

## 6 Base ortogonal mediante Gram-Schmidt

El algoritmo de Gram-Schmidt permite obtener una base ortogonal de cualquier subespacio de  $\mathbb{R}^n$  a partir de una base dada.

**TEOREMA.** Teorema de la Ortogonalización de Gram-Schmidt

Dada una base  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d\}$  de un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ , y definidos:

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= \vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \vec{b}_d &= \vec{a}_d - \frac{\vec{a}_d \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_d \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 - \dots - \frac{\vec{a}_d \cdot \vec{b}_{d-1}}{\vec{b}_{d-1} \cdot \vec{b}_{d-1}} \vec{b}_{d-1} \quad ,\end{aligned}$$

$\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$  resulta ser una base ortogonal de  $W$ . Además,

$$\langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k \rangle = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle, \text{ para } 1 \leq k \leq d$$

**Ejemplo 10.** Sea  $W = \langle (0, 1, 1), (1, 1, 2) \rangle$  un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ . Obtén una base ortogonal de este subespacio.

Sol.:

A partir de los vectores originales  $\vec{a}_1 = (0, 1, 1)$  y  $\vec{a}_2 = (1, 1, 2)$ , que forman la base  $B$ , construiremos la base  $B' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ , siendo  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  vectores de  $W$  ortogonales entre sí.

Tomamos  $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$  y a continuación construimos  $\vec{b}_2$ .

Consideremos el vector  $\text{proy}_{\langle \vec{b}_1 \rangle} \vec{a}_2$ ,

$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \text{proy}_{\langle \vec{b}_1 \rangle} \vec{a}_2$  es ortogonal a  $\vec{b}_1$  y pertenece a  $W$ , pues es combinación lineal de  $\vec{b}_1$  y  $\vec{a}_2$ .

Por tanto, una base ortogonal de  $W$  es:

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \text{proy}_{\langle \vec{b}_1 \rangle} \vec{a}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 \end{cases}$$

$$\vec{b}_1 = (0, 1, 1)$$

$$\vec{b}_2 = (1, 1, 2) - \frac{(1, 1, 2) \cdot (0, 1, 1)}{(0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)} (0, 1, 1) = (1, 1, 2) - 3/2(0, 1, 1) = (1, 1 - 3/2, 2 - 3/2) = (1, -1/2, 1/2)$$

Podemos tomar  $\vec{b}_2 = (2, -1, 1)$  para evitar fracciones.

Comprobamos que  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  forman una base ortogonal:  $(0, 1, 1) \cdot (2, -1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$

$$B' = \{(0, 1, 1), (2, -1, 1)\}$$

## 7 Ejercicios resueltos

**Ejemplo 11.** Supongamos dos clases de alimento,  $A$  y  $B$ , con las cantidades de vitamina  $C$ , calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

|              | $A$ | $B$ |
|--------------|-----|-----|
| Vitamina $C$ | 1   | 1   |
| Calcio       | 5   | 2   |
| Magnesio     | 3   | 1   |

a) Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:

$$\vec{v} = (17 \text{ mg de vitamina } C, 54 \text{ mg de calcio}, 31 \text{ mg de magnesio})$$

b) Determina el aporte más cercano al aporte exacto que se podría conseguir combinando los dos alimentos.

Sol.:

a) Para determinar si el aporte  $(17, 54, 31)$  se puede obtener combinando  $x$  unidades de alimento  $A$  con aporte  $(1, 5, 3)$  e  $y$  unidades de  $B$  con aporte  $(1, 2, 1)$  hay que resolver la siguiente ecuación:

$$x(1, 5, 3) + y(1, 2, 1) = (17, 54, 31)$$

$$\text{Por tanto el SL: } \begin{cases} x + y = 17 \\ 5x + 2y = 54 \\ 3x + y = 31 \end{cases}, \text{ con matriz ampliada } A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 5 & 2 & | & 54 \\ 3 & 1 & | & 31 \end{bmatrix}$$

$$A^* \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & -3 & | & -31 \\ 0 & -2 & | & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & -3 & | & -31 \\ 0 & 1 & | & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & 1 & | & 10 \\ 0 & -3 & | & -31 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

El SL es incompatible pues  $\text{rg}A=2$  y  $\text{rg}A^*=3$

Esto significa que  $\vec{v}$  no es combinación lineal de  $\vec{a} = (1, 5, 3)$  y  $\vec{b} = (1, 2, 1)$ , o dicho de otra forma, que  $\vec{v}$  no pertenece al plano  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ .

b) El vector más cercano a  $\vec{v} = (17, 54, 31)$  que se puede obtener combinando los alimentos  $A$  y  $B$  será la proyección ortogonal de  $\vec{v}$  sobre el subespacio generado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Por tanto tenemos que obtener:

$$\text{proy}_W \vec{v}, \text{ siendo } W = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

- Procedimiento según la Sección 5:

Obtendremos en primer lugar la proyección ortogonal sobre  $W^\perp$ , por ser más sencillo aplicar la fórmula sobre un subespacio de dimensión 1. Además la base de  $W$  que conocemos no es ortogonal.

