Aplicaciones o transformaciones

- Definición de aplicación f de un conjunto S en un conjunto T como una regla que asigna a cada elemento de S un elemento, y solo uno, de T.

  Ejemplos:
  Aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ $\quad y = 3x$
  Aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ $\quad y = n^2$
  (son los ejemplos A.1 y A.2 de HVZ12, pgs. 25-26)

- En $f(v) = w$, se dice de w que es la imagen de v, y se dice de v que es el original o antecedente de w.
- Imagen de f, $\mathrm{Im} f = \{f(v) \ / \ v \in S\}$. $\mathrm{Im} f \subseteq T$
- Aplicación sobreyectiva o suprayectiva: $\mathrm{Im} f = T$
- Aplicación inyectiva: Cada elemento de $\mathrm{Im} f$ tiene como máximo un antecedente.
- Aplicación biyectiva: sobreyectiva e inyectiva a la vez.
- **Ejercicio 1.4.1** Rellena la tabla.

	sobreyectiva	inyectiva	biyectiva
$\mathbb{R} \xmapsto{3x} \mathbb{R}$			
$\mathbb{N} \xmapsto{n^2} \mathbb{N}$			
$\mathbb{R} \xmapsto{x^2} \mathbb{R}$			
$\mathbb{R} \xmapsto{x^2} \mathbb{R}^+$			

- Dadas f de S en T y g de T en U se define la composición de f y g, cómo:

$$\boxed{(g \circ f)(v) = g(f(v))}$$

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ S & \longmapsto & T & \longmapsto & U \\ v & & f(v) & & g(f(v)) \end{array}$$

  - La composición de aplicaciones es asociativa.
  - La composición de aplicaciones no necesariamente es conmutativa.

Ejercicio 1.4.2 Composición de dos aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. (HVZ12, Ejemplo B, pg. 27).

Aplicaciones Lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

- Por ser $\mathbb{R}^n$ el conjunto inicial y $\mathbb{R}^m$ el conjunto final, f asigna a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. $\vec{y} = f(\vec{x})$
- Definición 1 de aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$:

  f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es aplicación lineal si existe $A_{m\times n}$ tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

  A se denomina matriz estándar asociada a la aplicación lineal.

  La imagen de un vector mediante una aplicación lineal (a.l.) se obtiene de forma muy sencilla, simplemente se premultiplica el vector por la matriz asociada.

- **Ejercicio 1.4.3** Considera la aplicación lineal f con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

  a) Calcula la imagen de $\vec{x} = (1, 5)$.

  b) Calcula el antecedente de $\vec{y} = (-1, 18)$, si existe.

  $$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

  Otra forma de expresar f es esta: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$

- Ecuaciones de una aplicación lineal.

  En el ejemplo anterior son: $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$

- Si $m = n$ la aplicación lineal recibe el nombre de endomorfismo.

- **Ejercicio 1.4.4** Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ que asigne a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:

$$\begin{cases} y_1 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \text{ es la suma de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$

Ejercicios que introducen **matriz de simetría** y **matriz de proyección**:

- **Ejercicio 1.4.5**. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que asigne a un vector $\vec{x}$ su reflejado o simétrico respecto del eje X.

- **Ejercicio 1.4.6**. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que asigne a un vector $\vec{x}$ su proyección sobre el eje X.

- **Ejercicio 1.4.7**. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que asigne a un vector $\vec{x}$ su simétrico respecto del plano XY.

- **Ejercicio 1.4.8**. En $\mathbb{R}^3$, determina la matriz estándar A de la aplicación lineal que asigne a cada vector $\vec{x}$ su proyección ortogonal sobre el plano XY.

- Definición 2 de aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es a. l. si cumple:

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$
$$f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Las definiciones 1 y 2 son equivalentes: o f cumple las dos definiciones o no cumple ninguna.
- Comprueba gráficamente con el Ejemplo 1.4.5 utilizando $\vec{a} = (2, 0)$ y $\vec{b} = (1, 2)$, que el reflejado de la suma es igual a la suma de los reflejados.

