

3 Producto escalar. Longitudes, distancias y ángulos

3.1 El producto escalar canónico en \mathbb{R}^n

El producto escalar canónico en \mathbb{R}^n es una operación interna que permite asignar longitudes a los vectores y obtener distancias y ángulos entre ellos. Se le denomina también “producto escalar usual” o “producto escalar habitual”.

3.1.1 Definición

El producto escalar canónico de dos vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ de \mathbb{R}^n se define como

el siguiente escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \rho \quad [1]$$

El producto escalar vemos pues que es una operación interna y que no es cerrada. El resultado no es un elemento del conjunto \mathbb{R}^n sino de \mathbb{R} . De ahí el nombre de producto escalar: el resultado es un escalar. Es la suma de n productos de dos números reales, y por tanto es un real.

También se le denomina producto punto.

Se cumplen las propiedades que vemos a continuación. Son muy sencillas de demostrar, por lo que la demostración se presenta solo para la primera.

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

En efecto, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \cdot \vec{w} = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \dots + (u_n + v_n)w_n$

Y ya que en \mathbb{R} se verifica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + \dots + u_nw_n + v_nw_n$$

Utilizando ahora la propiedad conmutativa de la suma de reales, reagrupamos los sumandos:

$$= u_1w_1 + u_2w_2 + \dots + u_nw_n + v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, con justificación muy similar a la anterior.

- $\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Por la propiedad conmutativa del producto de reales)

Esta propiedad se conoce como simetría del producto escalar.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, con $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ (Es una suma de cuadrados: el resultado solo puede ser positivo o cero)

Expresión matricial del producto escalar canónico:

Partimos de la ecuación [1]:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \vec{u}^t \vec{v}$$

↑

El producto escalar de \vec{u} y \vec{v} corresponde al producto matricial del traspuesto de \vec{u} y \vec{v} . Es el producto de una matriz $1 \times n$ por una matriz $n \times 1$, que da como resultado una matriz 1×1 , es decir, un escalar.

Ejemplo 9 En \mathbb{R}^3 y considerando el producto escalar canónico, determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$, con

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Sol.:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = [2 \quad -5 \quad -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \times 3 + (-5) \times 2 + (-1) \times (-3) = 6 - 10 + 3 = -1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^t \vec{u} = [3 \quad 2 \quad -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \times 2 + 2 \times (-5) + (-3) \times (-1) = 6 - 10 + 3 = -1$$

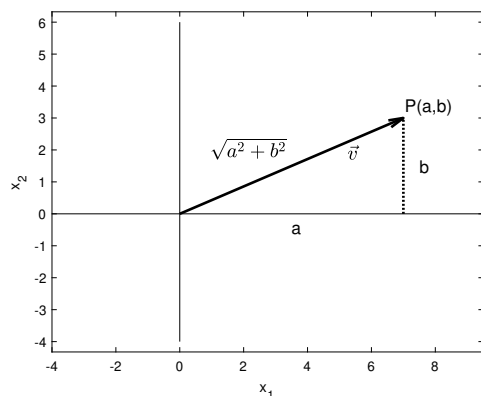
3.1.2 Longitud o norma de un vector

Considerado \mathbb{R}^n , $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, y el producto escalar canónico, se denomina **norma** o **longitud** de \vec{v} , y se denota $\|\vec{v}\|$ al escalar:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^t \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \quad [2a]$$

Nótese que la raíz está siempre definida, ya que $\vec{v} \cdot \vec{v}$ es positivo o cero (es cero solo si $\vec{v} = \vec{0}$).

En la figura se observa como la longitud definida coincide con lo que conocemos como longitudes de los vectores de \mathbb{R}^2 .



Propiedades de la norma:

- $\|c\vec{v}\| = |c| \|\vec{v}\|$
- Desigualdad triangular $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

La igualdad se cumple cuando alguno de ellos es cero, o, sin serlo, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es **unitario** si $\|\vec{v}\| = 1$

Multiplicando el vector no nulo \vec{v} por el escalar $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ obtenemos un vector $\vec{v}_o = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ que es unitario. El proceso de crear \vec{v}_o a partir de \vec{v} se denomina **normalización** de \vec{v} .

