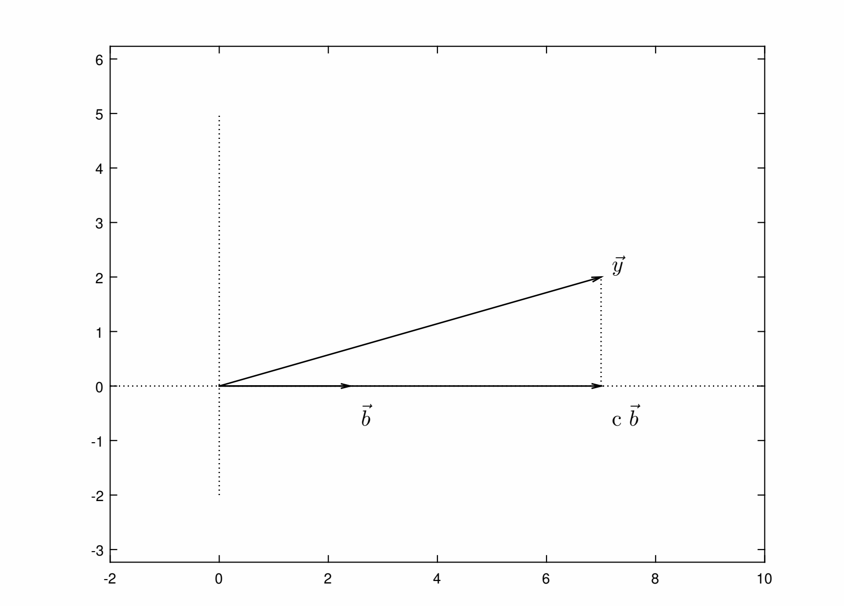
3.2 Proyección y simétrico respecto de una recta en $\mathbb{R}^2$

Presentamos el esquema en $\mathbb{R}^2$ de la proyección ortogonal del vector $\vec{y}$ sobre la recta vectorial generada por el vector $\vec{b}$.



$\hat{\vec{y}} = \text{proy}_{<\vec{b}>}\vec{y} = c\,\vec{b}$ es la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre la recta generada por $\vec{b}$, denotada como $<\vec{b}>$.

$\vec{z} = \vec{y} - \; c\vec{b}$ es la componente de $\vec{y}$ ortogonal al vector $\vec{b}$ y a la recta $<\vec{b}>$.

$$(\vec{y} - c\vec{b})\;.\;\vec{b} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{y}.\vec{b} - c\;\vec{b}.\vec{b} = 0 \quad\Rightarrow\quad c = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}$$

$$\hat{\vec{y}} = \text{proy}_{<\vec{b}>}\vec{y} = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\;\vec{b}$$

Obsérvese que el vector proyección de $\vec{y}$ sobre $<\vec{b}>$ no depende de como esté escalado $\vec{b}$ (con múltiplos de $\vec{b}$ obtendríamos el mismo vector proyección).

La misma fórmula se aplicaría para la proyección ortogonal de un vector sobre una recta vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 18. Considera en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{y} = (7,6)$ y $\vec{b} = (2,1)$. Encuentra la **proyección ortogonal** de $\vec{y}$ sobre $<\vec{b}>$ y la distancia de $\vec{y}$ a la recta $<\vec{b}>$. Encuentra el **simétrico** de $\vec{y}$ respecto de $<\vec{b}>$ y comprueba que la norma del vector simétrico es igual a la norma del vector original.

Sol:

$$\text{proy}_{<\vec{b}>}\;\vec{y} = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\;\vec{b}$$

$$\text{proy}_{<\vec{b}>}\;\vec{y} = \frac{(7,6).(2,1)}{(2,1).(2,1)}\;(2,1) = \frac{20}{5}\;(2,1) = 4(2,1) = (8,4)$$

• La distancia de $\vec{y}$ a $<\vec{b}>$ es igual a la norma de $\vec{z} = \vec{y} - proy_{<\vec{b}>}\ \vec{y}$

dist $= \| \vec{y} - \text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} \|$

$\vec{y} - \text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} = (7,6) - (8,4) = (-1,2)$ dist $= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

