiente no nula el polinomio interpolador que deduciremos será de orden 1 (recta), y si además de estar alineados tienen pendiente nula, entonces el polinomio es de orden 0 ($y = \text{constante}$).

Si consideráramos un polinomio de grado $t > n - 1$, tendríamos una columna más por cada grado que aumentamos, mientras que la matriz A sigue teniendo rango n , igual al número de ecuaciones (=filas), por tanto el sistema pasa a ser indeterminado, con infinitos polinomios de grado menor o igual que t que pasan por los puntos.

Ejemplo 14. Encuentra el polinomio interpolador para el conjunto de datos (x, y) siguiente:

$$(0,1), (3,4), (6,5)$$

Método de solución: Resolver el SL $A\vec{a} = \vec{y}$, siendo

A la matriz de Vandermonde para la primera variable $\vec{x} = (0, 3, 4)$

$\vec{y} = (1, 4, 5)$ los valores de la segunda variable.

$\vec{a} = (a_0, a_1, a_2)$ los coeficientes del polinomio de grado 2, que son las incógnitas.

12 Ajuste de datos (x, y) mediante polinomios

En una serie de datos científicos (x, y) , esperamos errores experimentales, por lo que la relación verdadera entre las variables en general va a quedar mejor descrita por un polinomio de grado más bajo que el del polinomio interpolador.

Se describe a continuación como se obtienen las modelizaciones o ajustes, mediante mínimos cuadrados, con un polinomio de grado $p < n$, siendo n el número de datos.

Modelo polinomio de grado p : $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$

Datos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ con $x_i \neq x_j \forall i \neq j$

Si el conjunto de valores y_i cumpliera el modelo, el siguiente SL sería compatible.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 (x_1)^2 + \dots + a_p (x_1)^p = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 (x_2)^2 + \dots + a_p (x_2)^p = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 (x_n)^2 + \dots + a_p (x_n)^p = y_n \end{cases}$$

Sistema en notación matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & (x_1)^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & (x_2)^p \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & (x_n)^p \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Si el conjunto de puntos no cumple el modelo, la solución de mínimos cuadrados, es decir, el vector de coeficientes del polinomio de grado p que mejor ajusta los datos, se obtiene resolviendo el sistema $A^t A \vec{a} = A^t \vec{y}$ (Ver la justificación en el enunciado del ejercicio 3. La condición de que las columnas de A sean independientes se cumple por haber tomado todos los x_i distintos).

Ejemplo 15. Encuentra el mejor ajuste por mínimos cuadrados mediante una función lineal para el conjunto de datos (x, y) siguiente:

$$(0,1), (3,4), (6,5)$$

Solución ejemplos 14 y 15 (MATLAB)

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CON POLINOMIO DE GRADO 2 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A      = [ 1 1 1 ; 0 3 6 ; 0 9 36 ]'
ydatos = [ 1 4 5 ]'

rref([A ydatos])

%      1      0      0      1
%      0      1      0      4/3
%      0      0      1     -1/9

%      y = 1 + 4/3 x - 1/9 x^2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CON POLINOMIO DE GRADO 1 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A = [1 1 1; 0 3 6]'

[A'*A A'*ydatos]

%      3      9      10
%      9     45     42

rref(ans)

%      1      0      4/3
%      0      1      2/3

%      y = 4/3 + 2/3 x
```

Código representación gráfica en MATLAB

```
plot(0,1,'ko')
hold on
plot(3,4,'ko')
plot(6,5,'ko')
x=-1:.1:10;
y1=1+4/3*x-1/9*x.^2;
plot(x,y1,':k')
axis([-1 8 -1 8])
y2=4/3+2/3*x;
plot(x,y2,'b')
axis square
```

