

### 2 Determinantes

2.1 Introducción

2.2 Definición de determinante

2.3 Propiedades de los determinantes

2.4 Inversa a partir de la traspuesta de la matriz de cofactores

2.5 Relación entre el determinante de  $A$  y el de una forma escalonada de  $A$

2.6 Relación entre determinante, inversa, rango y forma escalonada reducida

2.7 Método de Cramer

2.8 Rango de una matriz como el orden del mayor menor no nulo

Ejercicios

## 2.1 Introducción

A toda matriz real cuadrada  $A_n$  le asociamos un real denominado **determinante de A**,  $\det A$  o  $|A|$  simbolizado así :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Su valor nos dirá si la matriz es singular o no.

Los determinantes nos permitirán además determinar inversas y resolver sistemas lineales (método de Cramer).

Presentamos varias definiciones y propiedades de las matrices cuadradas antes de empezar con los determinantes:

- En una matriz cuadrada se denomina diagonal principal al conjunto ordenado de reales  $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ <sup>6</sup>
- Una matriz cuadrada  $A$  es:
  - triangular superior si  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ .
  - triangular inferior si  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ .
  - triangular si es triangular superior o triangular inferior.
  - diagonal si  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .
  - estrictamente triangular superior si es triangular superior y los elementos de la diagonal principal son todos distintos de cero.
- Toda matriz  $A$  cuadrada y escalonada es triangular superior.

---

<sup>6</sup>Se toma la definición de LLM16, pg. 110.

Reglas mnemotécnicas para los determinantes de orden 2 y de orden 3.

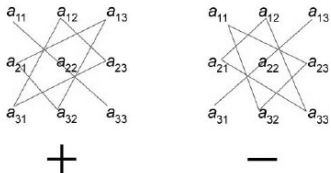
Para un determinante de orden 2 se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} \bullet & \\ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \circ \\ \circ & \end{vmatrix}$$

Para un determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

La regla de Sarrus simplifica la obtención del determinante de orden 3.



## 2.2 Definición de determinante

Definición del determinante de  $A$  mediante inducción:

- si  $n = 1$   $|A| = a_{11}$
- si  $n > 1$   
elegida una fila  $i$   $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$  ó elegida una columna  $j$   $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$

$A_{ij}$  es el denominado **cofactor** de  $a_{ij}$  y se define cómo:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ , siendo  $M_{ij}$  la matriz  $n - 1 \times n - 1$  que resulta de quitar de  $A$  la fila  $i$  y la columna  $j$ .

Al determinante de  $M_{ij}$  se le denomina **menor** de  $a_{ij}$ .

Vemos que para calcular un determinante de orden 2,  $n=2$ , tenemos que obtener dos cofactores de orden 1, es decir, dos determinantes de orden 1. La definición inductiva se basa en que el determinante de orden  $n$  se calcula a partir de  $n$  determinantes de orden  $n - 1$ .

**Ejercicio 2.1.** Calcula el siguiente determinante por cofactores de la primera columna.

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \\
 &+ 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -51
 \end{aligned}$$

En este caso hubiera sido más conveniente elegir la primera fila, puesto que dos de sus cuatro elementos son ceros, ahorrándonos el cálculo de dos cofactores.

## 2.3 Propiedades de los determinantes

- $|A^t| = |A|$
- El determinante de las matrices triangulares y diagonales es el producto de los elementos de la diagonal principal. De esta propiedad se deduce de forma inmediata que el determinante de la matriz identidad es 1.  $|I| = 1$ .
- Si los elementos de una línea<sup>7</sup> son todos cero, el determinante es cero.
- Si dos líneas paralelas son proporcionales el determinante es cero. Obviamente si son iguales son proporcionales, y por tanto el determinante es 0.
- Si los elementos de una línea son combinación lineal de líneas paralelas, el determinante es cero.
- Si a los elementos de una línea se le suman los correspondientes a otra paralela multiplicados por un real, el determinante no varía.

### **Esta propiedad es muy útil para simplificar el cálculo de determinantes**

Significa que la operación elemental de reemplazamiento,  $F_i = F_i + \alpha F_j$ , no altera el determinante.

- Si todos los elementos de una línea tienen un factor común, el determinante puede obtenerse como el producto de ese factor común por el determinante que resulta de eliminar ese factor común en la correspondiente línea.
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- Si se intercambian entre sí dos líneas paralelas el determinante cambia de signo.

---

<sup>7</sup>Por "línea" nos referiremos en toda la sección a filas o a columnas

- Dadas  $A_n, B_n$ ,  $|A B| = |A| |B|$

Se generaliza a cualquier número de matrices.