\vec{v} y \vec{v}_o tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Elevando al cuadrado la expresión [2a] se tiene:

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^t \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \quad [2b]$$

Con frecuencia resulta conveniente trabajar con las normas al cuadrado, para evitar la expresión con la raíz cuadrada. Si se maneja esta expresión hay que recordar que la norma toma valores solo en \mathbb{R}^+ (0 incluido).

Ejemplo 10 Encuentra un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v} = (2, -3)$.

Sol:

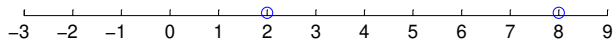
$$\|\vec{v}\|^2 = 4 + 9 = 13 \qquad \vec{v}_o = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}} \right)$$

también se puede escribir, más simplificado:

$$\vec{v}_o = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)$$

3.1.3 Distancia entre dos vectores

Recordamos que si a y b son números reales, la distancia en \mathbb{R} entre a y b es el real positivo $|b - a|$. En la figura se da un ejemplo.



Distancia entre $x_1 = 2$ y $x_2 = 8$: $|8 - 2| = |6| = 6$

Otro ejemplo, distancia entre $x_1 = -3$ y $x_2 = -4$:

$$|-4 - (-3)| = |-1| = 1$$

Esta definición de distancia se puede extender a \mathbb{R}^n .

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la **distancia entre \vec{u} y \vec{v}** , denotada como $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v})$, es la norma del vector $\vec{v} - \vec{u}$.

Esto es, $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{(\vec{v} - \vec{u})^t (\vec{v} - \vec{u})} = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \dots + (v_n - u_n)^2}$

[3]

Propiedades de la distancia:

- $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{v}$, y $\text{dist}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$
- $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{dist}(\vec{v}, \vec{u})$
- Desigualdad triangular $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) \leq \text{dist}(\vec{u}, \vec{w}) + \text{dist}(\vec{w}, \vec{v})$

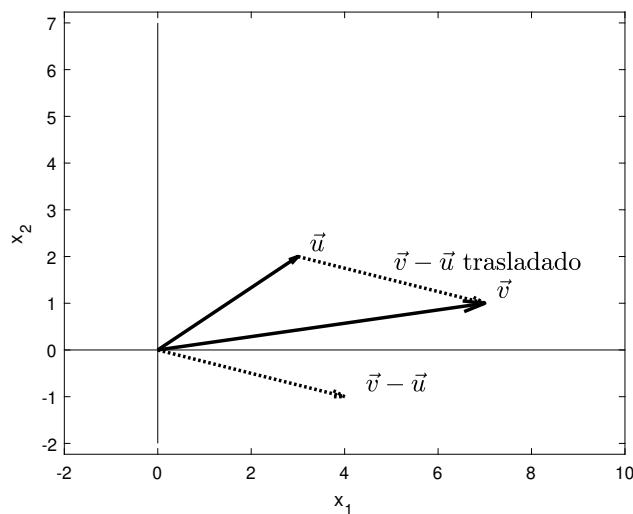
Ejemplo 11 a) En \mathbb{R}^2 y con el producto escalar canónico calcula la distancia entre los vectores $\vec{v} = (7, 1)$ y $\vec{u} = (3, 2)$.

b) Representa gráficamente los vectores \vec{u} , \vec{v} y $\vec{v} - \vec{u}$ (todos ellos con origen en $(0, 0)$). Seguidamente representa el vector $\vec{v} - \vec{u}$ situando su origen en \vec{u} , como si se tratara del vector original trasladado. Al situarlo en esta localización se entiende bien que su norma corresponde a la distancia entre \vec{u} y \vec{v} .

Sol.:

$$\vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 &= 4^2 + (-1)^2 = 17 \\ \|\vec{v} - \vec{u}\| &= \sqrt{17} \end{aligned}$$



Ejemplo 12 a) Considerado el paralelogramo de vértices consecutivos $A = (-3, 2)$, $O = (0, 0)$, $B = (7, 1)$, se pide:

Calcular las coordenadas del cuarto vértice C del paralelogramo.

Calcular las longitudes de sus diagonales.

b) Resuelve el mismo ejercicio para el paralelogramo de vértices consecutivos $P = (3, 2)$, $O = (0, 0)$, $B = (7, 1)$. Designa el cuarto vértice como D .

c) Resuelve el mismo ejercicio para el paralelogramo de vértices consecutivos $P = (3, 2)$, $Q = (1, 1)$, $B = (7, 1)$. Designa el cuarto vértice como E .

