

3 Espacios Vectoriales

- 3.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos
- 3.2 Combinación lineal, conjunto generado y dependencia lineal
- 3.3 Subespacios vectoriales
- 3.4 Base y dimensión de un espacio vectorial
- 3.5 Coordenadas
- 3.6 Matriz de cambio de base en \mathbb{R}^n
- 3.7 Formas paramétrica e implícita de los subespacios de \mathbb{R}^n
- 3.8 Ejercicios Parte 1
- 3.9 Subespacios Cola, NulA y relación entre sus dimensiones
- 3.10 Intersección y suma de subespacios de \mathbb{R}^n
- 3.11 Ejercicios Parte 2

3.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos

Definición

Un conjunto V de elementos se dice que es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , si en él se han definido dos operaciones: la suma, $+$, de manera que a cada par de elementos u y v de V se le haga corresponder el elemento $u + v$ de V , y la multiplicación por un número real⁸, de tal manera que a cada par de elementos u de V y α de \mathbb{R} se le haga corresponder el elemento αu de V , cumpliéndose además los siguientes axiomas:

Para la suma

A1 Conmutativa: $\forall u, v \in V, u + v = v + u$

A2 Asociativa: $\forall u, v, w \in V, u + (v + w) = (u + v) + w$

A3 Existencia de elemento neutro: $\exists 0_V \in V / u + 0_V = u \quad \forall u \in V$

A4 Existencia de elemento opuesto: $\forall u \in V \quad \exists -u \in V / u + (-u) = 0_V$

Para la multiplicación por un escalar

A5 $1u = u$ 1 es el elemento neutro del producto en \mathbb{R} . Se le denomina elemento unidad de V .

A6 Pseudoasociativa respecto de la multiplicación por escalares: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall u \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Distributivas

A7 De la multiplic. por escalar respecto de la suma de vectores⁹: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall u, v \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

A8 De la multiplic. por escalar respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Es importante volver a señalar explícitamente la condición dada en la definición de que las dos operaciones sean cerradas, o axiomas de cierre:

$$C1 \quad \forall u, v \in V, u + v \in V$$

$$C2 \quad \forall u \in V \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in V$$

Un espacio vectorial sobre \mathbb{R} se denomina también espacio vectorial real.

⁸La operación también se designa como "multiplicación por escalar". Debemos entender que aquí solo nos referimos a escalares reales (quedan excluidos los complejos).

⁹A los elementos de un espacio vectorial se les designa con frecuencia con el nombre genérico de vectores, heredando la nomenclatura de los elementos del espacio vectorial \mathbb{R}^n .

Propiedades

De la definición de Espacio Vectorial se infieren las siguientes propiedades:

- Por la propiedad conmutativa:
$$0_V + u = u \qquad -u + u = 0_V$$
- El elemento neutro de un espacio vectorial es único.
- El elemento opuesto de cada elemento de un espacio vectorial es único.
- $\forall u \in V \quad 0 u = 0_V$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha 0_V = 0_V$
- $\alpha u = 0_V \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } u = 0_V$
- $(-1) u = -u$
- La combinación de las operaciones de multiplicación por un escalar y suma es la operación conocida como combinación lineal. La combinación lineal de los elementos u y v de V con escalares α y β de \mathbb{R} es $\alpha u + \beta v$, y pertenece a V .

Ejemplos (ver HVZ12, pgs. 145-146)

- El conjunto \mathbb{R}^2 de los vectores en el plano.
- El conjunto \mathbb{R}^3 de los vectores en el espacio.
- El conjunto \mathbb{R}^n de los vectores en el espacio de dimensión n .
- El conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de todas las matrices reales de m filas y n columnas.
- El conjunto P_n de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n .

Los elementos de P_n se definen por la expresión: $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$

Un polinomio tiene grado k si $a_k \neq 0$ y $a_i = 0$ para todo $i > k$.

Definición de la suma:

$$\text{Sean } p_1(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \text{ y } p_2(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_n\lambda^n, \text{ entonces}$$
$$p(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\lambda + (a_2 + b_2)\lambda^2 + \dots + (a_n + b_n)\lambda^n$$

Definición de la multiplicación por un real:

$$\text{Sean } p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ entonces}$$
$$\alpha p(\lambda) = \alpha a_0 + \alpha a_1\lambda + \alpha a_2\lambda^2 + \dots + \alpha a_n\lambda^n$$

- El conjunto de las funciones reales de variable real continuas y definidas en el intervalo $[a, b]$ es espacio vectorial.

$$\text{Def. de la suma: } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\text{Def. de la multiplicación por un real: } (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Ejemplos de conjuntos que no son espacios vectoriales

Para justificar que no lo son basta con demostrar que no cumplen uno de los 10 axiomas.

- Conjunto de las matrices de orden n de determinante nulo, con las operaciones de suma y producto por escalar estudiadas.
- El conjunto de los polinomios de grado exactamente n
- **Ejerc. 3.1** Demuestra que el siguiente subconjunto de \mathbb{R}^2 no es espacio vectorial.
 $W = \{(a, 1) / a \in \mathbb{R}\}$
(Observa que W es la recta de \mathbb{R}^2 de ecuación $y = 1$).

