

Tema 7. Espacio Euclídeo Canónico \mathbb{R}^n

1	Bases ortogonales y ortonormales. Matriz ortogonal	2
2	Subespacios ortogonales	5
3	Complemento ortogonal	6
4	Descomposición ortogonal y proyección ortogonal	10
5	Proyección ortogonal conocida una base ortogonal	12
6	Base ortogonal mediante Gram-Schmidt	14
7	Ejercicios resueltos	15
8	Matriz de proyección ortogonal	19
9	Ejercicios	21
10	Diagonalización ortogonal de las matrices simétricas	23
11	Polinomio interpolador	24
12	Ajuste de datos (x, y) mediante polinomios	25
13	Transformaciones ortogonales	28

Consideramos el espacio vectorial \mathbb{R}^n con el producto escalar canónico.

1 Bases ortogonales y ortonormales

Un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ de \mathbb{R}^n se dice que es un **conjunto ortogonal** si cada par de vectores distintos del conjunto es ortogonal, es decir, si $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \forall i \neq j$.

Un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ de \mathbb{R}^n es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

TEOREMA. Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de \mathbb{R}^n , entonces S es un conjunto linealmente independiente y por tanto es una base del subespacio generado por S .

Una **base ortogonal** de un subespacio W de \mathbb{R}^n es una base de W que es además conjunto ortogonal.

Una **base ortonormal** de un subespacio W de \mathbb{R}^n , es una base de W que es además conjunto ortonormal.

TEOREMA. De cualquier subespacio W de \mathbb{R}^n se puede obtener una base ortogonal, y mediante normalización de ésta, una base ortonormal. La excepción es obviamente el subespacio cero.

TEOREMA. La base canónica de \mathbb{R}^n es base ortonormal.

Ejemplo 1. Muestra que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es un conjunto ortogonal de \mathbb{R}^3 , siendo

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Consideremos los tres posibles pares de vectores distintos, a saber $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ y $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3(-1) + 1(2) + 1(1) = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 3(-1/2) + 1(-2) + 1(7/2) = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1(-1/2) + 2(-2) + 1(7/2) = 0$$

Cada par de vectores distintos es ortogonal, por tanto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es un conjunto ortogonal.

Ejemplo 2. Muestra que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , siendo:

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} [3 \quad 1 \quad 1] \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{(9+1+1)}{11} = \frac{11}{11}$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = \frac{(1+4+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \frac{(1+16+49)}{66} = \frac{66}{66} = 1$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{(-3+2+1)}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \frac{(-3-4+7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \frac{(1-8+7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

El conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un conjunto ortonormal, luego es linealmente independiente, y añadido que tiene rango 3, resulta ser base de \mathbb{R}^3 . Por ser un conjunto ortonormal es una base ortonormal.

Cuando los vectores de un conjunto ortogonal se “normalizan” para tener longitud unidad, el nuevo conjunto sigue siendo ortogonal, y por tanto, al tener longitud unidad, forma un conjunto ortonormal.

Estos son de hecho los mismos vectores del ejemplo anterior, que como habíamos comprobado son ortogonales, pero ahora normalizados.

TEOREMA. Una matriz cuadrada A_n tiene columnas ortonormales si y solo si $A^t A = I$.

Demostración: Podemos escribir $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n]$ quedando por tanto $A^t =$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1^t \\ \vec{a}_2^t \\ \vdots \\ \vec{a}_n^t \end{bmatrix}$$

Desarrollando $A^t A$ obtenemos $A^t A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^t \\ \vec{a}_2^t \\ \vdots \\ \vec{a}_n^t \end{bmatrix} [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^t \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_1^t \vec{a}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{a}_n^t \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n^t \vec{a}_n \end{bmatrix}$

La última expresión es igual a I si y solo si $\vec{a}_i^t \vec{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\vec{a}_i^t \vec{a}_j$ es el producto escalar de \vec{a}_i y \vec{a}_j , por tanto $A^t A = I$ si y sólo si las columnas de A son vectores unitarios ortogonales entre sí. \square

TEOREMA. Una matriz cuadrada A_n tiene columnas ortonormales si y solo si $A^t A = AA^t = I$.