- Propiedades de las aplicaciones lineales:
  - $f(\vec{0}) = \vec{0}$
  - $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$

- Definición/construcción de la matriz estándar A de la aplicación lineal f. Ejemplo con conjunto de partida $\mathbb{R}^3$, extensible a $\mathbb{R}^n$.

  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, siendo $\vec{e}_i$ el vector que tiene todas las entradas 0 excepto la de la posición i que vale 1.

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por ser } f \text{ a.l.}}}{=} x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3)$$

$$\vec{y} = x_1 f(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) + x_2 f(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}) + x_3 f(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{y} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ f(\vec{e}_3)\,]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}_{\vec{x}} \\ A = [\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ f(\vec{e}_3)\,]\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Para una a.l. de } \mathbb{R}^n \text{ en } \mathbb{R}^m\text{:} \\ \vec{y}_{m\times 1} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \ldots\ f(\vec{e}_n)\,]}_{A_{m\times n}} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots \\x_n\end{bmatrix}\end{array}}$$

- Análisis de A para los cuatro últimos ejercicios.
- Se denomina <u>rango de una a.l.</u> de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ al rango de su matriz estándar asociada.
- El endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se denomina endomorfismo identidad y se denota id.

  $id(\vec{x}) = \vec{x}$

  La matriz estándar asociada al endomorfismo $id(\vec{x})$ en $\mathbb{R}^n$ es la matriz identidad de orden n, I_n.

- **Ejercicio 1.4.9**. (HVZ12, ejemplo E, pg. 31). Obtén la imagen del cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (0,1), (1,1), mediante la aplicación lineal f de matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- Matriz estándar asociada a la composición de aplicaciones lineales f y g

$$\begin{array}{ccccc} & A & & B & \\ & f & & g & \\ \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^m & \longmapsto & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) & \longmapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \longmapsto & A\,\vec{x} & \longmapsto & B\;A\,\vec{x} \end{array}$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^p$$

$$g(f(\vec{x})) = B_{p\times m}\; A_{m\times n}\;\vec{x}$$

la matriz asociada a $g \circ f$ es $(B\;A)_{p\times n}$

Nótese como la aplicación o matriz que aparece más a la izquierda es la segunda en actuar ("la última que se aplica es la primera que se escribe en la multiplicación").

- Justificación de que la imagen de una recta mediante una aplicación lineal es una recta

Para simplificar tomamos la recta en $\mathbb{R}^2$. La forma vectorial paramétrica de sus puntos es $\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v}$, siendo $\vec{v}$ el vector director, α parámetro libre, y $\vec{p}$ un vector distinto de cero si la recta no pasa por el origen.

$A\vec{x} = A(\vec{p} + \alpha\vec{v}) = A\vec{p} + A\alpha\vec{v} = A\vec{p} + \alpha A\vec{v}$

Vemos que la imagen es la recta de vector director $A\vec{v}$, y su desplazamiento respecto del origen $(0,0)$ vendrá dado por el vector $A\vec{p}$.
Denotando $\vec{q} = A\vec{p}$ y $\vec{w} = A\vec{v}$, la nueva recta es $\vec{x} = \vec{q} + \alpha\vec{w}$

- **1.4.10**. Considera tres pruebas A,B,C con dos partes cada una con pesos 50%-50% (ejercicios 1 y 2) 75%-25% (ejercicios 3 y 4) y 80%-20% (ejercicios 5 y 6). Obtén la matriz que multiplicada por las calificaciones $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ de los seis ejercicios produce como resultado las calificaciones (calif_A, calif_B, calif_C) de las tres pruebas.
- **1.4.11**. Halla la matriz de la simetría respecto del plano x=y en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio que introduce la **matriz de rotación**:

- **1.4.12**. En $\mathbb{R}^2$ halla la matriz de un giro alrededor del origen de ángulo ϕ en sentido positivo.

