4. Aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$

Aplicación lineal $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{y} = A\vec{x} \end{array}$

4.1 Cambio de base de un endomorfismo

- **Trabajando en base estándar**

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) \quad \overset{\text{A.L.}}{\Rightarrow} \quad \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) + x_2 f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) + \ldots + x_n f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$\underset{\vec{y}}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; f(\vec{e}_n) \,]}_{A} \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{A = [\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; f(\vec{e}_n) \,] \qquad A\,\vec{x} = \vec{y}}$$

$\vec{x}$ está en coordenadas estándar
$\vec{y}$ está en coordenadas estándar
A es la matriz estándar de f

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$$

- **Trabajando en base** B

$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n$

$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n) \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \ldots + c_n f(\vec{b}_n)$ Premultiplicando los dos

miembros por P_B^{-1}, cambiamos $\vec{y}$ y los $f(\vec{b}_i)$ de coordenadas estándar a coordenadas relativas a la base B.

$\Rightarrow [\vec{y}]_B = c_1\,[f(\vec{b}_1)]_B + c_2\,[f(\vec{b}_2)]_B + \ldots + c_n\,[f(\vec{b}_n)]_B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix}}_{[\vec{y}]_B} = \underbrace{[\,[f(\vec{b}_1)]_B \; [f(\vec{b}_2)]_B \; \ldots \; [f(\vec{b}_n)]_B\,]}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{[\vec{x}]_B}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} F = [\;[f(\vec{b}_1)]_B \; [f(\vec{b}_2)]_B \; \ldots \; [f(\vec{b}_n)]_B\;] \\ F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \end{array}}$$

Tomamos del vector de partida sus coordenadas relativas a la base B: $[\vec{x}]_B$
La transformación produce las coordenadas de la imagen relativas a la base B: $[\vec{y}]_B$
F es la matriz de f relativa a la base B, es decir, a coordenadas del original y transformado, relativas a base B.

$$\vec{x} = c_1\,\vec{b}_1 + c_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c_n\,\vec{b}_n$$
$$\vec{y} = c'_1\,\vec{b}_1 + c'_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c'_n\,\vec{b}_n$$

- **Relaciones entre** A **y** F**, dada base** B
  - $A = PFP^{-1}$, siendo $P = [\vec{b}_1\;\vec{b}_2\;\ldots\;\vec{b}_n]$
  - A y F tienen el mismo determinante. Deducción obvia desde el resultado anterior.
  - A y F tienen la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal).
  - A y F tienen el mismo rango.

Si dos matrices cuadradas están asociadas a la misma aplicación lineal, pero cada una usa una base distinta, se dice que son matrices **semejantes** entre sí. Se dice de la traza, el determinante y rango, que son "invariantes" entre matrices semejantes.

- **Justificación de $A = P\,F\,P^{-1}$:**

  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ $\qquad P = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\ ]$ $\qquad \vec{x} = P\,[\vec{x}]_B$ $\qquad \vec{y} = P\,[\vec{y}]_B$

  La ec. $F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ la podemos reescribir como: $F\,P^{-1}\,\vec{x} = P^{-1}\,\vec{y}$

  Premultiplicando por la izda. por P: $P\,F\,P^{-1}\,\vec{x} = \vec{y}$

  Por otra parte, $A\vec{x} = \vec{y}$, por lo que igualando las dos últimas ecuaciones: $\boxed{A = P\,F\,P^{-1}}$

Justificación gráfica para interpretar $A = P\,F\,P^{-1}$ como composición de aplicaciones lineales:

Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a f y a los cambios de base.

$$f:\quad \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] \arrow[r, bend right=80, "F"] & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed] & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$A = P\,F\,P^{-1}$$

$$f:\quad \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed] \arrow[r, bend left=80, "F"'] & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$F = P^{-1}\,A\,P$$

En el esquema de la izquierda podemos ver A como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha F como composición de tres aplicaciones lineales.
Fijándonos en la izquierda vemos que A se puede entender como la composición de tres pasos:
1) pasar de $\vec{x}$ a $[\vec{x}]_B$, con P^{-1}.
2) aplicar la función en base B, con la matriz F
3) pasar el resultado a base estándar, con P.
$A = P\,F\,P^{-1}$

4.2 Imagen y núcleo

- **Im** f El subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las imágenes.

  $\text{Im}f = \{f(\vec{x}) \ / \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_2 f(\vec{e}_1) \ / \ x_i \in \mathbb{R}\}$

  Por comodidad trabajamos con la base canónica.