- Si  $A$  es invertible, entonces  $|A| \neq 0$  y  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

Se deduce de la igualdad siguiente:  $|A||A^{-1}| = |I| = 1$

Aplicando las propiedades anteriormente expuestas podemos simplificar enormemente el cálculo de determinantes.

**Ejercicio 2.2.** Calcula el valor del siguiente determinante:  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

Desarrollaremos por cofactores de la 1ª columna. Pero previamente realizaremos las operaciones elementales necesarias para hacer ceros todos los elementos de esta columna excepto el primero. La fila 1 es la fila auxiliar, utilizada para transformar los elementos de las filas 3 y 5.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F_3 = F_3 + (-1) * F_1 \\ F_5 = F_5 + (-1) * F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 + (-1) & 1 + (-2) & 0 + (-1) & 2 + (-2) & 0 + (-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 + (-1) & 2 + (-2) & 2 + (-1) & 1 + (-2) & 1 + (-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ Desarrollando}$$

el determinante por los cofactores de la 1ª columna:

$$|A| = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el nuevo determinante de orden 4 por cofactores de la 1ª columna.

$$|A| = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1 + 2 - 1 + 2) = 2$$

## 2.4 Inversa a partir de la traspuesta de la matriz de cofactores

Dada  $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , se define **matriz de cofactores de A**,  $\text{cof}(A)$ , como aquella cuyo elemento  $(i, j)$  es el cofactor  $A_{ij}$ .

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

En Álgebra tiene mucho interés la traspuesta de la matriz de cofactores de  $A$ , ya que a partir de ella se puede calcular la inversa de  $A$ .

**Propiedad:**  $(\text{cof}(A))^t = \text{cof}(A^t)$

Se cumplen los siguientes resultados: 
$$\begin{cases} A (\text{cof}(A))^t = |A| I \\ (\text{cof}(A))^t A = |A| I \end{cases}$$

Si  $|A| \neq 0$ , podemos pasar  $|A|$  al primer miembro, dividiendo, y obtenemos:

$$A \frac{(\text{cof}(A))^t}{|A|} = I \tag{1}$$

$$\frac{(\text{cof}(A))^t}{|A|} A = I \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) deducimos: 
$$A^{-1} = \frac{(\text{cof}(A))^t}{|A|} \tag{3}$$

La ecuación (3) nos da un procedimiento para calcular la inversa de una matriz.

**RESUMEN:** En esta sección encontramos que si  $|A| \neq 0$ , entonces  $A$  es invertible, con  $A^{-1} = (\text{cof}(A))^t / |A|$ . En la sección anterior vimos que si  $A$  es invertible, entonces  $|A| \neq 0$ . Por tanto concluimos:

$$A \text{ invertible} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

**OBSERVACIÓN:** Teniendo en cuenta la propiedad  $\text{cof}(A^t) = (\text{cof}(A))^t$  la ecuación (3) se puede reescribir así:

$$A^{-1} = \frac{\text{cof}(A^t)}{|A|}$$

**Ejercicio 2.3.** Calcula la inversa de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$  a partir de su matriz de cofactores.

Sol.

En primer lugar hay que calcular el determinante de  $A$ , confirmando que no es cero. Se obtiene  $|A| = -10$  aplicando el método de Sarrus.

Seguidamente obtenemos la matriz de cofactores. La matriz cuyos elementos son los menores de los  $a_{ij}$  es:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de cofactores de  $A$  tenemos que multiplicar los elementos  $|M_{ij}|$  por el factor  $(-1)^{i+j}$ , o lo que es lo mismo, tenemos que cambiar de signo los elementos en los que la suma del índice de fila y el índice de columna sea impar.

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -6 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Seguidamente obtenemos la traspuesta:  $(\text{cof}(A))^t = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Para obtener la inversa sólo queda dividir por el determinante.

$$A^{-1} = \frac{(\text{cof}(A))^t}{|A|} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

*Comprueba el resultado siempre que calcules una inversa, confirmando que  $AA^{-1} = I$ .*

**OBSERVACIÓN:** Si todos los elementos de una matriz son enteros y su determinante es 1 o -1, entonces los elementos de la inversa son también todos enteros.

## 2.5 Relación entre el determinante de $A$ y el de una forma escalonada de $A$

Analizamos aquí cómo varía el determinante de una matriz al efectuar operaciones elementales sobre sus filas, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes

- Intercambio de filas: cambia el signo del determinante
- Reemplazar una fila por ella más un múltiplo de otra: no hace variar el determinante
- El escalamiento de una fila por un factor no nulo: escala el determinante por el mismo factor

Por tanto, si  $U$  es una forma escalonada de  $A$ , entonces

$$|U| = |A| \times (-1)^s \times \alpha_1 \times \dots \times \alpha_p \quad \text{siendo}$$

$s$  el número de intercambios de filas y  $\alpha_j$  (todos distintos de 0) los factores de los escalamientos realizados sobre las filas de  $A$ .