3.2 Combinación lineal, conjunto generado y dependencia lineal

Sea V espacio vectorial real y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$.

- Se dice que $v \in V$ es combinación lineal de los elementos de S si $\exists c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R} / v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$.
A los escalares c_1, c_2, \dots, c_p se les llama pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden tomar cualquier valor real incluido el 0.
- El conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los elementos de S se denomina conjunto generado por S y se denota $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ o $\langle S \rangle$. A su vez S se dice que es conjunto generador o sistema generador de $\langle S \rangle$.
- Se dice que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ es linealmente dependiente si existen p reales $(c_1, c_2, \dots, c_p)^{10}$, no todos cero, tales que
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0_V \quad [1]$$
Una ecuación como [1], en la que no todos los coeficientes son cero, se denomina relación de dependencia lineal del conjunto.
- Se dice que S es linealmente independiente si y sólo si no es linealmente dependiente.
Es decir, si $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0_V \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$

Propiedades en relación con la dependencia e independencia lineal

- S es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si al menos un elemento de S puede expresarse como combinación lineal del resto.
- S formado por dos elementos es linealmente dependiente si y sólo si un elemento es múltiplo del otro.
- Si $0_V \in S$, entonces S es un conjunto linealmente dependiente.

En la Sección 1.2 se adelantaron algunas de estas definiciones y propiedades para los vectores de \mathbb{R}^n .

¹⁰Se ha incluido el paréntesis para recalcar que los coeficientes actúan de forma agrupada

-
- En el espacio vectorial \mathbb{R}^n no puede haber conjuntos linealmente independientes formados por más de n vectores. Justificación: La matriz cuyas columnas son los vectores tendrá n filas, y por tanto no puede tener más de n columnas pivotaes, tendrá como máximo n .
 - n vectores de \mathbb{R}^n que formen las n columnas de una matriz A_n son l.i. si y solo si la matriz A es invertible.
 - **Ejerc. 3.2** En el espacio vectorial de las matrices cuadradas 2 por 2, obtén la combinación lineal de las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, tomando como coeficientes 2 y -2 , respectivamente.
 - **Ejerc. 3.3** Justifica que en el espacio vectorial de las funciones reales de variable real, continuas, y definidas en el intervalo $[a, b]$, las funciones $f(x) = \cos^2(x)$, $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ y $h(x) = 1$ forman un conjunto linealmente dependiente. (HVZ12 pg. 151).
-

3.3 Subespacios vectoriales

Definición

Sea V espacio vectorial y H un subconjunto no vacío de V . Se dice que H es subespacio vectorial de V , si H es, en sí mismo, espacio vectorial con las mismas operaciones.

- $H \subseteq V$, no vacío, es subespacio de V si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$C1 \quad \forall u, v \in H, u + v \in H$$

$$C2 \quad \forall u \in H \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in H$$

Basta por tanto con que se cumplan los axiomas de cierre.

$\{0_V\}$ es subespacio vectorial de V . Se denomina subespacio cero de V .

El espacio vectorial completo V puede considerarse subespacio vectorial de sí mismo. A los subespacios de V que no son el propio V los denominamos subespacios estrictos.

Ejemplos:

- En \mathbb{R}^3 todas las rectas que pasan por el origen y todos los planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales. Puedes fijarte, gráficamente, en que la suma y el producto por un real son cerrados tanto en las rectas que pasan por el origen como en los planos que pasan por el origen.
- Los polinomios con coeficientes reales son subespacio de las funciones continuas reales de variable real. A su vez los polinomios de grado igual o inferior a n con coeficientes reales son subespacio del espacio vectorial formado por *todos* los polinomios con coeficientes reales (es decir, de los polinomios de *cualquier* grado).
- El conjunto formado por la unión de los polinomios de grado igual a n con *todos los coeficientes iguales* junto con el polinomio cero, son subespacio del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado igual o inferior a n .
- Las matrices cuadradas de orden n *diagonales* son subespacio del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n .

- Dado $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$, $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ es subespacio vectorial de V . Se le denomina subespacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Lo habíamos llamado en la sección anterior subconjunto generado. Precisamos ahora que es subespacio. En efecto lo es porque se cumplen los axiomas de cierre: la suma de combinaciones lineales es una c.l. de los mismos vectores, y la multiplicación de una c.l. por un real es también c.l. de los mismos vectores. Decimos del conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ que es conjunto generador o sistema generador del subespacio vectorial $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$.

Por ejemplo $\{1, x, x^2\}$ es sistema generador del espacio vectorial formado por todos los polinomios de grado menor o igual que 2. Ese espacio vectorial se puede escribir como $\langle 1, x, x^2 \rangle$.