Tomamos  $W = \langle (1, 5, 3), (1, 2, 1) \rangle$ , y nos falta el vector  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in W^\perp$ .

$$\begin{aligned} (1, 5, 3) \cdot (n_1, n_2, n_3) &= 0 \quad \begin{cases} n_1 + 5n_2 + 3n_3 = 0 \\ n_1 + 2n_2 + n_3 = 0 \end{cases} & A^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & -3 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \\ (1, 2, 1) \cdot (n_1, n_2, n_3) &= 0 \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 0 \end{bmatrix} & \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10/3 + 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (1/3n_3, -2/3n_3, n_3) \end{aligned}$$

$W^\perp = \langle (1/3, -2/3, 1) \rangle$  o más simple  $W^\perp = \langle (1, -2, 3) \rangle$ ,  $\vec{n} = (1, -2, 3)$ .

Este vector también se podría haber obtenido mediante el producto vectorial.

La proyección de  $\vec{v}$  sobre la recta  $\langle \vec{n} \rangle = W^\perp$  es:

$$\text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{(17, 54, 31) \cdot (1, -2, 3)}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{(17 - 108 + 93)}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_W \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = (17, 54, 31) - \frac{1}{7}(1, -2, 3) = (118/7, 380/7, 214/7) = 2/7(59, 190, 107).$$

La expresión decimal es  $\text{proy}_W \vec{v} = (16.8571, 54.2857, 30.5714)$

- Procedimiento según la Sección 4 (suma de subespacios ortogonales):

En el procedimiento anterior ya se presentó la obtención de la base de  $W^\perp$ ,  $\{\vec{n} = (1, -2, 3)\}$ .

Expresando  $(17, 54, 31)$  como combinación lineal de los vectores de la base completa de  $\mathbb{R}^3$   $B = \{(1, 5, 3), (1, 2, 1), (1, -2, 3)\}$  obtenemos:

$$(17, 54, 31) = \underbrace{\frac{48}{7}(1, 5, 3) + 10(1, 2, 1)}_{\text{proy}_W \vec{v}} + \underbrace{\frac{1}{7}(1, -2, 3)}_{\text{proy}_{W^\perp} \vec{v}},$$

sin más que resolver el SL  $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{n} \ | \ \vec{v}]$ , y tras encontrar que dicha solución es  $(48/7, 10, 1/7)$ .

$\text{proy}_W \vec{v} = 48/7(1, 5, 3) + 10(1, 2, 1) = (118/7, 380/7, 214/7)$  es el aporte más cercano posible.

Este procedimiento nos permite ver que el aporte más cercano posible se obtiene tomando 48/7 unidades del alimento tipo A y 10 unidades del alimento tipo B.

**Ejemplo 12.** a) Demuestra que no es posible expresar el vector  $\vec{v} = (15, 6, 4, -5)$  como combinación lineal de los vectores del conjunto  $S = \{(-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2)\}$ .

b) Obtén los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de  $S$  que dan el vector más cercano a  $\vec{v}$ .

Sol.:

$$a) \begin{bmatrix} -1 & 4 & | & 15 \\ 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & -1 & | & 4 \\ 1 & -2 & | & -5 \end{bmatrix}$$

Una forma de ver que el sistema es incompatible es sumar las ecuaciones 2 y 3, ya que se obtiene una ecuación de la forma  $[0 \ 0 \ | \neq 0]$

b) El vector de  $\langle S \rangle$  más cercano a  $\vec{v}$  es la proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\langle S \rangle$ . Obtendremos la proyección  $\hat{\vec{v}}$  y las coordenadas (los coeficientes del enunciado) de esta respecto de la base  $S$ , utilizando dos métodos distintos.