Demostración: “ \Rightarrow ” Por tener columnas ortonormales $A^t A = I$ (teorema anterior) Por tener columnas ortonormales A tiene rango n y por tanto es invertible (o simplemente por verificar $A^t A = I$).

Premultiplicando $A^t A = I$ por A por la izquierda y por A^{-1} por la derecha queda: $AA^t = I$

“ \Leftarrow ” $A^t A = I$ implica que las columnas de A son ortonormales (teorema anterior). \square

Se dice que una matriz A_n dada es **matriz ortogonal** si cumple que $AA^t = A^t A = I$, o lo que es lo mismo, si su inversa coincide con su traspuesta, o lo que es lo mismo, si sus columnas son base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Es importante recordar que la base debe ser ortonormal (el nombre “matriz ortogonal” puede inducirnos a pensar, erróneamente, que bastaría con que los vectores fueran ortogonales entre sí).

Resultados:

- Si A es ortogonal también lo es A^t , por tanto las filas de A también son base ortonormal de \mathbb{R}^n .
- Las matrices ortogonales tienen determinante 1 o -1 .

$$AA^t = I \Rightarrow |A||A^t| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1$$

- El producto de matrices ortogonales es ortogonal.

Lo comprobamos para A y B ortogonales.

$$(AB)^t AB = B^t A^t AB = B^t I B = B^t B = I$$

A las aplicaciones o transformaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n cuya matriz estándar asociada es ortogonal las denominamos **aplicaciones o transformaciones ortogonales**.

2 Subespacios ortogonales

Se dice que \vec{z} es **ortogonal a un subespacio** W de \mathbb{R}^n si \vec{z} es ortogonal a todo vector $\vec{w} \in W$.

TEOREMA. \vec{z} es ortogonal al subespacio W de \mathbb{R}^n si y sólo si \vec{z} es ortogonal a una base de W .

Se dice que el subespacio H es ortogonal a W si $\forall \vec{z} \in H$, \vec{z} es ortogonal a W .

TEOREMA. H es ortogonal al subespacio W de \mathbb{R}^n si y sólo si los vectores de una base de H son ortogonales a los de una base de W .

Si H es ortogonal a W , W es a su vez ortogonal a H (por la simetría del producto escalar), y se dice de W y H que son **subespacios de \mathbb{R}^n ortogonales** entre sí.

Ejemplo 3. Considera en \mathbb{R}^3 las rectas $\mathbf{r} = \langle (1, a, 2) \rangle$ y $\mathbf{s} = \langle (1, -2, 0) \rangle$. Determina el o los valores de a tales que \mathbf{r} y \mathbf{s} sean subespacios ortogonales.

Sol: Las bases de r y s son respectivamente $\{(1, a, 2)\}$ y $\{(1, -2, 0)\}$.

El producto escalar de los dos vectores es $1 - 2a$, por tanto las rectas son ortogonales si y solo si $a = 1/2$.

La recta \mathbf{r} es la siguiente: $\langle (1, 1/2, 2) \rangle$.

TEOREMA. La suma de dos subespacios H y W ortogonales entre sí es suma directa.

En efecto todo par de vectores \vec{z} , \vec{w} no nulos, cada uno perteneciente a un subespacio, es un conjunto linealmente independiente, por ser los vectores ortogonales entre sí, y ello garantiza que la suma es directa.

En relación con el **Tema 5** “Autovalores, autovectores y diagonalización” se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA. A real es simétrica \Leftrightarrow es diagonalizable y todos sus subespacios propios son ortogonales entre sí.

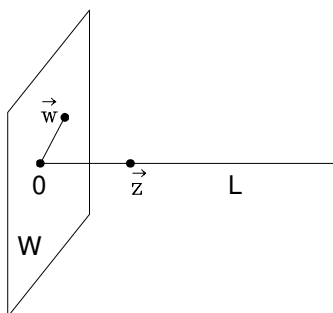
Las matrices estándar A de las simetrías ortogonales en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 respecto de rectas o planos respectivamente, son simétricas porque estos endomorfismos son diagonalizables y los subespacios propios son ortogonales entre sí. Lo mismo sucede con las matrices estándar A de las proyecciones ortogonales en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 sobre rectas o planos respectivamente.