Ejemplo 13 Considerando el producto escalar canónico en \mathbb{R}^4 , calcula la distancia entre los vectores $\vec{v} = (7, 1, 1, 5)$ y $\vec{u} = (3, 2, 1, 3)$.

Sol.:

$$\vec{v} - \vec{u} = (4, -1, 0, 2)$$

$$\text{dist} = \|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{16 + 1 + 0 + 4} = \sqrt{21}$$

3.1.4 Ángulo entre dos vectores

Con el producto escalar canónico en \mathbb{R}^n se define ángulo entre dos vectores \vec{u} y \vec{v} , ninguno de ellos el vector $\vec{0}$, como el escalar $\alpha = \text{áng}(\vec{u}, \vec{v})$ siguiente:

$$\alpha \in [0, \pi] \text{ tal que } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\alpha$$

Despejando $\cos\alpha$:
$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad [4]$$

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi/2$

• $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in [0, \pi/2)$

Caso $\alpha = 0$ Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \lambda \|\vec{u}\|^2$

$$\cos\alpha = \frac{\lambda \|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\| \|\lambda\vec{u}\|} = \frac{\lambda \|\vec{u}\|^2}{|\lambda| \|\vec{u}\|^2} = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 0$$

• $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (\pi/2, \pi]$

Caso $\alpha = \pi$ Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \lambda \|\vec{u}\|^2$

$$\cos\alpha = \frac{\lambda \|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\| \|\lambda\vec{u}\|} = \frac{\lambda \|\vec{u}\|^2}{|\lambda| \|\vec{u}\|^2} = -1 \quad \Rightarrow \alpha = \pi$$

OBSERVACIÓN: Dos vectores \vec{u} y \vec{v} en \mathbb{R}^n , ambos distintos de $\vec{0}$, son linealmente dependientes si y sólo si el ángulo que forman es 0 o π .

Ejemplo 14 En \mathbb{R}^2 considera el producto escalar habitual, y los siguientes vectores: $\vec{u} = (7, 1)$, $\vec{v} = (-3, 3)$, $\vec{w} = (3, -3)$ y $\vec{z} = (4, -3)$.

Calcula los siguientes ángulos:

- Ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} :
- Ángulo que forman \vec{u} y \vec{w} :
- Ángulo que forman \vec{u} y \vec{z} :

Sol.:

$$\bullet (7, 1) \cdot (-3, 3) = \sqrt{50} \sqrt{18} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{-21 + 3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{25 \times 4 \times 9}} = \frac{-18}{5 \times 2 \times 3} = -\frac{3}{5}$$

arco coseno($-\frac{3}{5}$) es el ángulo buscado.

El ángulo es $\alpha \simeq 2.2143$ radianes $\simeq 126.8699$ grados

$$\bullet (7, 1) \cdot (3, -3) = \sqrt{50} \sqrt{18} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{21 - 3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \times \sqrt{2}} = \frac{3}{5}$$

El ángulo es $\alpha \simeq 0.9273$ radianes $\simeq 53.1301$ grados

Nótese que \vec{v} y \vec{w} son vectores opuestos, por tanto la suma del ángulo de \vec{u} con \vec{v} más el ángulo de \vec{u} con \vec{w} es igual a 180 grados.

$$\bullet (7, 1) \cdot (4, -3) = \sqrt{50} \cdot 5 \cos\alpha$$

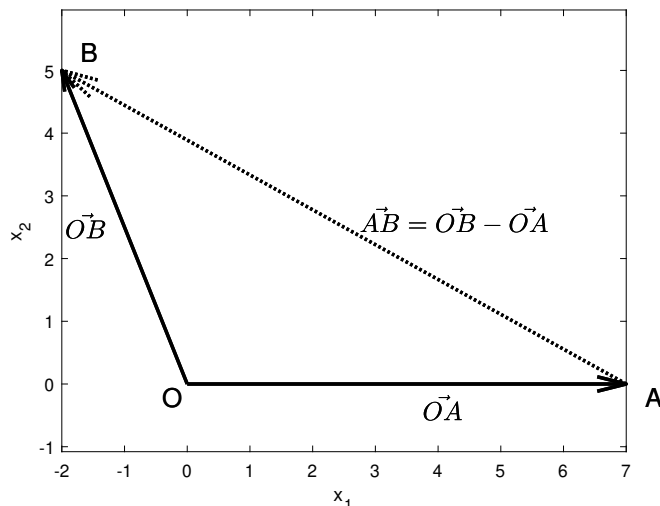
$$\cos\alpha = \frac{28 - 3}{5\sqrt{50}} = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7071$$

El ángulo es $\alpha = 45$ grados

En este ejercicio es sencillo representar gráficamente los vectores, y así comprobar que donde esperamos ángulos agudos en efecto obtenemos ángulos agudos y que donde esperamos ángulo obtuso obtenemos ángulo obtuso.