- El conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo con n incógnitas es subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . (En la Secc. 1.2 vimos que la suma de soluciones de un SLH es también solución y que el producto de una solución por un real es también solución. Se cumplen los dos "axiomas de cierre", por tanto es subespacio).

Tomando $A \in M_{m \times n}$ como matriz de coeficientes, $A\vec{x} = \vec{0}$ es el SLH.

Si $A\vec{x}_1 = \vec{0}$, $A\vec{x}_2 = \vec{0}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{0}$ y $A\alpha\vec{x}_1 = \vec{0}$.

El conjunto de soluciones se conoce como subespacio nulo de A , y se denota $N(A)$ o $\text{Nul}(A)$.

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / A\vec{x} = \vec{0}\}$$

$N(A)$ es subconjunto de \mathbb{R}^n , al estar formado por vectores de \mathbb{R}^n .

También se designa a este subespacio como núcleo de A .

3.4 Base y dimensión de un espacio vectorial

Hay espacios vectoriales que sólo tienen un elemento: los que están formados exclusivamente por el elemento neutro O_V . Para el resto de espacios vectoriales V , siempre existe un conjunto generador de la forma $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$ tal que $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$. Dicho de otra forma, todo espacio vectorial es un subespacio generado.

Por ejemplo en \mathbb{R}^3 :

- El espacio vectorial $\langle (1, 1, 1) \rangle$ es la recta que pasa por el origen, con vector generador $(1,1,1)$.
- El espacio vectorial $\langle (1, 1, 1), (2, 2, 1) \rangle$ es un plano que pasa por el origen, con vectores generadores $(1,1,1)$ y $(2,2,1)$. Es así no porque sean dos vectores, sino porque son dos y l.i.
Por ejemplo $\langle (1, 1, 1), (2, 2, 2) \rangle = \langle (1, 1, 1) \rangle$
- El espacio vectorial $\langle (1, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1) \rangle$ es \mathbb{R}^3 , ya que tenemos tres vectores l.i. Todo vector $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ se puede escribir como comb. lineal de los vectores anteriores.

Un conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$ se dice que es base de V si es conjunto generador de V y linealmente independiente.

Se verifican los siguientes resultados:

- Dado $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ conjunto generador de V , si se elimina uno a uno cada vector del conjunto que sea c.l. del resto, los vectores que queden siguen siendo conjunto generador de V .
- $v \in V$ se escribirá de forma única como c.l. de los vectores del conjunto generador $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ si y solo si ese conjunto es linealmente independiente.
- Si un conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ genera V , entonces V no tiene conjuntos l.i. con más de p vectores.
- Todas las bases de V tienen el mismo número de vectores. A ese número se le denomina dimensión de V , denotado $\dim V$.

El espacio vectorial cero no tiene base, por ser $\{O_V\}$ un conjunto l.d. Se le asigna, por definición, dimensión cero.

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim P_n = n + 1$$

$$\dim M_{m \times n} = m \times n$$

La dimensión de un espacio vectorial marca el mínimo número de vectores necesarios para ser conjunto generador, y el máximo número posible para ser conjunto l.i.

Sea V de dimensión $n > 0$:

- Todo subconjunto de V formado por n vectores linealmente independientes es base de V .
- Todo subconjunto de V formado por n vectores y que genere V es base.
- Todo subconjunto que genere V tendrá al menos n vectores. Si tiene n serán l.i.. Si tiene más de n será conjunto l.d., y se puede reducir hasta obtener una base.
- Todo subconjunto de V con $k < n$ vectores linealmente independientes puede ampliarse con $n - k$ vectores (que formen con el anterior un conjunto total l.i.) para formar una base de V .

Ejerc. 3.4 Encuentra una base del espacio vectorial \mathbb{R}^4 que contenga los vectores $\{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$. (HVZ12, ejerc. 6, pg. 160).

Ejerc. 3.5 Determina para qué valores de a los vectores $\vec{u}_1 = (a, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ y $\vec{u}_3 = (2, -1, a)$ forman una base del espacio vectorial \mathbb{R}^3 . (HVZ12, ej. 15, pg. 162).

Ejerc. 3.6 En \mathbb{R}^3 , obtén una base del subespacio generado por el conjunto $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 2)\}$. (HVZ12, pg. 163).

Base canónica del espacio vectorial \mathbb{R}^n

Los vectores dados por las columnas de la matriz real I_n son elementos del espacio vectorial \mathbb{R}^n y se denotan como \vec{e}_i , con i desde 1 hasta n .

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al conjunto $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ se le denomina **base canónica o estándar de \mathbb{R}^n** .

- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, puesto que esos vectores, dispuestos como columnas en la matriz I_n corresponden todos a columnas pivotaes (en este caso la matriz coincide con su forma escalonada reducida).
- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es sistema generador de \mathbb{R}^n , ya que el sistema lineal de matriz ampliada $[\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n \ | \ \vec{v}]$ es compatible para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, pues $\text{rg}A = n = \text{rg}A^*$, y por tanto todo \vec{v} puede escribirse como c.l. del conjunto B .

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^2

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3