3 Complemento ortogonal

El conjunto de todos los vectores \vec{z} que son ortogonales a W se denomina **complemento ortogonal** de W y se denota como W^\perp .

$$W^\perp = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n / \vec{z} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in W\}$$

Ejemplo 4. Consideremos en \mathbb{R}^3 el subespacio W identificado con un plano que contiene el origen y el subespacio L identificado con la recta que pasa por el origen y perpendicular al plano anterior. Se tiene entonces que $\forall \vec{z} \in L$ y $\forall \vec{w} \in W$, $\vec{z} \cdot \vec{w} = 0$. Ver la figura. En efecto, L está formado por **todos** los vectores que son ortogonales a los \vec{w} de W y recíprocamente W está formado por **todos** los vectores ortogonales a los \vec{z} de L . Es decir, $L = W^\perp$ y $W = L^\perp$



Tomemos por ejemplo el caso de $W = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$.

Los vectores ortogonales a W serán los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ortogonales a la base de W , es decir, tales que:

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Por tanto } W^\perp = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

TEOREMA. Se cumplen los siguientes resultados sobre W^\perp , siendo W un subespacio del espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

1. W^\perp es un subespacio de \mathbb{R}^n
2. $(W^\perp)^\perp = W$
3. $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$

OBSERVACIÓN:

Todo subespacio $W \subset \mathbb{R}^n$ (salvo el $\{\vec{0}\}$ y el propio \mathbb{R}^n) admite infinitos subespacios complementarios, pero solo uno de ellos es complemento ortogonal.

Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 cualquier recta pasando por el origen y no incluida en el plano XY es subespacio complementario del subespacio formado por el plano XY , pero el complemento ortogonal del plano XY es un subespacio único, que es la recta que define el eje Z .

Nótese en el ejemplo anterior que para obtener los vectores ortogonales a (a, b, c) en \mathbb{R}^3 hay que resolver la ec. $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$, es decir, la ec. lineal homogénea $ax + by + cz = 0$.

$ax + by + cz = 0$ es la forma implícita de un subespacio bidimensional F de \mathbb{R}^3 . Dicha forma expresa que los vectores (x, y, z) de F y los vectores $\langle (a, b, c) \rangle^1$ son ortogonales entre sí, y que por tanto F y $\langle (a, b, c) \rangle$ son complementos ortogonales. $F^\perp = \langle (a, b, c) \rangle$.

Complemento ortogonal de un subespacio W dado en implícitas: $A\vec{x} = \vec{0}$

De forma más general, para un subespacio W de dimensión d de \mathbb{R}^n , su forma implícita $A_{n-d, n} \vec{x} = \vec{0}$ expresa que los $\vec{x} \in W$ — que son las soluciones y por tanto $\text{Nul}A$ — son ortogonales a las filas de A .

La base de W la forman las d soluciones independientes del SLH, o lo que es lo mismo la base de $\text{Nul}A$.

La base de W^\perp la forman las filas de A .

Por ejemplo, para el subespacio $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 0\}$

$B = \{(-3, 2)\}$ es base de W , porque $(-3, 2)$ es solución de la ecuación implícita.

$C = \{(2, 3)\}$ es base de W^\perp .

Es importante darse cuenta de que el “vector que aparece” en la ecuación, en este caso $(2, 3)$, es precisamente el ortogonal, y por tanto no perteneciente al subespacio que define la ecuación.

Complemento ortogonal de un subespacio W con base B conocida

Si partimos de un subespacio W de dimensión d del cual conocemos una base $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$, tomando $B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_d]$ se tiene que la base de W^\perp son las soluciones independientes del SLH $B^t \vec{x} = \vec{0}$, o lo que es lo mismo la base de $\text{Nul}(B^t)$.

