Tema 5. Autovalores, autovectores y diagonalización

Consideraremos en este capítulo únicamente endomorfismos
$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, siendo $\mathbb{R}^n$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

1 Valores y vectores propios

Definición 1. *Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es* **autovalor o valor propio** *del endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ si existe $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.*

Definición 2. *Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ con autovalor λ. Los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ se denominan* **autovectores o vectores propios** *de f correspondientes al autovalor λ.*

λ puede ser 0.

Si $\vec{x} = \vec{0}$ $\quad \forall\lambda$ se cumple que $f(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$, por eso para aceptar λ como autovalor debe existir $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Teniendo en cuenta que a f le corresponde una matriz estándar asociada A, nos referiremos indistintamente a los autovalores de f o de A y a los autovectores de f o de A.

Ejemplo 1. *Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, sobre $\mathbb{R}$, cuya matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$. Determina si los vectores $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (3,2)$ son vectores propios de A. En caso afirmativo da el valor del autovalor asociado.*

<u>Sol:</u>

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$ es vector propio porque $A\vec{u} = 1\vec{u}$
el autovalor asociado es $\lambda = 1$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$ es vector propio porque $A\vec{v} = -2\vec{v}$
el autovalor asociado es $\lambda = -2$

Ejemplo 2. *Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, cuya matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Determina si los vectores $\vec{u} = (6,-5)$ y $\vec{v} = (3,-2)$ son vectores propios de A.*

<u>Sol:</u>

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$ es vector propio porque $A\vec{u} = -4\vec{u}$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$ no es vector propio porque no existe s tal que $A\vec{v} = s\vec{v}$, o lo que es lo mismo, $(-9,11)$ no es múltiplo de $(3,-2)$.

Ejemplo 3. *Consideremos el endomorfismo identidad $id\colon \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$. Sabemos que su matriz asociada es la identidad.*

$\quad id(\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$

La aplicación tiene un único valor propio, que es 1. Todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ son autovectores correspondientes a ese autovalor.

Ejemplo 4. *Consideremos la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ cuya matriz asociada es la matriz kI_n con $k \in \mathbb{R}$.*

$f(\vec{x}) = kI\vec{x} = k\vec{x}$

La aplicación tiene un único valor propio, que es λ. Todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ son autovectores correspondientes a ese autovalor.

2 Obtención de los valores propios. Ecuación característica

Teorema 1. *Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ y A_n su matriz asociada respecto de la base estándar. $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de $f \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I) < n$.*

Demostración: λ valor propio si $\exists\ \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x}$, siendo I la matriz identidad de orden n, o lo que es lo mismo, si $\exists\ \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Por tanto λ es valor propio $\Leftrightarrow$ el SL $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ es indeterminado $\Leftrightarrow$ rg $(A - \lambda I) < n$ $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$ $\square$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se denomina **ecuación característica** de f, o de A. Desarrollando la ecuación se obtiene que $|A - \lambda I|$ es un polinomio de grado n en λ, y por tanto los valores de λ para los que se verifica la ecuación característica son las raíces de este polinomio.

Al polinomio $|A - \lambda I|$ se le denomina polinomio característico de f o (de A), y se denota como $p(\lambda)$.

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales tiene exactamente n raíces reales o complejas (contando multiplicidades). Denotamos la multiplicidad (también denominada multiplicidad algebraica) de la raíz λ como p_λ.

El polinomio $(1 - \lambda)^5$ tiene 5 raíces, todas iguales a 1. Decimos que tiene raíz 1 con multiplicidad 5.

El polinomio $\lambda^2 + 1$ tiene dos raíces complejas, $+i$ y $-i$. (Las raíces complejas siempre forman pares conjugados).

El polinomio $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$ tiene dos raíces complejas, i y $-i$ y dos raíces reales 1 y -1, ambas simples. Se podría escribir cómo $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$.

El polinomio $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2(\lambda + 6)^3(\lambda - i)(\lambda + i)$ tiene las siguientes raíces distintas: -1 de multiplicidad 1, 1 de multiplicidad 2, -6 de multiplicidad 3, i de multiplicidad 1, y $-i$ de multiplicidad 1.