• $\vec{y}_{\text{sim}} = proy_{<\vec{b}>}\ \vec{y} - \vec{z} = (8,4) - (-1,2) = (9,2)$

También se podría haber calculado como:

$\vec{y}_{\text{sim}} = \vec{y} - 2\vec{z} = (7,6) - (-2,4) = (9,2)$

La norma de $\vec{y} = (7,6)$ es $\sqrt{49+36} = \sqrt{85}$ y la norma de $\vec{y}_{\text{sim}}$ es $\sqrt{81+4} = \sqrt{85}$

3.3 Proyección ortogonal de un vector sobre un plano y simétrico respecto del plano en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 19. Considerados en $\mathbb{R}^3$ el vector $\vec{v} = (5,-1,1)$ y el plano Π de ecuación $x - 2y + z = 0$.

a) Obtén la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre Π.

En primer lugar proyectamos sobre la recta vectorial perpendicular al plano y seguidamente tenemos que la proyección sobre el plano es el vector original menos la proyección sobre la recta perpendicular al plano.

$\vec{n} = (1,-2,1)$ es el vector ortogonal al plano.

Calcularemos $\text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v}$, y seguidamente $\text{proy}_{\Pi}\vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v}$

$$\text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}{1+4+1}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{8}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_{\Pi}\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-4/3 \\ -1+8/3 \\ 1-4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

b) Obtén el simétrico de $\vec{v}$ respecto de Π.

Es sencillo deducir: $\vec{v}_{\text{sim}} = \text{proy}_{\Pi}\vec{v} - \text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v}$

El simétrico tiene la misma componente en el plano Π que el vector $\vec{v}$, y en la dirección de la recta $<\vec{n}>$ la componente opuesta a la del vector $\vec{v}$.

$$\vec{v}_{\text{sim}} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 13/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}$$

También podríamos haber utilizado esta expresión para el simétrico:

$\vec{v}_{\text{sim}} = \vec{v} - 2\,\text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v} = (5,-1,1) - 2(4/3,-8/3,4/3) = (5,-1,1) + (-8/3,16/3,-8/3) = (7/3,13/3,-5/3)$

c) Obtén la distancia de $\vec{v}$ a Π.

La distancia a Π es la norma de $\text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v} = 4/3(1,-2,1)$.

$\text{dist} = 4/3\sqrt{1+4+1} = 4/3\ \sqrt{6}$

d) <u>Obtén la norma del simétrico de $\vec{v}$.</u>

La norma de $\vec{v}_{\text{sim}} = 1/3\ (7, 13, -5)$ es: $\quad 1/3\sqrt{49+169+25} = 1/3\ \sqrt{243}$

Es obviamente igual a la norma de $\vec{v}$, que es $\sqrt{27}$

e) <u>Obtén el coseno del ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con su proyección sobre Π.</u>

Razona si el ángulo es agudo u obtuso.

$$cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \text{proy}_{\Pi}\vec{v}}{\parallel \vec{v} \parallel \parallel \text{proy}_{\Pi}\vec{v} \parallel}$$

Los vectores son $(5, -1, 1)$ y $1/3(11, 5, -1)$

El ángulo que forman estos dos vectores es el mismo que el que forman $(5, -1, 1)$ y $(11, 5, -1)$, por tanto:

$$\cos\theta = \frac{(5, -1, 1) \cdot (11, 5, -1)}{\sqrt{27}\sqrt{121+25+1}} = \frac{55-5-1}{\sqrt{27}\sqrt{147}} = \frac{49}{\sqrt{27}\sqrt{147}}$$

Es agudo porque el producto escalar es positivo.

$$\arccos\frac{49}{\sqrt{27}\sqrt{147}} = 38.94\,\text{grados}$$

También podría obtenerse el ángulo $\alpha < 90$ grados que forma $\vec{v}$ con la recta generada por $\vec{n} = (5, -1, 1)$ y seguidamente tendríamos $\theta = 90 - \alpha$

---

4 Producto vectorial

El producto vectorial, también denominado producto cruz, solo está definido en $\mathbb{R}^3$. Es una operación interna entre dos elementos y cerrada, puesto que el resultado también es elemento de $\mathbb{R}^3$.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ se define como el vector siguiente:

$$\vec{u} \times \vec{v} \ = \ \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{6}]$$

Existe una forma sencilla de calcular el producto vectorial utilizando el siguiente determinante.[1]

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Sin más que aplicar la regla de Sarrus para los determinantes de orden 3, obtenemos:
$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$
Podemos observar que las componentes coinciden con las de la definición.