  Cada vector de Imf es una combinación lineal de los $f(\vec{e}_i)$. Los $\vec{x}$ de salida dan los coeficientes que se usan en la imagen. Ya que Imf es el conjunto de las imágenes de <u>todos los $\vec{x}$</u>, tendremos en Imf <u>todas las combinaciones lineales posibles</u> de los $f(\vec{e}_i)$.

  $\text{Im}f = < f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n) > = \text{Col}A.$

  La base de $\text{Im}f$ se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto $\{ f(\vec{e}_1), \ f(\vec{e}_2), \ldots, \ f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, <u>quedándonos</u> con los vectores correspondientes a las columnas pivotales de A.

  dim Imf = el número de estos vectores que son l.i. = rg$A$.

- **Núcleo de una aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ Se denota $\text{Ker}f$ y es el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^n$:

  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

  Teniendo en cuenta que $f(\vec{x} = A\vec{x}$, $\text{Ker } f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul}A$

- **Dimensiones de Imf y Ker$f$**

  Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, con matriz asociada A. Teniendo en cuenta que Imf=Col$A$ y que Ker$f$=Nul$A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

$$\boxed{\textbf{dim } \mathbb{R}^n = \textbf{dim Ker}f + \textbf{dim Im}f}$$

$$\boxed{n = \textbf{dim Nul}A + \textbf{dim Col}A = \textbf{dim Nul}A + \textbf{rg } A}$$

  Recordamos que el resultado muestra simplemente que el número de columnas de A es igual al nº de no pivotales, que es igual al nº de parámetros libres y dimensión del núcleo, más el nº de pivotales, que es igual al rg$A$ y dimensión de la imagen.

Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla: Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En $\mathbb{R}^2$ giro de ángulo α alrededor del origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$ con orientación positiva (determinante positivo de la matriz que tiene por columnas los vectores base).
  Por tanto también en la base estándar, ya que es base ortonormal y de orientación positiva.

  $0 < \alpha < \pi$ o $-\pi < \alpha < 0$

  α positivo o sentido positivo, giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj (negativo, sentido de las agujas del reloj).

  Giro de ángulo $0 =$ Matriz I. Esta misma matriz para cualquier base.

  Giro de ángulo $\pi =$ Simetría respecto del origen. Matriz $-I$. Esta misma matriz para cualquier base.

- En $\mathbb{R}^2$ simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^2$ proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^2$ contracción de factor k o dilatación de factor k

  Esta transformación tiene la matriz asociada $k\,I$ respecto de cualquier base. También se denomina escalamiento uniforme.

  Contracción: $0 < k < 1$
  Dilatación: $k > 1$

  Para $k = 1$ la matriz asociada es I.

- En $\mathbb{R}^2$ escalamiento anísotropo o no uniforme en dos direcciones l.i.

  Escalamientos de factores k_1 y k_2, con $k_i > 0$ y $k_1 \neq k_2$.

  Esta transformación tiene la matriz asociada $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores base de las direcciones de escalamiento k_1 y k_2 respectivamente.

• Para pasar de la matriz relativa a la base natural $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ de la transformación, a la matriz estándar, si no son la misma, se debe aplicar:

$$\boxed{A = P\,F\,P^{-1}},$$

siendo F la matriz del endomorfismo referida a la base natural B y $P = [\,\vec{a}\ \vec{b}\,]$.

Deben comprobarse los tres invariantes: traza, rango y determinante. En $\mathbb{R}^2$ son cálculos sencillos.

- En $\mathbb{R}^3$ giro de ángulo α alrededor del eje dirigido según el vector $\vec{n}$

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}\}$.

  Cambiando $\vec{n}$ por un vector múltiplo positivo del mismo, la matriz asociada sería la misma.

  Para α positivo se produce el giro de acuerdo con el criterio de la mano derecha, con el pulgar apuntando según $\vec{n}$, y los demás dedos en el sentido del giro.

- En $\mathbb{R}^3$ simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- En $\mathbb{R}^3$ proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- Otras dos transformaciones lineales sencillas son el escalamiento uniforme y el escalamiento no uniforme, en ambos casos sobre tres direcciones linealmente independientes.

  En el segundo caso $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada relativa a la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, que da las direcciones de los tres escalamientos, en el mismo orden.

  Si el escalamiento es uniforme, de factor k, la matriz asociada es $k\,I$ independientemente de la base utilizada.

De nuevo, la transformación de la matriz F relativa a la base natural a la matriz estándar A se realizará mediante la fórmula, $A = P\,F\,P^{-1}$. Una vez obtenida pueden comprobarse los invariantes. Obviamente la comprobación más sencilla es la de la traza.