El polinomio característico de A, $p(\lambda)$, de grado n, tendrá n raíces. **Las raíces reales del polinomio son los autovalores** del endomorfismo f, también designados como autovalores de A. Suponiendo s raíces distintas, incluyendo reales y complejas:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{p_{\lambda_1}}(\lambda_2 - \lambda)^{p_{\lambda_2}} \dots (\lambda_s - \lambda)^{p_{\lambda_s}}$$

$$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_s} = n$$

Si r es el número de raíces reales y distintas, $r \leq s$, entonces tenemos r autovalores distintos, y:

$$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_r} = n \Leftrightarrow \text{todas las raíces son reales}$$

$$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_r} < n \Leftrightarrow \text{existen raíces complejas}$$

Si $p(\lambda)$ tiene las n raíces reales y distintas (por tanto todas de multiplicidad algebraica 1), entonces el endomorfismo tiene n autovalores distintos, y la ec. característica es:

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

Resumen: Los valores propios son las raíces reales del polinomio $|A - \lambda I|$, o lo que es lo mismo, las soluciones reales de la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$.

Ejemplo 5. *¿Es 5 un valor propio de* $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$*?*

Sol:

5 es autovalor de $A \Leftrightarrow$ 5 es solución de la ecuación $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |A - 5\ I| = 0$

$|A - 5I| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -30$, *por tanto 5 no es autovalor.*

Ejemplo 6. *a) Averigua si $\lambda = 4$ es autovalor de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) Determina el valor de c para que $\lambda = 4$ sea autovalor de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & c \end{bmatrix}$

Sol:

a) $|A - 4I| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \Rightarrow \lambda = 4$ *no es autovalor.*

b) $|A - 4I| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & c-4 \end{vmatrix} = -3c + 12 - 8 = -3c + 4 = 0 \Rightarrow c = 4/3.$

Ejemplo 7. *Encuentra la ecuación característica de* $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por ser A triangular, $A - \lambda I$ también es triangular, y la ec. característica:

$$(5 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

Los autovalores son entonces los elementos de la diagonal principal de A.

Ejemplo 8. *El polinomio característico de una matriz 6×6 es $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$. Encuentra los valores propios y su multiplicidad algebraica.*

$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda - 12)\lambda^4$

Tenemos la raíz $\lambda = 0$ con multiplicidad 4 y las raíces de $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. Estas últimas son $\lambda = -2$ y $\lambda = 6$, ambas simples.

3 Subespacio propio. Dimensión. Obtención

Teorema 2. *Sea el endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ y sea λ autovalor de f. El conjunto de todos los vectores propios correspondientes a λ, denotado V_λ, es subespacio de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración: En efecto, considerando la matriz estándar A asociada a f, tenemos:

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \ = \ \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\} \ = \ \mathrm{Nul}(A - \lambda I). \qquad \square$$

El subespacio $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n/(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}\}$ se denomina **subespacio propio correspondiente al autovalor** λ_i. *Se denota como V_{λ_i}.*

$$V_{\lambda_i} = \mathrm{Nul}(A - \lambda_i I)$$

Observaciones:

1) $\dim V_\lambda \geq 1$ ya que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ tiene soluciones de $\vec{x}$ no nulas.

2) Quedó demostrado que V_λ es subespacio, por ser el conjunto de soluciones de un SLH. Presentamos no obstante la demostración de que V_λ cumple los dos axiomas de los subespacios.

- El producto por un escalar es cerrado, pues $\vec{x} \in V_\lambda \Rightarrow \alpha\ \vec{x} \in V_\lambda$

  $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, entonces $f(\alpha\ \vec{x}) = \alpha\ f(\vec{x}) = \alpha\ \lambda\vec{x} = \lambda\ \alpha\vec{x}$, por tanto $\alpha\vec{x} \in V_\lambda$

- La suma es cerrada: $\vec{x}, \vec{x'} \in V_\lambda \Rightarrow \vec{x} + \vec{x'} \in V_\lambda$

  $$f(\vec{x} + \vec{x'}) = f(\vec{x}) + f(\vec{x'}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{x'} = \lambda(\vec{x} + \vec{x'})$$

Como consecuencia de que la suma sea cerrada y el producto por un escalar también, se tiene que toda combinación lineal de autovectores de un valor propio λ es también autovector de ese autovalor.