La expresión anterior implica:

$$|U| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

## 2.6 Relación entre determinante, inversa, rango y forma escalonada reducida

Continuando con las matrices  $A$  y  $U$  de la sección anterior, analicemos  $|U|$ .

Por ser  $U$  cuadrada y escalonada es triangular superior, y por tanto  $|U|$  es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$$|U| = u_{11} \times u_{22} \times \dots \times u_{nn}$$

Deducimos:

- $A$  invertible  $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |U| \neq 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \ u_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A_{\text{red}} = I_n$ .

En este caso las formas escalonadas de  $A$  son triangulares superiores estrictamente.

En el Tema 1 también se dedujo el resultado de que  $A$  invertible si y solo si  $\text{rg}A = n$ .

Estas afirmaciones también se pueden escribir en esta forma:

- $A$  no invertible  $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow |U| = 0 \Leftrightarrow \exists u_{ii} = 0 \Leftrightarrow \text{rg}A < n \Leftrightarrow A_{\text{red}}$  no es la identidad.

En este caso las formas escalonadas de  $A$  son triangulares superiores no estrictamente.

**Ejercicio 2.4.** Determina si las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Sol:

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = -2$  El determinante es distinto de cero por tanto  $A$  es invertible

También se podría haber razonado que  $A$  es invertible ya que  $\text{rg } A = 3$  (vemos que en la forma escalonada quedan 3 pivotes)

- $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$   $B$  no es invertible ya que su determinante es cero.

Del resultado  $\text{rg } B=2$  (en la forma escalonada quedan 2 pivotes) también se podría haber concluido que  $B$  no es invertible.

**Ejercicio 2.5.** Determina el valor de  $c$  para que la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$  sea invertible.

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & c-4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2(c-4) \end{bmatrix} =$$

$A_{\text{esc}}$

$$\begin{aligned} F_2 &= F_2 - 2 * F_1 \\ F_3 &= F_3 - 2 * F_1 \end{aligned}$$

$F_{23}$

$$F_3 = F_3 + (c - 4) * F_2$$

Nótese que la operación  $F_3 = F_3 + (c - 4)F_2$  puede realizarse cualquiera que sea el valor de  $c$ .

No se podría efectuar  $F_2 = (c - 4)F_2$ , porque en los escalamientos el factor no puede ser cero, y se tendría ese valor para  $c = 4$ .

De la matriz  $A_{\text{esc}}$  obtenida se concluye:

- Si  $c = 4$   $\text{rg}A=2$  por tanto  $A$  no es invertible.
- Si  $c \neq 4$   $\text{rg}A=3$  por tanto  $A$  es invertible.

**Resultado:** La matriz es invertible si y sólo si  $c \neq 4$

**Otro método:** Mediante el determinante de  $A$ . Este determinante lo podemos obtener con la matriz

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ , ya que las operaciones de reemplazamiento no han variado el valor del determinante.

$|A| = 1((c - 4)(-2) - 0) = -2(c - 4)$  por tanto  $A$  invertible si y solo si  $c \neq 4$ .

La matriz es invertible si y sólo si  $c \neq 4$

## 2.7 Método de Cramer

Consideremos el sistema lineal  $A\vec{x} = \vec{b}$  con  $A$  invertible de orden  $n$  y siendo por tanto compatible determinado.

Dados  $A$  y  $\vec{b}$  denotamos  $A_i = [ \vec{a}_1 \ \dots \ \vec{b} \ \dots \ \vec{a}_n ]$   
col.  $i$

$A_i$  es la matriz que tiene en la columna  $i$  el vector  $\vec{b}$  y las demás columnas como en  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

col.  $i$

La solución única  $\vec{x}$  del sistema  $A\vec{x} = \vec{b}$  puede obtenerse como:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Ejercicio 2.6. Resuelve el SL  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$  mediante el método de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{58}{2} = 29 \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{32}{2} = 16 \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\vec{x} = (29, 16, 3)$$

## 2.8 Rango de una matriz como el orden del mayor menor no nulo

Dada una matriz  $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ , se define **menor de orden  $p$**  de  $A$ , con  $p \leq m$

y  $p \leq n$ , al determinante de la submatriz de orden  $p$  que resulta de eliminar  $m - p$  filas y  $n - p$  de columnas de  $A$ .

Por ejemplo, considerada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , veamos algunos de sus menores:

El menor de orden 2 que toma las filas 1,2 y las columnas 1,4, es:  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ .

El menor de orden 2 que toma las filas 1,3 y las columnas 2,4, es:  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$ .

