3.5 Coordenadas

La razón principal de elegir una base de un espacio vectorial en vez de un conjunto generador es que cada vector v de ese espacio puede escribirse de una sola manera como combinación lineal de los vectores de la base.

Sea $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ una base del espacio vectorial V, entonces $\forall v \in V$, v se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de la base. A los coeficientes o pesos $c_1, c_2, \ldots, c_d$, tales que $v = c_1 b_1 + \ldots + c_d b_d$ se les denomina coordenadas de v relativas a la base B.

Las coordenadas, que son d reales, se pueden almacenar como un vector, denominado vector de coordenadas de v respecto a B.

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$$

Notación en el espacio $\mathbb{R}^n$

- El vector de coordenadas de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto de una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ se expresa de acuerdo con la notación indicada cómo:

  $$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad \text{partiendo de } \vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \ldots + c_n \vec{b}_n$$

- Cuando las coordenadas están referidas a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, utilizamos la notación:

  $\vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, prescindiendo de los corchetes y de la referencia a la base.

  $\vec{x} = c_1 \vec{e}_1 + \ldots + c_n \vec{e}_n$,

  Más usual es expresar $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, denotando las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base canónica como x_i. A estas coordenadas las denominamos coordenadas canónicas o coordenadas estándar de $\vec{x}$.

Ejerc. 3.7 a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ significa que $\vec{x}$ tiene coordenadas $(2, 3, 4, 5)$ respecto de la base canónica, o lo que es lo mismo, que $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 5\vec{e}_4$

Respecto de la base $B = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ las coordenadas de $\vec{x}$ son: $[\vec{x}]_B = (2, 1, 1, 1)$. Compruébalo.

b) Considerado el subespacio vectorial H con base $B = \{(1, 1, 1), (2, 2, 1)\}$, determina si el vector $\vec{x} = (5, 5, 6)$ pertenece o no a H, y en caso afirmativo obtén sus coordenadas relativas a la la base B.

Ejerc. 3.8 a) Considerando en $\mathbb{R}^2$ la base $B = \{(5, 1), (2, 3)\}$ y el vector $\vec{v}$ de coordenadas (4,3) respecto de la base B, determina las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

El vector $\vec{v}$ se obtiene así: $\quad 4 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}$

o, escribiendo la combinación lineal como producto matriz-vector: $\quad \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}$

$$P_B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ ] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boxed{P_B \quad [\vec{v}]_B = \vec{v}} \qquad \textbf{[2]}$$

b) Considerando en $\mathbb{R}^2$ la base $B = \{(5, 1), (2, 3)\}$ y $\vec{v} = (26, 13)$, determina las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B.

Hay que obtener (c_1, c_2) tales que $c_1(5, 1) + c_2(2, 3) = (26, 13)$. O lo que es lo mismo, hay que resolver el SL de matriz ampliada $[\ P_B \mid \vec{v}\ ]$ **[3]**.

Resolviendo $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 26 \\ 1 & 3 & 13 \end{array}\right]$ obtendremos como solución, obviamente, $[\vec{v}]_B = (4, 3)$

Teniendo en cuenta que P_B es invertible, la solución del sistema también se puede obtener así:

$$\boxed{[\vec{v}]_B = P_B^{-1}\vec{v}} \quad \textbf{[4]}.$$

Esta ecuación también se puede obtener de **[2]** sin más que premultiplicar ambos miembros por P_B^{-1}.

- La ecuación **[2]** nos da la transformación desde $[\vec{v}]_B$ a $\vec{v}$, es decir, de coord. en base B a coord. estándar.
- La ecuación **[4]** da la transformación desde $\vec{v}$ hasta $[\vec{v}]_B$, es decir, de coord. estándar a coord. relativas a base B. En la práctica requiere menos operaciones resolver el sistema (método **[3]**) que calcular la inversa y después premultiplicar por ella (la obtención de la inversa es la que requiere en general más operaciones).

3.6 Matriz de cambio de base en $\mathbb{R}^n$

1. Justificaciones teóricas

Se verifica el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en cualquiera de los libros de la bibliografía:

Considerados el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y dos bases B y B' del mismo, existe una matriz P única tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$, siendo $[\vec{x}]_B$ las coordenadas de un vector $\vec{x}$ cualquiera de $\mathbb{R}^n$ respecto de la base B, y $[\vec{x}]_{B'}$ las coordenadas de ese mismo vector respecto de la base B'.