Se podría haber presentado la demostración usando $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ para expresar $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Dimensión del subespacio propio

V_λ es el conjunto de soluciones del SLH $[\ A - \lambda I \mid \vec{0}\ ]$, por tanto:

dim V_λ = $n^{\underline{o}}$ de parámetros libres = $n^{\underline{o}}$ de columnas no pivotales de la matriz $[\ A - \lambda I\ ]$

$$\boxed{\dim V_\lambda = n - \text{rango } (A - \lambda I)}$$

Por ser λ autovalor rg $(A - \lambda I) < n$ por tanto: $\boxed{1 \le \dim V_\lambda \le n}$

dim $V_\lambda = n$ cuando rg$(A - \lambda I)$=0, es decir si $A - \lambda I$ es la matriz cero, o lo que es lo mismo, $A = \lambda I$. En este caso $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, y por tanto $V_\lambda = \mathbb{R}^n$

Teorema 3. dimV_λ *es menor o igual que la multiplicidad algebraica del autovalor* λ*.*

$$\boxed{1 \le \dim V_\lambda \le p_\lambda \le n}$$

Se define **multiplicidad geométrica** de un autovalor λ como la dimensión de V_λ.

Obtención de los subespacios propios

En primer lugar se calculan los valores propios, es decir, las raíces reales de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$.
A continuación:

- Se determina $V_{\lambda_i} = \text{Nul}(A - \lambda_i I)$ para cada valor propio λ_i, que es lo mismo que determinar la solución de cada sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ (un sistema para cada autovalor). La resolución del sistema nos permitirá obtener una base y la dimensión del subespacio propio.

Ejemplo 9. *Encuentra los autovalores y base de los subespacios propios de* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12$$

$|A - \lambda I|$ *tiene las raíces reales, y por tanto valores propios,* $\lambda_1 = 4$ *y* $\lambda_2 = -3$.

• *<u>Subespacio propio para λ_1</u>*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 4x \\ 3x - 2y = 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \quad [1] \;\Rightarrow\; x = 2y$$

$\vec{v}_1 = (2, 1)$ *es una base de* V_4. V_4 *tiene dimensión 1.*

Comprobación: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

<u>Procedimiento más directo:</u>
Los autovectores son las soluciones de $A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I \vec{x}$, *es decir, del sistema homogéneo* $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

La matriz de coeficientes $(A - \lambda I)$ *para este ejemplo y* $\lambda = 4$ *es:*

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

que es precisamente la del SL [1] de arriba.

Los autovectores se obtienen resolviendo el SL $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$
$\Rightarrow (2, 1)$ *es autovector y base.*

• *De la misma forma se puede calcular un vector propio asociado a* λ_2.

Los autovectores se obtienen resolviendo en este caso el SL $\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$, *por tanto* $\vec{v}_2 = (-1, 3)$ *es base del subespacio propio* V_{-3}, *de dimensión 2.*

Ejemplo 10. *Obtén los autovalores y base de cada subespacio propio para la matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

Solución:

- *Autovalores*

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \textit{Fila3 = Fila3 - Fila2}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \textit{Fil1 = Fil1-Fil2}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hemos sacado fuera $(1-\lambda)^2$ *y el determinante que queda está ya muy simplificado y lo podemos resolver mediante Sarrus.*

$$= (1-\lambda)^2((-2-\lambda) + 0 + 0 + 1 + 1) = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

$\boxed{\textit{Autovalores:} \quad \lambda_1 = 0 \textit{ simple} \quad \lambda_2 = 1 \textit{ doble.}}$

- *Base de cada subespacio propio.* V_λ = *Nul* $(A - \lambda_i)$

  - *Base de* V_0

    $$[\,A - 0I\,|\,\vec{0}\,] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim ... \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \; x = z, y = z, z = z$$

    $\boxed{\textit{Base de } V_0 = \{(1,1,1)\}}$ *Nótese que* V_0 *es siempre NulA.*

  - *Base de* V_1

    $$[\,A - 1I\,|\,\vec{0}\,] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim ... \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \; x = 3y - z, y = y, z = z$$