- HVZ12. Algún/os apartado/s del Ejercicio 5 (pg. 38)
- HVZ12. Uno de los apartados del Ejercicio 6 (pg. 38)

1.5. Tratando múltiples valores de $\vec{b}$ en $A\vec{x} = \vec{b}$. La ecuación $AX = B$.

Ejercicio 1.5.1. Si queremos estudiar/resolver un SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para dos valores $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$, es decir $A\vec{x} = \vec{b}_1$ es un SL y

$A\vec{x} = \vec{b}_2$ es el otro SL, podemos aplicar la eliminación gaussiana sobre una matriz ampliada con dos columnas a la derecha.

Al llegar a la forma escalonada de esta matriz, usamos la primera y segunda columna de la derecha para completar el estudio/resolución del primer y segundo sistema, respectivamente.

Lo aplicamos al siguiente ejemplo, que es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, compatible determinado. Lo resolvemos mediante la eliminación de Gauss-Jordan, llegando hasta la forma escalonada reducida.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 2 & | & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & | & 7 & 7 \\ 1 & 7 & 8 & | & 8 & 9 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{1\quad 7\quad 8}}_{A}} & & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 2 & | & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & | & 4 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 2 & | & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -8 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & | & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -8 & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & | & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -8 & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & | & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 2 \end{array}$$

Hemos completado G-J. rg(A)=número de filas, por tanto compatible para cualquier $\vec{b}$.
Además el rango es igual al número de incóg., por tanto SCD.

Podemos leer las soluciones a la derecha.

Para el SL $A\vec{x} = \vec{b}_1$ la solución es $\vec{x}_1 = (11, -5, 4)$, por tanto $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$

Para el SL $A\vec{x} = \vec{b}_2$ la solución es $\vec{x}_2 = (7, -2, 2)$, por tanto $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$

Por otra parte sabemos que $A\,[\ \vec{x_1}\ \vec{x_2}\ ] = [\ A\vec{x_1}\ A\vec{x_2}\ ]$, como propiedad del producto de matrices.

y la última matriz es igual a $[\ \vec{b_1}\ \ \vec{b_2}\ ]$

Por tanto podemos escribir la ecuación: $A\ \underbrace{[\ \vec{x_1}\ \vec{x_2}\ ]}_{X} = \underbrace{[\ \vec{b_1}\ \vec{b_2}\ ]}_{B}$

Si tuviéramos que obtener la solución X de la ecuación $\boxed{AX = B}$, siendo B una matriz, aplicaríamos este mismo procedimiento de reducción de Gauss-Jordan, pero en la "matriz ampliada múltiple" $[\,A \mid B\,]$.

Datos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

Procedimiento: $[\ A \mid B\ ] \ \sim\ \ldots\ \sim [\ A_{\text{red}} \mid X\ ]$

Solución de $AX = B$: $X = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Cada columna de X es la solución correspondiente a la misma columna en B.

En este caso A es cuadrada y las tres columnas son pivotales, por tanto $A_{\text{red}} = I$ (es la identidad).

Por ser el rango de A igual al número de filas e igual al número de columnas los sistemas lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ son del tipo SCD (compatible determinado) para cualquier vector $\vec{b}$.

Leon, Linear Algebra with Applications, 2015. Ejercicio 11, pag. 41. Es un ejercicio similar a este pero más sencillo, por ser A una matriz 2×2

- Un endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ se dice que es invertible si existe un endomorfismo g en $\mathbb{R}^n$ tal que: $g \circ f = f \circ g = id$, y en tal caso se dice del endomorfismo g que es el inverso de f, y se le denota como f^{-1}. Además f^{-1} si existe, es único.

  Por tanto si f es invertible, $f^{-1}(f(\vec{x})) = f(f^{-1}(\vec{x})) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- Una matriz A de orden n se dice que es invertible si existe una matriz B de orden n tal que: $AB = BA = I_n$

  Si B existe es única, se denomina inversa de A y se denota como A^{-1}.

- Si f es un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ y A su matriz estándar asociada, entonces f es invertible $\Leftrightarrow$ A es invertible. En caso de que sean invertibles la matriz asociada a f^{-1} es A^{-1}, es decir, $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$$
$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

- Ejercicio 1.6.1 (HVZ12, ejemplo C, pgs. 42-43). Obtención de la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, si es que existe, mediante el método de Gauss-Jordan.