Por ejemplo partiendo de $W = \langle (1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0) \rangle$, W^\perp son las soluciones del SLH

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} .$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W^\perp = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) .$$

La matriz tiene rango 2, por tanto el SL tiene dos parámetros libres y la base de W^\perp tendrá dos vectores. Un ejemplo de base de W^\perp es $C = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Nótese que la base obtenida, puesta por filas, produce la matriz de coeficientes de la forma implícita de W .

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_3 = 0, x_4 = 0\}$$

¹Si (a, b, c) cumple la ecuación también la cumple todo múltiplo de (a, b, c)

Ejemplo 5. Sea $B = \{(3, 2, 2, 4), (1, 0, 0, 2), (1, -1, -1, 1)\}$ una base de F , subespacio de \mathbb{R}^4 . Halla una base del complemento ortogonal de F .

Sol:

Los vectores ortogonales a los dados serán los (x, y, z, t) que cumplan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (3, 2, 2, 4) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \\ (1, 0, 0, 2) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \\ (1, -1, -1, 1) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{forma impl. de } F^\perp: \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 4t = 0 \\ x + 2t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Las 3 ecuaciones anteriores forman un SLH por lo que ya estamos viendo que F^\perp es un subespacio vectorial. Para obtener la base de F^\perp hay que resolver el sistema.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tenemos 3 ecuaciones, rango 3, y 4 incógnitas. Por tanto tenemos $4 - 3 = 1$ parámetro libre. Tomando z como parámetro libre deducimos:

$$\begin{aligned} -4t = 0 &\Rightarrow \boxed{t=0} \\ y + z + t = 0 &\Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow \boxed{y=-z} \\ x = -2t &\Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

El vector solución es de la forma $(x, y, z, t) = (0, -z, z, 0) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los tres dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es: $\{(0, 1, -1, 0)\}$

Nótese que $0x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 = 0$, o lo que es lo mismo, $x_2 - x_3 = 0$ es la ecuación implícita de F .

Ejemplo 6. Se consideran en \mathbb{R}^3 los subespacios $W_1 = \langle (1, 1, 0), (0, 3, 6) \rangle$, $W_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$ y $W_3 = \langle (7, 8, 5), (6, 3, 1), (1, 3, 6) \rangle$.

Halla una base de cada uno de los subespacios ortogonales correspondientes, W_1^\perp , W_2^\perp , W_3^\perp .

Sol:

a) $W_1^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \text{ es ortogonal a } (1, 1, 0) \text{ y a } (0, 3, 6)\}$

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (1, 1, 0) &= x + y = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 3, 6) &= 3y + 6z = 0 \end{aligned}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right]$

El sistema se encuentra ya en la forma escalonada. Tomamos z como parámetro libre.

$$\begin{aligned} 3y + 6z = 0 &\Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z \\ x + y = 0 &\Rightarrow x = -y \Rightarrow x = 2z \end{aligned}$$

El vector solución es de la forma $(x, y, z) = (2z, -2z, z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los dos dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es $\{(2, -2, 1)\}$

W_1^\perp se expresaría como $W_1^\perp = \langle (2, -2, 1) \rangle$

NOTA: Se puede obtener $W_1^\perp = \langle \vec{n} \rangle$, siendo $\vec{n} = (1, 1, 0) \times (0, 3, 6)$ (**producto vectorial**).

b) $W_2^\perp = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z)$ es ortogonal a $(1, 2, 1)$

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = x + 2y + z = 0$$

La última ecuación es la ecuación implícita de W_2^\perp

Tenemos una sola ecuación y tres incógnitas, por tanto dos parámetros libres. Dejando como parámetros libres y y z tendremos

$$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x = -2y - z \quad y = y, \quad z = z$$

El vector solución en forma paramétrica es $(x, y, z) = (-2y - z, y, z) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales al dado es un subespacio vectorial de dimensión 2.

Una posible base es: $\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

$$W_2^\perp = \langle (-2, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$$

c) $W_3^\perp = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z)$ es ortogonal a $(7, 8, 5)$, $(6, 3, 1)$ y $(1, 3, 6)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & | & 0 \\ 6 & 3 & 1 & | & 0 \\ 7 & 8 & 5 & | & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 100$$

$\det A \neq 0$, por tanto tenemos un sistema de Cramer, con solución única, y como el sistema es homogéneo, la solución única es la trivial.