Ejemplo 15 Considera el plano E_2 y en él el triángulo con vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (7, 0)$ y $B = (-2, 5)$. Determina los tres ángulos interiores del triángulo. Ten en cuenta que la suma de los ángulos ha de ser igual a 180 grados.

Sol.:



- Con el producto escalar (p.e.) de los vectores \vec{OA} y \vec{OB} podemos obtener el ángulo en O .
- Con el p.e. de los vectores $-\vec{OA}$ y \vec{AB} podemos obtener el ángulo en A .
 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2, 5) - (7, 0) = (-9, 5)$
- Con el p.e. de los vectores $-\vec{OB}$ y $-\vec{AB}$ podemos obtener el ángulo en B . Al efectuar este p.e. puedo sacar fuera $(-1) \times (-1) = 1$, por tanto el resultado es el mismo que si obtuviésemos el p.e. de \vec{OB} y \vec{AB}

En O :
$$\cos\alpha = \frac{(7, 0) \cdot (-2, 5)}{\sqrt{7}\sqrt{29}} = \frac{-14}{7\sqrt{29}} \simeq -0.3714$$

Ángulo en radianes $\simeq 1.9513$ Ángulo en grados $\simeq 111.8014$

En A :
$$\cos\beta = \frac{-(7, 0) \cdot (-9, 5)}{\sqrt{7}\sqrt{106}} = \frac{63}{7\sqrt{106}} \simeq 0.8742$$

Ángulo en radianes $\simeq 0.5071$ Ángulo en grados $\simeq 29.0546$

En B :
$$\cos\gamma = \frac{(-2, 5) \cdot (-9, 5)}{\sqrt{29}\sqrt{106}} = \frac{18 + 25}{\sqrt{29}\sqrt{106}} = \frac{43}{\sqrt{29}\sqrt{106}} \simeq 0.7756$$

Ángulo en radianes $\simeq 0.6832$ Ángulo en grados $\simeq 39.1440$

Comprobación de la suma de ángulos: $111.8014 + 29.0546 + 39.144 = 180$

Ejemplo 16 En \mathbb{R}^3 y considerando el producto escalar canónico, determina el ángulo que forma el vector $\vec{v} = (4, -1, 6)$ con cada uno de los vectores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Sol.:

$$\bullet (4, -1, 6) \cdot (1, 0, 0) = \sqrt{16 + 1 + 36} \cdot 1 \cdot \cos\alpha = \sqrt{53} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{53}} \simeq 0.5494$$

El ángulo es $\alpha \simeq 0.9891$ radianes $\simeq 56.6712$ grados

$$\bullet (4, -1, 6) \cdot (0, 1, 0) = \sqrt{53} \cdot 1 \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{53}} \simeq -0.1374$$

El ángulo es $\beta \simeq 1.7086$ radianes $\simeq 97.8951$ grados

$$\bullet (4, -1, 6) \cdot (0, 0, 1) = \sqrt{53} \cdot 1 \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{53}} \simeq 0.8242$$

El ángulo es $\gamma \simeq 0.6021$ radianes $\simeq 34.4962$ grados

Ejemplo 17. Calcula los tres ángulos del triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 2)$ y $C = (-3, 6)$, y rellena un cuadro como el siguiente con los resultados. Expresa el ángulo en grados y con precisión de décimas (mediante redondeo).