- Aplicando la fórmula de proyección, cuando se conoce base ortogonal del subespacio (Sección 5)

Los dos vectores de  $S$  forman base de  $\langle S \rangle$ , pero esa base no es ortogonal. Aplicamos Gram-Schmidt:

$$\vec{b}_1 = (-1, 0, 0, 1),$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_2 &= (4, 1, -1, -2) - \frac{(4, 1, -1, -2) \cdot (-1, 0, 0, 1)}{2}(-1, 0, 0, 1) = \\ &= (4, 1, -1, -2) - \frac{-6}{2}(-1, 0, 0, 1) = (4, 1, -1, -2) + 3(-1, 0, 0, 1) = (1, 1, -1, 1) \end{aligned}$$

Ya tenemos una base ortogonal en  $\langle S \rangle$ ,  $B' = \{(-1, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 1)\}$ , y podemos aplicar la fórmula de la Sección 5.

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\langle S \rangle} \vec{v} &= \frac{(15, 6, 4, -5) \cdot (-1, 0, 0, 1)}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(15, 6, 4, -5) \cdot (1, 1, -1, 1)}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= -10 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obtenemos ahora los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de  $\langle S \rangle$ , que llamaremos  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$ , que dan el vector más cercano a  $\vec{v}$ . Para ello hay que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & | & 13 \\ 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & | & -3 \\ 1 & -2 & | & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 & | & 13 \\ 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 & | & 13 \\ 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 3 \end{cases}}$$

- Método de descomposición ortogonal de  $\vec{v}$  usando suma de subespacios ortogonales (Sección 4)

Para obtener una base del complemento ortogonal de  $\langle S \rangle = \langle (-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, 2) \rangle$  tenemos que resolver el SL homogéneo con matriz de coeficientes  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

La solución general en forma paramétrica, tomando como parámetros  $z$  y  $t$  es:

$$(t, z - 2t, z, t)$$

Y la base más sencilla de  $\langle S \rangle^\perp$  es  $B = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ .

Puede resultar más claro modificar la forma paramétrica a  $(x, z - 2x, z, x)$ , teniendo en cuenta que  $t = x$ .

Resolviendo el sistema:  $\left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right]$ , obtenemos la solución  $(-1, 3, 7, 2)$ .

$\underbrace{\hspace{10em}}$  Base original de  $\langle S \rangle$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}$  Base de  $\langle S \rangle^\perp$

Los coeficientes buscados son  $-1$  y  $3$

, ya que

$$\text{proy}_{\langle S \rangle} \vec{v} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ es el vector de } \langle S \rangle \text{ más cercano a } \vec{v}$$

$$\text{proy}_{\langle S \rangle} \vec{v} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

## 8 Matriz de proyección ortogonal

### Método 1

La proyección ortogonal de  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  sobre  $W$  es un endomorfismo en  $\mathbb{R}^n$ , con matriz estándar asociada  $A_{\text{proy}}$  tal que

$$A_{\text{proy}}\vec{v} = \hat{\vec{v}} \quad A_{\text{proy}} \text{ es cuadrada de orden } n.$$

Conocida una base  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$  de  $W$ , puede obtenerse  $A_{\text{proy}}$  mediante la siguiente expresión<sup>2</sup>:

$$A_{\text{proy}} = B(B^t B)^{-1} B^t \quad [2a]$$

Es obvio que la matriz  $B^t B$  es simétrica<sup>3</sup>. Esta matriz es invertible debido a la condición de que las columnas de  $B$  sean linealmente independientes<sup>2</sup>.

Desarrollamos seguidamente el producto  $B^t B$ :

$$B^t B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^t \\ \vec{b}_2^t \\ \vdots \\ \vec{b}_d^t \end{bmatrix}_{d \times n} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_d \end{bmatrix}_{n \times d} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_d \\ \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_d \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vec{b}_d \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_d \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_d \cdot \vec{b}_d \end{bmatrix}$$

(también podríamos deducir de aquí que como el producto escalar es simétrico la matriz  $B^t B$  es simétrica.)

En el desarrollo de  $B^t B$  vemos de forma inmediata que si la base  $B$  es ortogonal  $B^t B$  es una matriz diagonal, y que si la base es ortonormal  $B^t B = I_d$ .

En este último caso la matriz de proyección queda:  $A_{\text{proy}} = B B^t \quad [2b]$ .

Se puede demostrar fácilmente, utilizando la expresión [2a], que la matriz es simétrica e idempotente, es decir que  $A_{\text{proy}}^2 = A_{\text{proy}}$ .

La ventaja de las expresiones obtenidas es que sólo requieren calcular una base  $B$  de  $W$ . En la expresión [2a] una base cualquiera y en la expresión [2b] una base ortonormal.