    $\boxed{\textit{Base de } V_1 = \{(3,1,0), (-1,0,1)\}}$

- *Comprobaciones: Denotando como* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *a los autovectores obtenidos, en su orden, efectuando* $A\,[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ *deberíamos obtener* $[\,\vec{0}\,\vec{b}\,\vec{c}]$, *teniendo en cuenta que los autovalores asociados son* 0, 1 *y* 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ...$$

4 El producto y la suma de las raíces del polinomio carácteristico

Teorema 4. *El determinante de la matriz A_n es igual al producto de las raíces del polinomio característico de A.*

Si todas las raíces son reales, el determinante de A es igual al producto de sus autovalores, es decir $\det A = \lambda_1^{p_{\lambda_1}} \times \lambda_2^{p_{\lambda_2}} \times \ldots \times \lambda_r^{p_{\lambda_r}}$*, siendo λ_i los r autovalores distintos y p_{λ_i} sus respectivas multiplicidades.*

Teorema 5. *La traza de la matriz A_n es igual a la suma de las raíces de su polinomio característico.*

Si todas las raíces son reales, la traza de A es igual a la suma de sus autovalores, es decir, $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i}\lambda_i$*, siendo λ_i los r autovalores distintos y p_{λ_i} sus respectivas multiplicidades.*

Ambos resultados son muy útiles para el cálculo y la comprobación de autovalores.

5 Matrices semejantes

Teorema 6. *Si dos matrices F_n y G_n son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos autovalores y con la misma multiplicidad.*

Demostración: F y G semejantes $\Leftrightarrow \exists\, P \;/\; F = PGP^{-1}$

P es la matriz de cambio de coordenadas desde la base a la que está referida G a la base a la que está referida F.

$F - \lambda I = PFP^{-1} - \lambda I = PFP^{-1} - P\lambda IP^{-1} = P(F - \lambda I)P^{-1}$

$|F - \lambda I| = |P||G - \lambda I||P^{-1}| = |G - \lambda I|$, por tanto $|F - \lambda I| = |G - \lambda I|$

Si una de las matrices es A, referida a la base estándar, recordamos que la factorización queda como $A = BGB^{-1}$, donde B es la matriz de paso de coordenadas relativas a la base B, a la que está referida G, a coordenadas estándar.

□

6 La suma directa de los subespacios propios

Teorema 7. *Si λ_1, λ_2, ..., λ_r son autovalores distintos de A, con autovectores correspondientes $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, ..., $\vec{b}_r$, entonces el conjunto $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, ..., $\vec{b}_r$ es linealmente independiente.*

De este resultado se deduce sin mucha dificultad que la unión de las bases de los subespacios propios es conjunto linealmente independendiente y por tanto base del subespacio suma.

$$\boxed{B_1 \bigcup B_2 \ldots \bigcup B_r = \text{Base de } (V_{\lambda_1} + \;\ldots\; + V_{\lambda_r}), \text{ siendo } B_i \text{ la base de } V_{\lambda_i}.}$$

$$\boxed{\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \;\ldots\; + \dim V_{\lambda_r} = \dim\,(V_{\lambda_1} + \;\ldots\; + V_{\lambda_r})}$$

Por tanto la suma de subespacios propios es suma directa:

$$\boxed{V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \;\ldots\; \bigoplus V_{\lambda_r} \subseteq \mathbb{R}^n}$$

La intersección de los subespacios propios es el vector $\vec{0}$.

7 Existencia o no de base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f

Teorema 8. *Existe base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A, o lo que es lo mismo, $V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \ \ldots \ \bigoplus V_{\lambda_r} = \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow \ p(\lambda)$ tiene n raíces reales contando multiplicidades (o lo que es lo mismo, no hay raíces complejas) y $dimV_{\lambda_i} = p_{\lambda_i}$*

Demostración: Existe base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores si y sólo si $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \ldots + \dim V_{\lambda_r} = n$

Sabemos que $\dim V_{\lambda_i} \leq p_{\lambda_i} \quad i = 1, ..., r$, por tanto:

$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + ... + \dim V_{\lambda_r} \ \leq \ p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \ldots p_{\lambda_r} \ \leq \ n$