En vértice	ángulo
A	
B	
C	

Solución con MATLAB:

```
A=[1 1]'; B=[5 2]'; C=[-3 6]';
```

```
AB=B-A;
```

```
AC=C-A;
```

```
BC=C-B;
```

```
% tomo AB y AC para el angulo en vertice A
```

```
angA=acosd(dot(AB,AC)/norm(AB)/norm(AC));
```

```

% dot( , ) es el producto escalar de los vectores que aparecen como argumentos
% norm( ) es la norma del vector
% acosd( ) es el arcocoseno en grados

% tomo BA y BC porque vertice en B (BA=-AB)

angB=acosd(dot(-AB,BC)/norm(AB)/norm(BC));

% tomo CA y CB porque vertice en C (CA=-AC , CB=-BC)

angC=acosd(dot(-AC,-BC)/norm(AC)/norm(BC));

angA+angB+angC - 180 % Si sale 0 cumple que la suma son 180 grados

[angA angB angC] % en una fila para ocupar menos espacio

% 0
% 114.6236 40.6013 24.7751

% redondeando a la decima: 114.6 40.6 y 24.8 grados

% Observación:
% En la práctica es preferible:
% 1) Obtener el coseno del ángulo y verlo por pantalla.
% 2) Comprobar que el valor se encuentra entre -1 y 1. Si no es así
% hemos cometido un error.
% 3) Obtener el ángulo a partir del arcocoseno del coseno obtenido.

% En este ejemplo los tres cosenos toman los siguientes valores:

% -0.4167
% 0.7593
% 0.9080

% El primero, negativo, corresponde a ángulo obtuso, y los dos siguientes, positivos,
% a ángulos agudos.

```

3.1.5 Vectores ortogonales. Teorema de Pitágoras generalizado

En \mathbb{R}^n con el producto escalar canónico decimos que dos vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

El vector cero es ortogonal a todos los vectores de \mathbb{R}^n , pues $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

• Teorema de Pitágoras y Teorema de Pitágoras generalizado

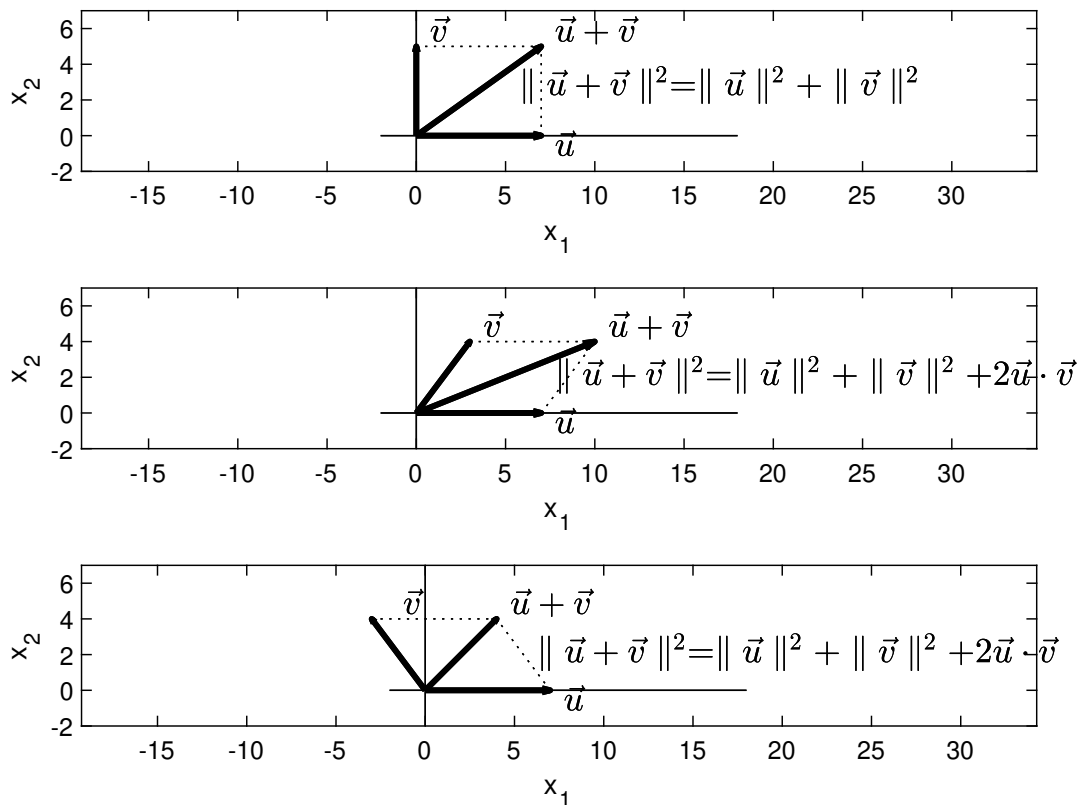
Dos vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales si y sólo si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ [5a]

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}} \quad [5b]$$

La última expresión es el Teorema de Pitágoras generalizado. El Teorema de Pitágoras corresponde al caso particular en que \vec{u} y \vec{v} son ortogonales.