Vemos a continuación una serie de propiedades que cumple el producto vectorial, y de ahí el interés en su definición.

[1]en realidad no es un determinante pues los elementos de la primera fila no son escalares, pero el procedimiento ayuda a recordar cómo calcular el producto cruz

- El vector $\vec{z} = \vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

  Demostramos la ortogonalidad a $\vec{u}$:

  $(u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3 = 0$

  desarrollando la expresión se obtienen 6 sumandos, opuestos dos a dos.

  La demostración de la ortogonalidad a $\vec{v}$ es similar.

- El sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ es el del avance de un tornillo dextrógiro que gira del primer al segundo vector por el camino más corto.

  Se comprueba fácilmente que efectivamente:

  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\quad$ $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

  $$\vec{i}\times\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}$$

- El producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

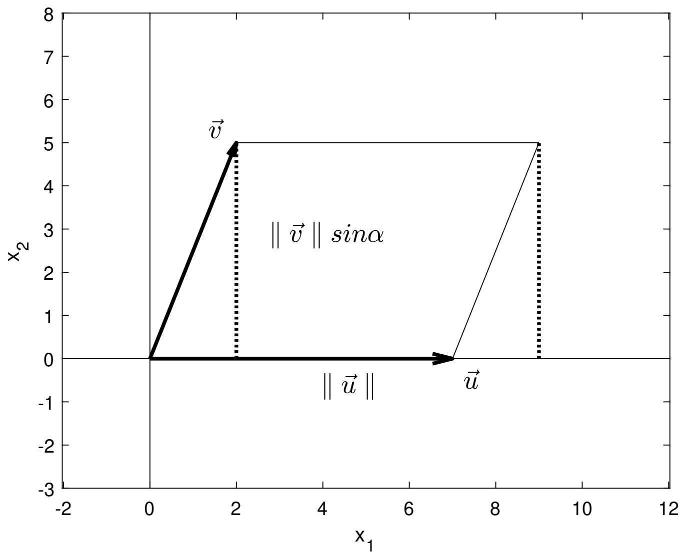
  Efectuar la operación en orden inverso equivale a intercambiar dos filas en el determinante, lo que cambia su signo. También es obvio que el camino más corto del giro de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tiene sentido inverso al camino más corto de $\vec{v}$ a $\vec{u}$.

- Considerados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ninguno de ellos el vector $\vec{0}$, se tiene:

  $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \operatorname{sen}\alpha$, siendo α el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

  El requisito de que ningún vector sea $\vec{0}$ es debido a que solo hemos definido ángulo entre vectores distintos de $\vec{0}$.

  La norma del producto vectorial tiene una interesante interpretación geométrica pues es el área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Ver el esquema en la siguiente figura.



  Obviamente, un medio de la norma es el área del triángulo cuyos vértices son el origen, el extremo de $\vec{u}$, y el extremo de $\vec{v}$.

- El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector $\vec{0}$ si y solo si los dos vectores son l.d..

5 Ejercicios

EJERCICIO 1. Para el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 3)$ y $C = (-3, 7)$, obtén:
a) Los ángulos interiores en A, B y C. b) El perímetro.
c) El área. d) El centro geométrico, centroide o baricentro.
e) El cuarto vértice del paralelogramo de vértices consecutivos CAB

Bisectrices en E_2

EJERCICIO 2. MATLAB. Considera en E_2 el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 4)$ y $C = (-8, 5)$.
a) Determina un **vector bisector** $\vec{v}$ en A, o vector que divida el ángulo interior en A en dos partes iguales.
b) Obtén vectores bisectores $\vec{v_1}$ entre $\vec{AB}$ y $\vec{v}$ y $\vec{v_3}$ entre $\vec{v}$ y $\vec{AC}$.
c) Comprueba que los cuatro ángulos formados en A son iguales y escribe su valor.

