4.4 Ejercicios

4.1. Dada la aplicación lineal con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

a) Obtén una base de $\mathrm{Im} f$.
b) Obtén una base de $\mathrm{Ker} f$.
c) Razona si la aplicación lineal es o no sobreyectiva.
d) Obtén la imagen de $(2, 7, 0)$.
e) Determina el/los antecedentes de $(6, 9, a)$ en función de a.

4.2. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$(1, 0, 0) \longmapsto (1, 1, 1)$ $\quad$ $(0, 1, 0) \longmapsto (2, 0, -3)$ $\quad$ $(0, 0, 1) \longmapsto (0, 0, 4)$

a) Halla la matriz estándar asociada a f.
b) Halla la imagen de $\vec{a} = (2, -3, 5)$
c) Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2, -5, 4)$

4.3. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 2)$. Determina una base de $\mathrm{Ker} f$ en función del parámetro c.

4.4 Dada la aplicación lineal f con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determina

a) Una base y la dimensión de $\mathrm{Im} f$. *Es decir, base y dimensión de ColA*
b) Una base y la dimensión de $\mathrm{Ker} f$. *Es decir, base y dimensión de NulA*
c) El núcleo de f te permite obtener las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de A. Si el núcleo no resulta ser el vector $(0, 0, 0, 0)$, escribe una relación de dependencia lineal entre dichas columnas, denotándolas como $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ y $\vec{a}_4$ (por ese orden en A).

4.5 Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:

* simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

* proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

Considerada la figura con los vértices P, Q, R y T dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simetrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = (\quad , \quad)$	$P' = (\quad , \quad)$
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

4.6 Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano $x + y + z = 0$.

a) Determina una base B respecto de la cual la matriz asociada a f sea lo más sencilla posible. Escribe también dicha matriz.

b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

4.7 Resuelve el ejercicio anterior tomando f correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano $x + y + z = 0$.

4.8 La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ produce un **estiramiento** en la dirección x. Representa la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y esboza a su alrededor los puntos (x, y) que resultan de multiplicar por A. ¿Cual es la forma de la figura?.

G. Strang. Linear Algebra and its Applications. Edición 4. Wellesley Cambridge Press. 2009. Pg. 149. Ejercicio 3.

4.9 Dada la aplicación lineal f en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtén la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1, -1, 0), (-2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9. Pearson 2015. Pr. 212. Ejemplo 2.

4.10 a) En $\mathbb{R}^3$, obtén la matriz estándar A correspondiente al giro de 90 grados en sentido positivo respecto del eje dirigido según el vector $(0, 0, 1)$. b) Obtén la matriz estándar de la siguiente composición de transformaciones: en primer lugar el giro anterior, y a continuación dilatación de factor 4 según el eje Z.

4.11 a) En $\mathbb{R}^2$, interpreta geométricamente, cualitativa y cuantitativamente, la transformación lineal con la matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.12 a) Demuestra que tanto la matriz estándar A de la simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto de un plano como la de la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto de una recta son matrices **involutivas**, es decir $AA = I$. b) Demuestra que en el caso de la proyección, en $\mathbb{R}^3$ sobre un plano y en $\mathbb{R}^2$ sobre una recta, las matrices estándar son **idempotentes**, es decir $AA = A$.