Por tanto $W_3^\perp = \{(0, 0, 0)\}$.

W_3 representa todo el espacio \mathbb{R}^3 , por lo que era de esperar que $W_3^\perp = \{\vec{0}\}$.

Habíamos visto anteriormente como $\vec{0}$ es ortogonal a todos los vectores.

Ejemplo 7. Se considera el subespacio W de \mathbb{R}^3 dado por $2x + y - z = 0$. Determina una base de W^\perp .

Sol:

Podemos interpretar la ecuación $2x + y - z = 0$ como la expresión del producto escalar de dos vectores, igualado a cero, siendo los vectores $(2, 1, -1)$ y (x, y, z) . Los vectores (x, y, z) contenidos en el plano que representa el subespacio vectorial W de \mathbb{R}^3 son los vectores ortogonales al vector $(2, 1, -1)$, y obviamente a los múltiplos de éste.

En efecto si $(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0$, entonces $\lambda(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0$

Por tanto $W^\perp = \langle (2, 1, -1) \rangle$, y una posible base $B = \{(2, 1, -1)\}$

Ejemplo 8. Se considera el espacio euclídeo canónico \mathbb{R}^3 y el subespacio W dado por la forma implícita siguiente: $\begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. Determina una base de W^\perp .

Sol:

$$W = \{(x, y, z) / \begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}\}$$

Las ecuaciones implícitas expresan que los vectores (x, y, z) de W son a la vez ortogonales al vector $(1, 4, 8)$ y al vector $(1, -1, 1)$, por tanto una base de W^\perp es $\{(1, 4, 8), (1, -1, 1)\}$.

4 Descomposición ortogonal y proyección ortogonal

El resultado $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$, significa que cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir de forma única como suma de un vector $\hat{\vec{y}} \in W$ y un vector $\vec{z} \in W^\perp$

$$\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z} \quad \text{con } \hat{\vec{y}} \in W \text{ y } \vec{z} \in W^\perp$$

$\hat{\vec{y}}$ es la **proyección ortogonal de \vec{y} sobre W** , que denotamos también como $\text{proj}_W \vec{y}$

También se puede dar esta definición equivalente: La proyección ortogonal de \vec{y} sobre W es el vector $\hat{\vec{y}} \in W$ tal que $\vec{y} - \hat{\vec{y}} \in W^\perp$

¿ Cómo obtener $\text{proj}_W \vec{y}$?

Ya que $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$ podemos obtener una base de \mathbb{R}^n $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d, \vec{b}_{d+1}, \dots, \vec{b}_n\}$, con $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d\}$ base de W y $\{\vec{b}_{d+1}, \dots, \vec{b}_n\}$ base de W^\perp .

Entonces $\vec{y} = \underbrace{c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_d \vec{b}_d}_{\text{proj}_W \vec{y} \in W} + \underbrace{c_{d+1} \vec{b}_{d+1} + \dots + c_n \vec{b}_n}_{\vec{z} \in W^\perp}$

con $\text{proj}_W \vec{y} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_d \vec{b}_d \in W$ y

$\vec{z} = c_{d+1} \vec{b}_{d+1} + \dots + c_n \vec{b}_n \in W^\perp$

Una vez obtenidas las coordenadas c_1, c_2, \dots, c_n , que son únicas (las coordenadas respecto de una base dada son únicas), podremos determinar el vector único $\text{proj}_W \vec{y} \in W$ y el vector único $\vec{z} \in W^\perp$ tales que $\vec{y} = \text{proj}_W \vec{y} + \vec{z}$.