Las columnas de dicha matriz P resultan ser las coordenadas de los vectores de la base B, en su orden, respecto de la base B',

$$\boxed{P = [\ [\vec{b}_1]_{B'}\ [\vec{b}_2]_{B'}\ \dots\ [\vec{b}_n]_{B'}\ ]} \qquad \textbf{[5]}$$

La expresión **[5]** proporciona un método de obtención de P que llamamos obtención de P "por construcción"

Nótese:

$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n$ $\qquad\qquad$ $\vec{x} = c_1'\vec{b'}_1 + \dots + c_n'\vec{b'}_n$

$[\vec{x}]_B = (c_1, \dots, c_n)$ $\qquad\qquad$ $[\vec{x}]_{B'} = (c_1', \dots, c_n')$

Fijándonos en **[5]** cada columna i de P se obtiene resolviendo el SL de matriz ampliada $[\ P_{B'}\ |\ \vec{b}_i\ ]$, siendo $P_{B'}$ la matriz cuyas columnas son los vectores de la base B'. Para obtener las n columnas de P hay que resolver los n sistemas, cada uno con un $\vec{b}_i$ pero usando siempre la misma matriz de coeficientes B'. Por tanto resolveremos el SL como un sistema múltiple, de matriz ampliada $[P_{B'}|P_B]$. Obviamente P_B es la matriz que tiene por columnas los vectores de la base B.

Resolviendo el SL $[P_{B'}|P_B]$ con el método de Gauss-Jordan llegaremos a que la forma escalonada reducida de $P_{B'}$ es la identidad, ya que P_B' es cuadrada de rango n (sus columnas son base de $\mathbb{R}^n$, por fanto son n vectores l.i. con n entradas).

$$\boxed{[\ P_{B'}\ |\ P_B]\ \rightarrow\ \dots\ \rightarrow\ [\ I\ |\ P\ ]} \qquad \textbf{[6]}$$

Obtención de P resolviendo las ecs. lineales mediante Gauss-Jordan.

Teniendo en cuenta que $P_{B'}$ es invertible, P también se podría obtener así: $\boxed{P = P_{B'}^{-1}P_B}$ **[7]**, pero es más sencillo aplicar el procedimiento **[6]**, ya que la obtención de la inversa junto con la multiplicación de las matrices requiere de muchas más operaciones.

2. Transformación inversa: $[\vec{x}]_{B'}$ a $[\vec{x}]_B$.

P es obviamente invertible, pues es producto de invertibles. P_B es invertible por la misma razón que $P_{B'}$, esto es, por ser sus columnas base de $\mathbb{R}^n$.

Partiendo de $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$ y multiplicando ambos miembros por P^{-1} tenemos, $[\vec{x}]_B = P^{-1}[\vec{x}]_{B'}$, por tanto P^{-1} es la matriz de cambio de base de $[\vec{x}]_{B'}$ a $[\vec{x}]_B$. Denotando $Q = P^{-1}$, los resultados equivalentes a los anteriores para el cambio de base de B' a B son:

$$Q = [\ [\vec{b'}_1]_B\ [\vec{b'}_2]_B\ \dots\ [\vec{b'}_n]_B\ ] \qquad [\ P_B \mid P'_B] \ \rightarrow \ \dots \ \rightarrow \ [\ I \mid Q\ ] \qquad Q = P_B^{-1} P_{B'}$$

En la práctica, si conocemos P calcularíamos Q directamente como la inversa de P.

3. Otra deducción de P

$$\begin{matrix} P_B\,[\vec{x}]_B = \vec{x} \\ P_{B'}\,[\vec{x}]_{B'} = \vec{x} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}\,[\vec{x}]_{B'} \quad \Rightarrow \quad P_{B'}^{-1} P_B\,[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$$

Hemos llegado a la ecuación **[7]** anterior, $P = P_{B'}^{-1} P_B$.

4. Ecuación **[7]** interpretada como composición de 1) cambio de base de B a canónica, 2) cambio de base de canónica a B'

Nótese en la ec. **[7]** que P es la composición de dos transformaciones. Primero se aplica P_B para transformar coordenadas relativas a la base B a coordenadas estándar (relativas a la base canónica). Seguidamente se resuelven las coordenadas estándar respecto de la base B' para obtener las coordenadas en B'.

5. Matriz de cambio de base de base B a base canónica

En la ecuación **[5]** tomamos la base canónica como B', obteniendo:

$$P = [\ [\vec{b}_1]_{Bcan}\ [\vec{b}_2]_{Bcan}\ \dots\ [\vec{b}_n]_{Bcan}\ ] = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_n\ ] = P_B$$

Encontramos lo que ya conocíamos: la matriz de cambio de base de base B a la base canónica es P_B, de forma que $P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$

Observación: No todo lo presentado en esta sección es aplicable si en vez de trabajar con las bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ trabajamos con las bases de un subespacio H de $\mathbb{R}^n$ con dimensión estrictamente menor que n. La expresión **[5]** sigue siendo válida, sin embargo no se puede aplicar la expresión **[7]** ya que la matriz $P_{B'}$ (al igual que la matriz P_B) no es invertible, ya que aunque las columnas son l.i. la matriz no es cuadrada. La matriz P sí es invertible. No trataremos en este curso cambios de base en subespacios estrictos de $\mathbb{R}^n$, únicamente en el propio $\mathbb{R}^n$.