Justificación para una matriz A de orden n

En la ec. matricial $A\,B = I$, B es la matriz incógnita, inversa de A, que queremos calcular

$$A\,[\,\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\,] = [\,\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n\,]$$

Tenemos n sistemas $A\,\vec{b}_i = \vec{e}_i$, de forma que en cada sistema $[\,A \,|\, \vec{e}_i\,]$ el vector solución es $\vec{b}_i$. La matriz de coeficientes es la misma, por tanto las operaciones elementales que hay que realizar en los n sistemas son las mismas.

Escribimos la matriz ampliada del SL múltiple así: $[\ A \quad | \quad \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n\ ]$

$$[\ A \quad | \quad I\ ] \longrightarrow \longrightarrow \underset{\text{G-J}}{\ldots} \longrightarrow \longrightarrow [\ A_{\rm red} \quad | \quad B\ ]$$

Si $A_{\rm red} = I$, entonces existe solución B de la ec. $AB = I$. $\quad [A \quad | \quad I] \to \ \ldots \ \to [I \quad | \quad B]$, y ya tenemos calculada A^{-1}, que es B.

Si $A_{\rm red}$ no es la identidad, entonces A no tiene inversa porque la ec. $AB = I$ no tiene solución (el SL queda incompatible para algún $\vec{e}_i$)

Observación: Si se verifica $[A \quad | \quad I] \to \ \ldots \ \to [I \quad | \quad B]$, entonces se cumple que $[B \quad I] \to \ \ldots \ \to [I \quad A]$, sin más que efectuar las operaciones elementales inversas y en el orden inverso[1].
El último resultado ($[B \quad I] \to \ \ldots \ \to [I \quad A]$), nos dice que $BA = I$, que es la segunda ecuación que requiere la definición de inversa ($A^{-1} = B$ requiere AB=I y $BA = I$)

[1] Dada una operación elemental, su inversa es la que deshace el efecto de la operación elemental. La inversa de multiplicar una fila por un escalar distinto de cero es dividirla por ese escalar distinto de cero. La inversa de un intercambio es el mismo intercambio. La inversa de sumar a una fila un múltiplo de otra es sumar a la fila el múltiplo de la otra pero cambiado de signo.

- Dadas A y B cuadradas e invertibles del mismo orden, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Esta propiedad se extiende a cualquier número de matrices.

- Otra forma de resolución de $A_n\vec{x} = \vec{b}$ si rg$A$=n es $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

  Vemos que si el rango de la matriz cuadrada A es completo, entonces el sistema es SCD independientemente del valor de $\vec{b}$.

  Ejercicio 1.6.2. Resuelve el SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = (4, 6)$, utilizando la inversa de la matriz A.

- Se dice que una matriz cuadrada es singular si no es invertible. Si es invertible se dice que no es singular.

- **Condiciones equivalentes a la no singularidad** Dada A_n las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - A tiene inversa, es decir que no es singular.
  - A tiene rango n.
  - $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado para cualquier $\vec{b}$.
  - La forma escalonada reducida de A es la identidad.

- Ejercicio 1.6.3 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices. Para la primera usa `inv()` de MATLAB y para la segunda el método de Gauss-Jordan manualmente.

  $$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ejercicio 1.6.4 Resuelve el SL $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ utilizando la inversa de la matriz de coeficientes determinada en el ejercicio anterior.

- Ejercicio 1.6.5 Mediante eliminación gaussiana determina el rango de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$ en función del parámetro k. ¿Para que valores de k es A invertible?.

- Ejercicios de HVZ12:

  - Ejemplo D, pg. 44. Obtén la inversa de la matriz mediante el método de Gauss-Jordan
    $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

  - Ejemplo E, pg. 44. Encuentra la inversa de la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2)$. *Pista: Utiliza la matriz estándar asociada.*

  - Ejemplo G, pg. 47. Resuelve el SL $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

  - Ejercicios 5, 6 y 7. Algún/os apartado/s, pg. 48.