

3.7 Formas paramétrica e implícita de los subespacios de \mathbb{R}^n

Todo subespacio H de \mathbb{R}^n es el conjunto de las combinaciones lineales o conjunto generado por sus vectores base.

Se expresa $H = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle$, siendo $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ base de H .

Los vectores de H se expresan en forma vectorial paramétrica (o forma explícita) como:

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$, con α_j parámetros libres.

La expresión anterior nos muestra que H es el conjunto de las soluciones $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de un SLH con n incógnitas y k parámetros libres, por tanto con $n - k$ ecuaciones.

Los vectores de H se expresan en forma implícita como las soluciones de un SLH con $m = n - k$ ecuaciones independientes, es decir, como las soluciones de una ec. matricial $A_{m \times n} \vec{x} = \vec{0}$.

k es la dimensión de H .

En el documento Tema3-EV-supl-param-impli.pdf tienes material suplementario de justificaciones teóricas de la obtención de las ecuaciones a partir de la base por dos métodos y ejemplos, tanto de lo anterior como del paso de ecuaciones a base.

Paso de ecuaciones a base: Si un subespacio H de \mathbb{R}^n viene dado en un ejercicio mediante un SLH, la base de H se obtiene resolviendo el SLH.

Paso de base a ecuaciones (presentamos dos métodos):

- Partiendo de una base $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ las ecuaciones implícitas en las variables x_1, \dots, x_n pueden obtenerse sin más que imponer que el siguiente sistema lineal sea compatible:
 $[\vec{b}_1 \dots \vec{b}_d \mid \vec{x}]$, con $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, dejando los x_j como variables.

En efecto $\vec{x} \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle \Leftrightarrow [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \mid \vec{x}]$ es compatible.

La ecuación que da lugar al SLH buscado es:

$\text{rg}([\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k]) = \text{rg}([\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \mid \vec{x}])$, dejando los x_j como variables, o lo que es lo mismo:

$\text{rg}([\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \mid \vec{x}]) = k$, dejando los x_j como variables.

- Se obtiene una base de $\text{Nul}([\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k]^\dagger)$. Esos vectores base puestos como filas forman una matriz A que es matriz de coeficientes de las ecs. implícitas.

3.8 Ejercicios Parte 1

3.12 Determina una base y la dimensión del subespacio $\text{Nul}(A)$, para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.13 Determina una base y la dimensión del subespacio $\text{Nul}(A)$, siendo $A = [1 \ 1 \ 1]$.

El enunciado también podía haber sido: "Determina una base y la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^3 de ecuación implícita $x + y + z = 0$."

3.14 Determina la/s ecuación/es implícitas de $H = \langle (2, -1, 0), (3, 0, -1) \rangle$. H es un hiperplano¹¹ de \mathbb{R}^3 .

3.15 Sean $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de $H = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

- Determina si $\vec{x} \in H$, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de \vec{x} relativas a B .
- Obtén la ec./ecs. implícita/s del sub. vec. H .
- A partir del resultado anterior obtén una nueva base B' de H .

3.16 Obtén la/s ec./ecs. implícita/s de $H = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1) \rangle$ utilizando los dos métodos que conoces.

3.17 Obtén la/s ec./ecs. implícita/s del subespacio de \mathbb{R}^5 de base $B = \{(1, 2, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$. (En HVZ12 pgs. 164-165, ejemplo D).

¹¹ $\dim H = \dim \mathbb{R}^3 - 1$

3.18 Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los \vec{v}_i los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H . Razona la respuesta.
- A partir de la base obtenida calcula la ecuación o ecuaciones implícitas de H , denotando a las variables como x_1, x_2, x_3, x_4 .
- Escribe un vector que no pertenezca a H . Razona la respuesta.
- Escribe las coordenadas estándar del vector \vec{v} , sabiendo que sus coordenadas respecto de la base B son $(4, 2, 1)$, o lo que es lo mismo $[\vec{v}]_B = (4, 2, 1)$.
- A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base B' de H distinta de la base anterior B .

Dada $A = [\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n]$, al subespacio $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$ se le denomina subespacio generado por las columnas de A y se denota $\text{Co}IA$. Por tanto en este ejercicio, denotando $A = [\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_4]$, $H = \text{Co}IA$.

3.19 Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los \vec{v}_i los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto.
- A partir de la base B , obtén la/s ec/ecs. implícita/s de H , denotando a las variables de \mathbb{R}^4 como x_1, x_2, x_3, x_4 .
- Obtén el o los valores de a tales que $(a, 4, -5, -10)$ pertenezca a H . Escribe "ninguno" o "para todo a " si ese es el caso.
- Obtén el o los valores de a tales que $(a, 8, -10, 10)$ pertenezca a H . Escribe "ninguno" o "para todo a " si ese es el caso.

3.8 Subespacios ColA, NulA y relación entre sus dimensiones

Consideramos la matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

ColA denota el subespacio generado por las columnas de A, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n] \quad \text{ColA} = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$$

Nótese que ColA es subespacio de \mathbb{R}^m , pues las columnas de A son vectores de m entradas (m filas).

Obviamente $\dim(\text{ColA}) = \text{rg}(A)$, pues las columnas de A que sean c.l. de otras hay que quitarlas para obtener la base.

Recordemos que el subespacio nulo de A, denotado NulA, es el conjunto $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / A\vec{x} = \vec{0} \}$.

NulA es subespacio de \mathbb{R}^n , y obviamente $\dim(\text{NulA}) = n - \text{rg}(A)$.

La dimensión del subespacio nulo de A o núcleo de A es el número de soluciones independientes en el SLH o, lo que es lo mismo, el grado de indeterminación del SLH.

Se obtiene entonces:

$$\dim(\text{NulA}) + \dim(\text{ColA}) = n$$

3.20 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determina

- Una base y la dimensión de ColA.
- Una base y la dimensión de NulA.