Para obtener la dimensión máxima, n, se debe cumplir $\dim V_{\lambda_i} = p_{\lambda_i} \ \forall i = 1, ..., r$ (para que el primer "menor o igual" sea un "igual") y que todas las raíces sean reales (para que el segundo "menor o igual" sea un "igual"). $\square$

Teorema 9. *Si A_n tiene n autovalores distintos, entonces existe base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.*

En efecto, si el polinomio característico de grado n tiene n autovalores distintos, significa que las multiplicidades son todas igual a uno. Por tanto los n subespacios V_{λ_i} tienen dimensión 1, y tendremos n autovectores linealmente independientes.

Nótese que este teorema nos da una <u>condición suficiente</u> para que exista base de autovectores, pero <u>no es una condición necesaria</u>.

8 Diagonalización

Consideramos un endomorfismo f con matriz estándar A, r autovalores distintos, y para el que se puede obtener una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores.
Sea B una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores.
$B = \{ \ \vec{b}_1^{\,1} \ , \ ... \ , \ \vec{b}^{\,1}_{p_{\lambda_1}} \ , \ \vec{b}_1^{\,2} \ , \ ... \ , \ \vec{b}^{\,2}_{p_{\lambda_2}} \ , \ .... \ , \ \vec{b}_1^{\,r} \ , \ ... \ , \ \vec{b}^{\,r}_{p_{\lambda_r}} \ \}$
Cada superíndice i corresponde al autovalor λ_i $\qquad p_{\lambda_i}$ es la multiplicidad de ese autovalor

$$\begin{cases} f(\vec{b}^{\,1}_1) = \lambda_1 \ \vec{b}^1_1 \\ \quad \vdots \\ f(\vec{b}^{\,1}_{p_{\lambda_1}}) = \lambda_1 \ \vec{b}^{\,1}_{p_{\lambda_1}} \\ \\ \quad \vdots \\ \\ f(\vec{b}_1^{\,r}) = \lambda_r \ \vec{b}_1^{\,r} \\ \quad \vdots \\ f(\vec{b}^{\,r}_{p_{\lambda_r}}) = \lambda_r \ \vec{b}^{\,r}_{p_{\lambda_r}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_1 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_r & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix} \\ \leftarrow \ p_{\lambda_1} \ \rightarrow \qquad\qquad \leftarrow \ p_{\lambda_r} \ \rightarrow \end{array}$$

Observamos que la matriz F, que es la relativa a la base B, es diagonal, y que el elemento de la diagonal principal de la columna i es el autovalor correspondiente al autovector de la posición i en la base.

Denotamos a la matriz F como D, por ser diagonal.

Recordamos la expresión de construcción de F : $\quad F = [\ [f(\vec{b}\,^1_1)]_B\ \ldots\ [f(\vec{b}\,^r_{p_{\lambda_r}})]_B\ ]$.

Recíprocamente, si supiéramos de f que respecto de una base $C = \{\vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \ldots\ ,\ \vec{c}_n\}$ tiene asociada una matriz diagonal E, entonces concluiríamos que esa base estaría formada por autovectores y que los elementos de la diagonal de E serían los correspondientes autovalores, ya que $f(\vec{c}_i) = e_{ii}\vec{c}_i$.

Definición 3. *Una matriz A (o el endomorfismo f del que A es matriz estándar) se dice* **diagonalizable** *si tiene una matriz semejante diagonal, es decir, si existen base B y matriz D diagonal tales que $A = BDB^{-1}$.*

Teorema de la diagonalización. A_n es diagonalizable si y sólo si tiene n autovectores linealmente independientes, es decir, si y sólo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A. En la factorización $A = BDB^{-1}$ con P invertible y D diagonal, las columnas de B son n autovectores de A linealmente independientes, y los elementos de D son los autovalores correspondientes y en el mismo orden.