El número de menores de orden 2 en esta matriz es 18, ya que existen 3 elecciones para el par de filas ( $1^a$  y  $2^a$ ,  $1^a$  y  $3^a$ ,  $2^a$  y  $3^a$ ) y 6 para el par de columnas ( $1^a$  y  $2^a$ ,  $1^a$  y  $3^a$ ,  $1^a$  y  $4^a$ ,  $2^a$  y  $3^a$ ,  $2^a$  y  $4^a$ ,  $3^a$  y  $4^a$ ).

El número de menores de orden 3 en esta matriz es 4, ya que existen 4 elecciones para la terna de columnas (1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4 ; 2,3,4).

Para una matriz de orden  $m \times n$  el número de menores de orden  $p$  es:

$$\binom{m}{p} \times \binom{n}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!} \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

El primer factor corresponde al número de elecciones posibles de  $p$  filas y el segundo al número de elecciones posibles de  $p$  columnas.

**Propiedad:** Dada  $A_{m \times n}$ ,  $\text{rg}A=p$  significa que existe al menos un menor de orden  $p$  distinto de cero, y que si la matriz admite menores de orden  $p + 1$ , éstos valen todos cero.

**Propiedad:** Si todos los menores de un determinado orden son cero, también lo serán todos los menores de órdenes superiores.

Por ejemplo, si una matriz  $A_{5 \times 8}$  tiene rango 3, entonces existe al menos un menor de orden 3 que no es nulo, y todos los menores de orden 4 son nulos, y los de orden 5 también.

2.8 Considera  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ .

- Obtén una forma escalonada de  $A$ .
- A partir de ésta determina el rango y si es invertible o no, ambos en función del parámetro  $a$ , rellenando las afirmaciones siguientes.

$\text{rg}(A)=1$  si y solo si: .....

$\text{rg}(A)=2$  si y solo si: .....

$\text{rg}(A)=3$  si y solo si: .....

$\text{rg}(A)=4$  si y solo si: .....

$A$  invertible si y solo si: .....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese.

- Obtén el determinante de  $A$  y justifica el procedimiento empleado.

2.9 Estudia el tipo de solución en función del parámetro  $a$   $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2 x_1 + 3 x_2 + a x_3 = 3 \end{cases}$

2.10 Clasifica el siguiente sistema lineal en función del parámetro  $a$ .  $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + ax_3 = a \\ 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: .....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: .....

El sistema es incompatible si y sólo si: .....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

*Comprueba que las respuestas presentadas son consistentes entre sí.*

2.11 Dadas las matrices  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ , y sabiendo que

$D = ABC = \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ , calcula la matriz  $C$ . Si no existe, indícalo explícitamente.

2.12 Dadas las matrices:  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 & 3 \\ 4 & 5.2 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 1 \\ 5.2 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & \frac{a}{3} \end{bmatrix}$  y  $C = \frac{1}{3} A$

- Escribe la ecuación que relaciona  $|A|$  y  $|B|$  y justifica el resultado.

Ecuación:

Justificación:

- Escribe la ecuación que relaciona  $|A|$  y  $|C|$  y justifica el resultado.

Ecuación:

Justificación:

- 2.13 Obtén el determinante de la matriz de Vandermonde de orden 3. Para simplificar su obtención utiliza operaciones de reemplazamiento de filas ( $F_i = F_i + \alpha F_j$ ) y saca factor común.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

Razona para que valores de  $x, y, z$  el determinante es distinto de cero.

- 2.14 HVZ12, ejercicio 4d, pg. 59. Se pide el siguiente determinante:  $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 2.15 HVZ12, ejercicio 7b, pg. 95. Haz uso del concepto de determinante. El enunciado pide encontrar los valores de  $a$  para que la siguiente matriz sea invertible:  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{bmatrix}$

- 2.16 HVZ12, ejercicio 7c, pg. 95.

El enunciado pide encontrar los valores de  $a$  y  $b$  para que la siguiente matriz sea invertible:  $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$

Haz uso del determinante simplificándolo previamente (sacando factor común y realizando operaciones de reemplazamiento,  $F_i = F_i + \alpha F_j$ ).

- 2.17 HVZ12, ejercicio 11, pg. 95. Haz uso del concepto de determinante.

El enunciado pide calcular los valores de  $m$  para que el siguiente sistema tenga soluciones no triviales:  $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

- 2.18 HVZ12. En la página 91, tienes un ejemplo (Ejemplo A) de obtención de la inversa de una matriz de orden 3 por cofactores.

2.20 Razona (sin efectuar cálculos a mano) cuál es el rango de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ .

2.21 Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  determina el elemento de la posición (1,2) de  $A^{-1}$  a partir del cociente entre el cofactor que corresponda y el determinante de  $A$ .