EJERCICIO 3. (HVZ12. Ejemplo I. páginas 325-326)
a) Halla la ecuación vectorial paramétrica de la bisectriz interior de las rectas:
$r_1 : x - y = -1$
$r_2 : 2x + y = 4$
b) Halla la ecuación vectorial paramétrica de la bisectriz exterior.

Puntos de proyección ortogonal en rectas y planos afines

EJERCICIO 4. (HVZ12. Ejemplo F. página 322). En E_3 obtén el punto P' correspondiente a la proyección de $P = (1, 2)$ sobre la recta r de ecuación $-2x + 3y = -6$.

EJERCICIO 5. (HVZ12. Ejemplo G. página 322). En E_3 obtén el punto P' correspondiente a la proyección de $P = (1, 2, 3)$ sobre $x + y - 2z = 3$.

6 Aplicación de los determinantes para el cálculo de áreas y volúmenes

1) El área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores que lo determinan.

Tomando en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el área del paralelogramo que definen es:

$$\text{Area} = |\ |\ \vec{u}\ \vec{v}\ |\ | = |\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\ |$$

Las barras interiores corresponden al determinante y las exteriores al valor absoluto.

Los vectores se toman con su origen en O, por tanto:

$\vec{u} = \vec{OU}$, siendo U el extremo del vector $\vec{u}$.

$\vec{v} = \vec{OV}$, siendo V el extremo del vector $\vec{v}$.

Este paralelogramo tiene vértices consecutivos U, O, V.

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes fueran B y C, usaríamos:

$\vec{u} = \vec{AB} \qquad \vec{v} = \vec{AC}$

2) El volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores que lo determinan.

Tomando en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el volumen del paralelepípedo que definen es:

$$\text{Volumen} = |\ |\ \vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}\ |\ | = |\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}\ |$$

Las barras interiores corresponden al determinante y las exteriores al valor absoluto.

Los vectores se toman con su origen en O, por tanto:

$\vec{u} = \vec{OU}$, siendo U el extremo del vector $\vec{u}$.

$\vec{v} = \vec{OV}$, siendo V el extremo del vector $\vec{v}$.

$\vec{w} = \vec{OW}$, siendo W el extremo del vector $\vec{w}$.

El vértice principal es O y U, V y W son los vértices adyacentes.

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes fueran B, C y D usaríamos:

$\vec{u} = \vec{AB} \qquad \vec{v} = \vec{AC} \qquad \vec{w} = \vec{AD}$

Teniendo en cuenta que $|A| = |A^t|$, también podríamos haber colocado los vectores en filas.

$$\text{Área del paralelogramo} = |\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\ |$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = |\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\ |$$

EJERCICIO 6.
a) Considerado el paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ con vértices consecutivos $A = (-2, -2)$, $B = (0, 3)$, $C = (4, -1)$, calcula su área.

Presentamos su solución en MATLAB

```
A=[-2 -2]'; B=[0 3]'; C=[4 -1]';   % Vertices escritos como matrices columna
abs  (det([A-B C-B]))              % Valor absoluto del determinante
ans
28
```

La solución es 28 unidades al cuadrado.

b) Considerado el paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ con un vértice en $A = (1, 1, 1)$ y vértices adyacentes en $B = (3, 3, 6)$, $C = (5, 7, 3)$ y $D = (4, -10, 9)$, calcula su volumen.

```
A=[1 1 1]' ;
B=[3 3 6]' ;
C=[5 7 3]' ;
D=[4 -10 9]' ;
abs(det([B-A C-A D-A]))
ans
222
```

El volumen tiene 222 unidades al cubo.

EJERCICIO 7. (HVZ12. Ejemplo B. página 341). Calcula el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación 2x+y+3z=6 con los ejes coordenados.
Realiza el boceto, señalando los vértices.

EJERCICIO 8. (HVZ12. Ejemplo D. página 346). Halla el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (0, 1, 2))$, $\vec{c} = (1, -2, -1)$.