RESUMEN sobre diagonalización

Dada A_n existen B invertible y D diagonal tales que $A = BDB^{-1}$ si y sólo si A tiene n valores propios reales (incluidas multiplicidades) y $\dim V_{\lambda_i}$ es igual a la multiplicidad de λ_i.
Los elementos de D son los autovalores. Las columnas de B son una base de autovectores, en el mismo orden que sus correspondientes autovalores en D.
A es la matriz estándar de f. D es la matriz de f para trabajar con coordenadas relativas a la base de autovectores dada en B.
La base de autovectores se construye uniendo las bases de los subespacios propios, siendo la dimensión de cada uno de éstos igual a la multiplicidad del autovalor.

Las dos condiciones de diagonalización:

1. $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{p_{\lambda_1}}(\lambda_2 - \lambda)^{p_{\lambda_2}} \ldots (\lambda_r - \lambda)^{p_{\lambda_r}}$, con λ_i raíces reales y distintas (esto significa que $\sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i} = n$)
2. $\dim V_{\lambda_i} = p_{\lambda_i}$

Esquema para las matrices asociadas A y D:

$$\begin{tikzcd}
f: \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^n \\
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] \arrow[d, "B^{-1}"'] & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[r, dashed, "D"'] & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

B: base de autovectores

elementos de D: autovalores en el mismo orden

$A = B\ D\ B^{-1}$ $\qquad$ B es la matriz de paso de coordenadas en B a coordenadas estándar.

$D = B^{-1}\ A\ B$ $\qquad$ B^{-1} es la matriz de paso de coordenadas estándar a coordenadas en B.

Comprobaciones en los ejercicios:
$AB = BD$ es una comprobación más sencilla de efectuar que $BDB^{-1} = A$.

Ejemplo 11. *Estudia si son diagonalizables las siguientes matrices. En caso afirmativo obtén B invertible y D diagonal tales que $X = BDB^{-1}$, siendo X la matriz dada.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

```
Las dos son triangulares.  Tienen los mismos autovalores: 2, 4, 2.

A:
==
Autovectores para lambda=2
--------------------------

0 0 0 |  0
0 2 0 |  0
1 0 0 |  0

Resolviendo el SL tenemos que dim V(2) = 1.         Base de V(2) = { (0,0,1)}

Al ser la dimension menor que la multiplicidad, la matriz no es diagonalizable.



B:
==
Autovectores para lambda=2
--------------------------

 0  0  0 |  0
-1  2  0 |  0
-3  6  0 |  0

Resolviendo el SL tenemos que dim V(2) = 2.      Base de V(2) = { (2,1,0), (0,0,1)}

Al ser dimension = multiplicidad tenemos que la matriz es diagonalizable.
Ya sabemos que V(4) tendra dimension 1.

Autovectores para lambda=4
--------------------------

-2  0  0 |  0    1  0   0  | 0
-1  0  0 |  0    0  0   0  | 0       Base de V(4) =   {(0,1,3)}
-3  6 -2 |  0    0  6  -2  | 0

Por tanto

    2  0  0         2  0  0
B:  1  0  1     D:  0  2  0
    0  1  3         0  0  4
```

9 Potencia de una matriz diagonalizable

Si A es diagonalizable, con $A = BDB^{-1}$, entonces $A^k = BD^kB^{-1}$.

$$\text{En efecto} \qquad A^k = \overbrace{BDB^{-1}\ BDB^{-1}\ \ldots\ BDB^{-1}}^{k \quad veces} = BD^kB^{-1}$$

D^k es matriz diagonal de elementos d_{ii}^k

Ejemplo 12. *Factoriza la matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *en la forma* $A = BDB^{-1}$, *con* D *diagonal, y calcula* A^5.

- *Autovalores:*

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)+2+2-(3-\lambda)-2(2-\lambda)-2(2-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$$

Calculamos las raíces aplicando el método de Ruffini:

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & -7 & 11 & -5 \\
1) & & 1 & -6 & 5 \\
 & --- & --- & --- & --- \\
 & 1 & -6 & 5 & 0 \\
1) & & 1 & -5 & \\
 & --- & --- & --- & --- \\
 & 1 & -5 & 0 & \\
5) & & 5 & & \\
 & --- & --- & --- & --- \\
 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0$

Los autovalores son $\lambda = 1$ *(multiplicidad 2) y* $\lambda = 5$ *(multiplicidad 1)*

- *Base de autovectores:*

Calculamos V_1 *obteniendo* $V_1 =< \vec{v_1}, \vec{v_2} >$, *con* $\vec{v_1} = (1, 0, -1)$, $\vec{v_2} = (1, -1, 0)$, *confirmando que su dimensión es 2, y que por tanto* A *es diagonalizable.*

Calculamos V_5 *obteniendo* $V_5 =< \vec{v_3} >$, *con* $\vec{v_3} = (1, 2, 1)$.