<sup>2</sup>No presentamos su deducción

<sup>3</sup> $(M^t M)^t = M^t (M^t)^t = M^t M$

## Método 2: Obtención de $A_{\text{proy}}$ a partir de su semejante diagonal

Este procedimiento se usó en el Tema 5 al estudiar la proyección ortogonal sobre una recta en  $\mathbb{R}^2$  y sobre un plano en  $\mathbb{R}^3$ . Aquí lo extendemos a subespacios de  $\mathbb{R}^n$  de cualquier dimensión.

En primer lugar obtenemos, a partir de la base  $B$  del subespacio considerado  $W$ , una base  $C$  de  $W^\perp$ , resolviendo el SL  $B^t \vec{x} = \vec{0}$ , o lo que es lo mismo, obteniendo una base de  $\text{Nul}(B^t)$ .

Así tenemos ya las bases de los dos subespacios propios ortogonales entre sí :

$\text{Col}(B)$  o  $\langle B \rangle$  es el subespacio propio de autovalor 1,  $V_1$ .

$V_1$  es  $W$ : los vectores de  $W$  se transforman como  $f(\vec{v}) = \vec{v}$ .

$\text{Col}(C)$  o  $\langle C \rangle$  es el subespacio propio de autovalor 0,  $V_0$ .

$V_0$  es  $W^\perp$ . Los vectores de  $W^\perp$  se transforman como  $f(\vec{v}) = \vec{0}$

La matriz cuadrada  $P = [B \ C] = [ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_d \ \vec{b}_{d+1} \ \vec{b}_{d+2} \ \dots \ \vec{b}_n ]$ , tiene como columnas una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por los autovectores de la proyección ortogonal.

$$\text{Por tanto } A_{\text{proy}} = PDP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

Al ser los subespacios propios ortogonales, podemos obtener una matriz  $P$  cuyas columnas sean base ortonormal, sin más que unir una base ortonormal  $B$  y una base ortonormal  $C$ . Podemos denotar esa matriz como  $Q$ , que es la letra que se usa en general en Álgebra para denotar matrices ortogonales.  $Q^{-1} = Q^t$ , por tanto la matriz  $A_{\text{proy}}$  se obtiene, usando  $Q$ , como:

$$A_{\text{proy}} = QDQ^t.$$

Este procedimiento requiere determinar la base del complemento ortogonal de  $W$ .

**Ejemplo 13.** Obtén la matriz de la proyección ortogonal en  $\mathbb{R}^3$  sobre el plano  $W$  de ecuación implícita  $x + y + z = 0$ .

Sol.:

$B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$  es base de  $W$ , pero no es base ortogonal. Vamos a buscar una base ortonormal de  $W$  para poder utilizar la sencilla expresión [2b],  $A_{\text{proy}} = BB^t$ .

Aplicamos Gram-Schmidt tomando  $\vec{b}_1 = (1, -1, 0)$

$$(1, 0, -1) - \frac{(1, 0, -1) \cdot (1, -1, 0)}{2}(1, -1, 0) = (1, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = (1/2, 1/2, -1)$$

Tomamos  $\vec{b}_2 = (1, 1, -2)$

La base  $B' = \{(1, -1, 0)/\sqrt{2}, (1, 1, -2)/\sqrt{6}\}$  es base ortonormal de  $W$ .

$$A_{\text{proy}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Solución mediante “diagonalización ortogonal”:

$$A_{\text{proy}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

## 9 Ejercicios

**Ejercicio 1.** Se considera el subespacio  $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z - t = 0\}$

- Calcula una base ortonormal de  $H$ .
- Calcula una base ortonormal de  $H^\perp$ .
- Calcula la proyección ortogonal del vector  $\vec{v} = (1, 0, 1, 1)$  sobre  $H$ .
- Calcula la distancia de  $\vec{v}$  a  $H$ .

**Ejercicio 2.** Considerado en  $\mathbb{R}^4$  el subespacio vectorial  $W = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, -1) \rangle$  y el vector  $\vec{v} = (1, 0, 0, 13)$ , se pide:

- Una base de  $W^\perp$ .
- El vector  $\vec{v}_1 \in W$  más cercano a  $\vec{v}$ .
- El vector  $\vec{v}_2 \in W^\perp$  más cercano a  $\vec{v}$ .
- La distancia de  $\vec{v}$  a  $W$  (la expresión más simplificada posible).