Esquemas en el espacio euclídeo canónico \mathbb{R}^3 (Linear Algebra and its Applications, Lay, Quinta edición. p. 350). Proyección ortogonal del vector \vec{y} sobre el subespacio $\langle W \rangle$ de dimensión 2:

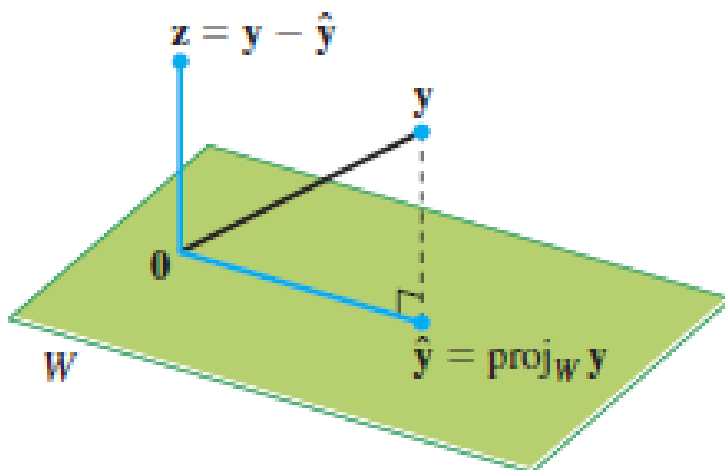


FIGURE 2 The orthogonal projection of \vec{y} onto W .

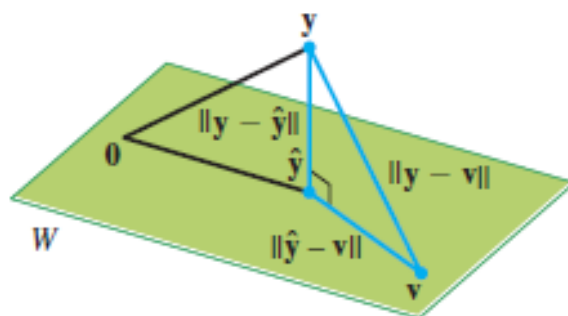


FIGURE 4 The orthogonal projection of \mathbf{y} onto W is the closest point in W to \mathbf{y} .

Por otra parte, $\hat{\mathbf{y}}$ tiene la propiedad de ser el vector de W más cercano a \vec{y}

$$\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| < \|\vec{y} - \vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in W \quad \text{con } \vec{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$$

Decimos entonces que dado $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, la **mejor aproximación** de \vec{y} que puedo obtener mediante un vector de W , subespacio de \mathbb{R}^n , es $\text{proy}_W \vec{y}$

¿ En qué sentido es mejor aproximación?. En el sentido de menor distancia.

La **distancia** de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ al subespacio W se define como la distancia desde \vec{y} al punto más cercano de W . Dicho de otra forma, la distancia de \vec{y} a W es igual a $\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| = \|\vec{z}\|$

OBSERVACIONES

- $\vec{z} = \text{proy}_{W^\perp} \vec{y}$, es decir, \vec{z} es la proyección ortogonal de \vec{y} sobre W^\perp .
- $\|\text{proy}_W \vec{y}\|$ es la distancia de \vec{y} a W^\perp .
- Si $\vec{y} \in W$, entonces $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{y}$
- Si $\vec{y} \in W^\perp$, entonces $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{0}$

En temas anteriores hemos estudiado proyecciones ortogonales en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 , determinando a partir de las características de la transformación cuál era la matriz asociada referida a la “base natural” de la transformación, o base de autovectores de la transformación, y cual era la matriz estándar asociada, obtenida mediante los cambios de base. Con procedimientos similares pudimos obtener la matriz asociada a la simetría ortogonal. A partir de las matrices resultaba sencillo obtener la proyección ortogonal o el simétrico de cualquier vector.

En este tema estudiamos la proyección ortogonal a partir de la descomposición ortogonal y extendemos el concepto de proyección ortogonal al espacio vectorial \mathbb{R}^n .

5 Proyección ortogonal conocida una base ortogonal

TEOREMA. Sea W un subespacio de \mathbb{R}^n , $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d\}$ una base ortogonal de W e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\text{proy}_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_d}{\vec{b}_d \cdot \vec{b}_d} \vec{b}_d \quad [1a]$$

Cada sumando corresponde a la proyección ortogonal sobre un subespacio unidimensional $\langle \vec{b}_i \rangle$. Por tanto la proyección ortogonal de \vec{y} sobre $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d \rangle$, siendo $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d\}$ una base ortogonal, es igual a la suma de las d proyecciones ortogonales sobre subespacios unidimensionales, mutuamente ortogonales, en las direcciones de $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d$.