Tomamos $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ *como base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores de* A. *Las matrices* B *y* D *para este orden son:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{con } A = BDB^{-1}$$

(Compruébese que $AB = BD$*)*

- A^5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3125 \\ 0 & -1 & 6250 \\ -1 & 0 & 3125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 782 & 781 & 781 \\ 1562 & 1563 & 1562 \\ 781 & 781 & 782 \end{bmatrix}$$

10 Endomorfismos geométricamente sencillos y diagonalizables

Las siguientes transformaciones geométricas en $\mathbb{R}^2$ son endomorfismos diagonalizables:

- Transformación escalamiento uniforme de razón k.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$

- Transformación escalamiento no uniforme de factores k_1 y k_2 distintos.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, señalando $\vec{a}$ la dirección del escalamiento de factor k_1 y $\vec{b}$ la dirección del escalamiento de factor k_2.

- Simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- Proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- Simetría respecto del origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$. Es la misma transformación que el giro de 180 grados alrededor del origen.

Las siguientes transformaciones geométricas en $\mathbb{R}^3$ son endomorfismos diagonalizables:

- Transformación escalamiento uniforme de razón k.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$

- Transformación escalamiento no uniforme de factores k_1, k_2, k_3 (al menos uno distinto del resto).

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, correspondiendo cada dirección al escalamiento asociado k_1, k_2 o k_3.

- Simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- Proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- Simetría respecto del origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$.

11 Ejercicios

1. Obtén los autovalores y las bases de los subespacios propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

   HVZ12, ejemplo E, pg. 214

2. Demuestra que una matriz de la forma $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ no es diagonalizable.

3. Para $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, señala la afirmación correcta:

   a) $\lambda = 6$ es autovalor y la dimensión del subespacio propio asociado V_6 es 1.

   b) $\lambda = 6$ es autovalor y la dimensión del subespacio propio asociado V_6 es 2.

   c) $\lambda = 6$ no es autovalor

   Determina todos los autovalores y multiplicidades de A.

4. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ usa una factorización $A = BDB^{-1}$, con D diagonal, para obtener A^6.

5. Determina si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ es diagonalizable para algún valor de c, y cuál o cuáles son estos valores en caso afirmativo.

6. Considerado el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ tal que:

   $(1, 2)$ es autovector con autovalor asociado 3

   $(-1, 1)$ es autovector con autovalo asociado 4.

   a) Obtén la matriz estándar A de f.

   b) Obtén $f(1, 7)$. *Si no conocieras A podrías resolver este apartado tomando como punto de partida la expresión de (1,7) como combinación lineal de los autovectores dados. En efecto si* $(1, 7) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$*, entonces* $f(1, 7) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b})$*, por ser* f *aplicación lineal.*

7. Obtén los autovalores y las bases de los subespacios propios de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

   Determina si existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de esta aplicación lineal. En caso afirmativo escribe la base y la matriz de la aplicación referida a esa base.

   HVZ12, ejercicios 1 y 2, matriz h, pgs. 220-221

8. Determina si las siguientes matrices tienen semejante diagonal D, y en caso afirmativo determina la matriz B tal que $BDB^{-1} = A$

a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

HVZ12, ejercicio 5 a) y b) pg. 221

9. Determina para que valores de a y b es diagonalizable la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10.

Considerada en $\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal f con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$, se pide:	
Los autovalores	
Una base de cada subespacio propio indicando el autovalor asociado	$\lambda =$ Base = $\lambda =$ Base =
Matrices B invertible y D diagonal tales que $A = BDB^{-1}$	$B =$ $D =$
Interpretación geométrica cualitativa y cuantitativa	

11. Obtén los subespacios propios, si existen, de la transformación lineal de matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$