Esquema en \mathbb{R}^2 :

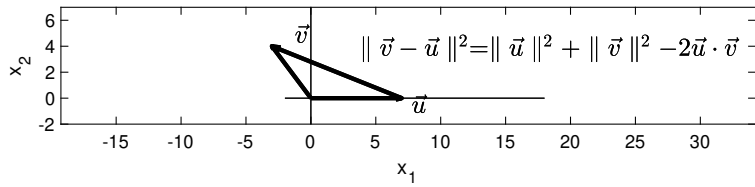
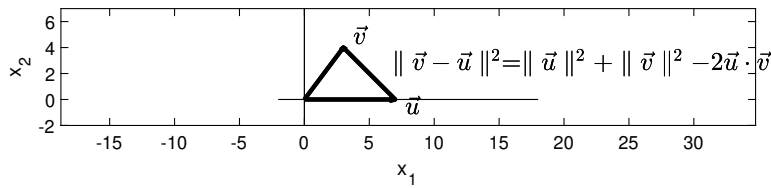
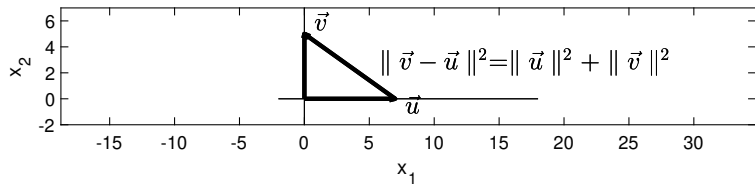


(Recuérdese como la suma de dos vectores coincide con la diagonal del paralelogramo que definen, tomando como origen de la diagonal el vector $\vec{0}$).

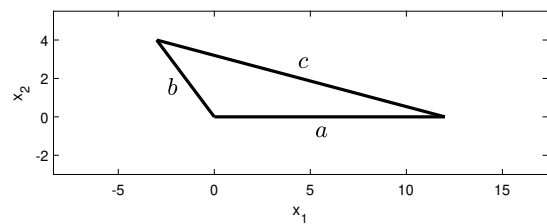
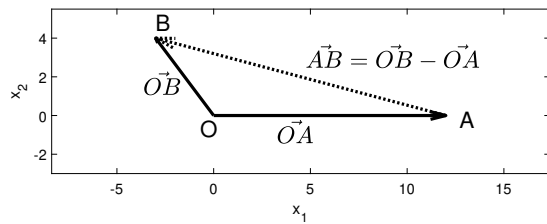
Observación: En la figura del medio se ha tomado \vec{v} formando un ángulo agudo con \vec{u} , por lo que el sumando $2\vec{u} \cdot \vec{v}$ es positivo (producto escalar positivo), y la norma al cuadrado de la suma es mayor que la suma de los cuadrados de las normas. En la figura inferior se ha tomado \vec{v} formando un ángulo obtuso con \vec{u} , por lo que el sumando $2\vec{u} \cdot \vec{v}$ es negativo (producto escalar negativo), y la norma al cuadrado de la suma es menor que la suma de los cuadrados de las normas.

• **Teorema del coseno**

Se deduce igual que el Teorema de Pitágoras generalizado, pero considerando $\vec{v} - \vec{u}$. Mostramos la misma figura que en el apartado anterior, pero para la diferencia en vez de la suma.



Presentamos el mismo teorema, con otra notación.



$$\| \vec{AB} \|^2 = \| \vec{B} - \vec{A} \|^2 = (\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \| \vec{A} \|^2 + \| \vec{B} \|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} =$$

$$\| \vec{A} \|^2 + \| \vec{B} \|^2 - 2 \| \vec{A} \| \| \vec{B} \| \cos\gamma, \text{ siendo } \gamma \text{ el ángulo que forman los vectores } \vec{A} \text{ y } \vec{B}$$

Denotando las longitudes de \vec{A} , \vec{B} , \vec{AB} como a , b y c , respectivamente, la expresión del Teorema del Coseno queda:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos\gamma$$

Por simetría se puede encontrar una expresión similar para los otros dos ángulos interiores:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos\alpha \quad \alpha \text{ es el ángulo opuesto al lado } a$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos\beta \quad \beta \text{ es el ángulo opuesto al lado } b$$