- Si la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_d\}$ es ortonormal la expresión [1a] queda cómo:

$$\text{proy}_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_d) \vec{u}_d \quad [1b]$$

Para cálculos a mano se recomienda utilizar la fórmula [1a] ya que en la [1b] aparecerán en general raíces cuadradas.

Se muestra un esquema en \mathbb{R}^3 de la proyección sobre un subespacio W de dimensión 2 genérico del que conocemos una base ortogonal B genérica. (Lay, Linear Algebra and its Applications. Quinta edición, p. 351).

De acuerdo con la notación que usamos en esta sección, ha de tenerse en cuenta:

- La base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de la figura ha de entenderse como una base ortogonal, no necesariamente ortonormal. En efecto en la fórmula de la figura aparecen explícitamente los productos escalares $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i$, que no serían necesarios si la base fuera ortonormal. Para interpretar la figura de acuerdo con la notación usada en esta Sección, esta base ortogonal sería la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

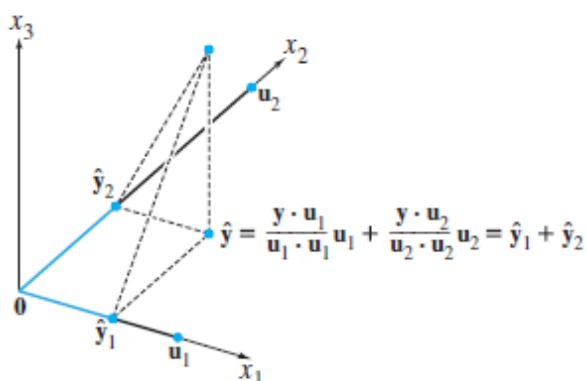


FIGURE 3 The orthogonal projection of \mathbf{y} is the sum of its projections onto one-dimensional subspaces that are mutually orthogonal.

Ejemplo 9. Considera en \mathbb{R}^2 los vectores $\vec{y} = (7, 6)$ y $\vec{b} = (2, 1)$. Encuentra la proyección ortogonal de \vec{y} sobre $\langle \vec{b} \rangle$ y la distancia de \vec{y} a la recta $\langle \vec{b} \rangle$.

Sol:

- Puesto que se proyecta sobre un subespacio de dimensión 1, su base puede considerarse base ortogonal.

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{(7, 6) \cdot (2, 1)}{(2, 1) \cdot (2, 1)} (2, 1) = \frac{20}{5} (2, 1) = 4(2, 1) = (8, 4)$$

- La distancia de \vec{y} a $\langle \vec{b} \rangle$ es igual a la norma de $\vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = (7, 6) - (8, 4) = (-1, 2)$

$$d = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

OBSERVACIÓN: Este procedimiento es el más sencillo, pero $\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y}$ se podría haber obtenido con otros métodos.

- Mediante el procedimiento visto en la Sección 4:

Calculamos en primer lugar un vector \vec{z}_1 ortogonal a $\vec{b} = (2, 1)$. Un ejemplo es $\vec{z}_1 = (1, -2)$.

Considerada la base $B = \{\vec{b}, \vec{z}_1\}$, con un vector en la dirección de \vec{b} y otro en la dirección ortogonal \vec{z}_1 , se calculan las coordenadas de $(7, 6)$ respecto a esta base, resultando ser $(4, -1)$, es decir:

$$(7, 6) = 4(2, 1) + -1(1, -2) = (8, 4) + (-1, 2)$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\in \langle \vec{b} \rangle} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\in \langle \vec{z}_1 \rangle}$$

Por tanto la proyección de $(7, 6)$ sobre $\langle (2, 1) \rangle$ es el vector $\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = (8, 4)$

- A partir de la matriz asociada a la aplicación lineal vista en temas anteriores (matriz de la proyección ortogonal en \mathbb{R}^2), usando la base anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \dots$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = A \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$