Ejerc. 3.9 Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y en él las bases $B = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

a) Obtén la matriz de P de cambio de coordenadas de base B a base B'.

b) Sabiendo que las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, obtén sus coordenadas respecto de la base B'.

c) ¿Cuáles son las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$?

Solución:

a Obtención de P

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

La matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base B' es: $\boxed{P = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}}$

2 $P[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B'}$, por tanto: $[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39/2 \\ -13/2 \end{bmatrix}$ $\quad \boxed{\begin{bmatrix} 39/2 \\ -13/2 \end{bmatrix}}$

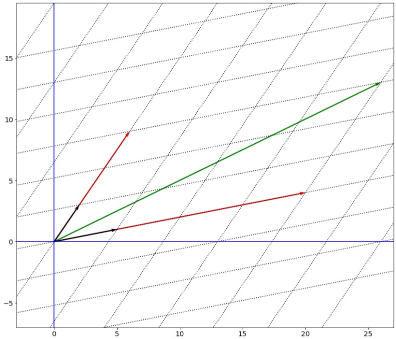
3 $P_B[\vec{v}]_B = \vec{v}$, por tanto: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}$ $\quad \boxed{\begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}}$

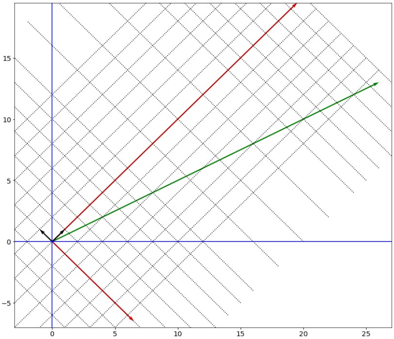
Conclusiones sobre coordenadas de $\vec{v}$:

- $\vec{v}$ tiene coordenadas (4,3) en base $B = \{(5,1), (3,2)\}$
- $\vec{v}$ tiene coordenadas (39/2,-13/2) en base $B' = \{(1,1), (-1,1)\}$
- $\vec{v}$ tiene coordenadas (26,13) en $B_{\text{can}} = \{(1,0), (0,1)\}$

En la figura izquierda vemos en negro los vectores de la base B, $(5, 1)$ y $(2, 3)$. En verde vemos el vector $\vec{v}$, que tiene coordenadas $(4, 3)$ en esta base. Se marca en rojo el vector igual a las cuatro unidades del primer vector base, y el vector igual a las tres unidades del segundo vector base.

En la figura derecha vemos en negro los vectores de la base B', $(1, 1)$ y $(-1, 1)$. El vector $\vec{v}$, en verde, tiene coordenadas $(39/2, -13/2)$ respecto de esta base. Se marca en rojo el vector igual a $39/2$ unidades del primer vector base, y el vector igual a las $-13/2$ unidades del segundo vector base.





Comparación entre las coordenadas del vector $\vec{v} = (26, 13)$ relativas a dos bases distintas. El vector está representado en verde y los vectores que forman la base en negro. Cada vector rojo es el producto de uno de los vectores base por su correspondiente coordenada, de forma que la suma de los dos vectores rojos es el vector verde.

Ejerc. 3.10

a) Demuestra que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^4$

$B_1 = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 1, 1), \vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$

$B_2 = \{\vec{u}_1 = (1, 2, 0, 0), \vec{u}_2 = (0, 1, 2, -1), \vec{u}_3 = (1, -1, -1, -1), \vec{u}_4 = (0, 1, 1, 1)\}$

b) Encuentra las coordenadas del vector $\vec{x} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ relativas a la base B_2

c) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 a la base B_2.

(Los dos primeros apartados son prácticamente iguales a los del ejercicio 10, pg. 161 de HVZ12)

Ejerc. 3.11 Sean las bases de $\mathbb{R}^3$:

$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ con $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2$ y $\vec{u}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

y $B' = \{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \vec{u'}_3\}$ con $\vec{u'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{u'}_2 = \vec{e}_2$ y $\vec{u'}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$,

siendo los $\vec{e}_i$ los vectores de la base canónica.

a) Justifica que ambos conjuntos son base.

b) Obtén las coordenadas en la base B' del vector $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$

c) Obtén la matriz de cambio de base de B a B'.

d) Obtén las coordenadas de $\vec{x}$ en la base estándar.

(HVZ12 ejemplo A, pg. 158. Cambiando ligeramente el enunciado y ampliándolo).