**Ejercicio 3.** Obtén la solución de mínimos cuadrados del SL  $A\vec{x} = \vec{b}$ , con  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

y  $\vec{b} = (8, 7, 3, -4)$ .

La solución pedida es la del sistema compatible determinado  $A\vec{x} = \hat{\vec{b}}$ , siendo  $\hat{\vec{b}}$  la proyección ortogonal de  $\vec{b}$  sobre las columnas de  $A$ .

Por tanto  $A\vec{x} = A(A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$

$A(\vec{x} - (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}) = \vec{0}$ , sacando factor común  $A$ .

$\vec{x} - (A^t A)^{-1} A^t \vec{b} = \vec{0}$  pues las columnas de  $A$  son l.i., y por tanto no existen soluciones distintas de la trivial.

$\vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$

Por tanto resolviendo el SL de matriz ampliada  $[A^t A | A^t \vec{b}]$  obtendríamos, de la forma más directa posible, la solución de mínimos cuadrados.

**Ejercicio 4.** Diagonaliza ortogonalmente la matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , es decir, obtén  $Q$  ortogonal y  $D$  diagonal tales que  $A = QDQ^t$ . Realiza la comprobación.

**Ejercicio 5.** Considera  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{b}_1 = (-2, 2, 1)$  y  $\vec{b}_2 = (1, 1, 0)$ . Comprueba que  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  son autovectores de  $A$  y diagonaliza ortogonalmente  $A$ .

**Ejercicio 6.** a) Obtén la matriz de proyección sobre el subespacio  $W$  generado por las columnas de la matriz  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ , utilizando la expresión  $A_{\text{proy}} = UU^t$  siendo  $U$  una base ortonormal de  $W$ . b) Obtén la proyección ortogonal sobre  $W$  del vector  $\vec{b} = (8, 7, 3, -4)$ , usando la matriz anterior. (Este ejercicio tiene relación con el Ejercicio 3).

## 10 Diagonalización ortogonal de las matrices simétricas

En la Sección 2 enunciamos el siguiente **TEOREMA**: “ $A$  real es simétrica si y sólo si es diagonalizable y todos sus subespacios propios son ortogonales entre sí”.

Como a su vez, cada subespacio propio admite base ortonormal, tenemos el siguiente resultado:

- Si  $A$  es una matriz real, cuadrada y simétrica, entonces existen  $Q$  ortogonal y  $D$  diagonal tales que  $A = QDQ^{-1}$ .  $D$  es la matriz de autovalores, y  $Q$  tiene por columnas una base de autovectores que es además base ortonormal, en el orden de sus correspondientes autovalores en  $D$ .

Teniendo en cuenta que  $Q^{-1} = Q^t$ , podemos expresar la factorización anterior en la forma  $A = QDQ^t$ .

Por existir la matriz ortogonal  $Q$  tal que  $A = QDQ^{-1}$  se dice de  $A$  que es ‘ortogonalmente diagonalizable’.

El teorema anterior y el resultado que acabamos de ver, para toda matriz  $A$  real y simétrica de orden  $n$ , los podemos desglosar en las siguientes afirmaciones:

1. La ecuación característica de  $A$  tiene  $n$  raíces reales contando multiplicidades, por tanto  $n$  autovalores reales contando multiplicidades.
2. La dimensión de los subespacios propios es igual a la multiplicidad algebraica de los correspondientes autovalores.
3. Los subespacios propios correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí respecto del producto escalar canónico en  $\mathbb{R}^n$ .
4. Obteniendo para cada subespacio propio una base ortogonal<sup>4</sup>, y uniendo estas bases, lograremos una base ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $A$ . Dividiendo cada vector por su norma obtendremos una base ortonormal.

$A = QDQ^{-1} = QDQ^t$  con  $Q = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n]$  siendo  $\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $A$ .

- Se demuestra fácilmente que se cumple el resultado recíproco, o lo que es lo mismo, la implicación inversa del teorema anterior:  $A$  ortogonalmente diagonalizable implica  $A$  simétrica. En efecto, considerando  $A = QDQ^t$  y tomando traspuestas obtenemos  $A^t = (QDQ^t)^t = QDQ^t = A$ .

**TEOREMA.**  $A$  es simétrica si y sólo si  $A$  es ortogonalmente diagonalizable.

---

<sup>4</sup>Está demostrado que los vectores de subespacios propios distintos son ortogonales entre sí, pero dentro de un mismo subespacio propio de dimensión mayor o igual que 2 debemos determinar una base ortogonal.