1 Vectores, matrices, sistemas de ecs. lineales e introducción a las aplicaciones lineales
1.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación gaussiana y reducción de Gauss-Jordan
1.1 Ejercicios
1.2 Operaciones con vectores
1.2 Rango de una matriz
1.2 Estructura de las soluciones de un sistema
1.2 Ejercicios
1.3 Operaciones con matrices
1.3 Expresión matricial y vectorial de un SL
1.3 Ejercicios

- **Ejercicio 1.1.1** (HVZ12 (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012, "Álgebra Lineal y Geometría". Pearson), ejemplo A, pg. 3). Sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 (2 ecuaciones y 2 incógnitas) con solución única. Se dice que es compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

- Marco general: Sistema de m ecuaciones lineales (SL) con n incógnitas, con coeficientes reales a_{ij}, y con términos independientes b_i también reales.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

- Sistemas equivalentes entre sí son los que tienen las mismas soluciones. Las siguientes transformaciones de un SL producen sistemas equivalentes a él:

  i) Multiplicar ecuación por real no nulo.

  ii) Intercambiar dos ecuaciones entre sí (es decir, cambiarlas de orden).

  iii) Sumar a una ecuación un múltiplo de otra (reemplazamiento).

  Estas transformaciones se denominan "operaciones elementales".

- La solución debe ser expresada vectorialmente: Vector solución $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots . x_n)$.

  Vector = matriz columna, con elementos reales.

  Por ejemplo la solución del Ejercicio 1.1.1 es $\vec{x} = (1, 1)$, que matricialmente se expresa como $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

  $\vec{x} = (1, 1)$, con dos entradas, es un elemento del conjunto $\mathbb{R}^2$, o espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$.

  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, con n entradas, es un elemento del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

- Comprobación de la solución.

- Matriz de coeficientes, vector de términos independientes y matriz ampliada de un SL.
  - Expresiones de los tamaños de las matrices: Matriz $m \times n$, o matriz de orden n, para rectangulares o cuadradas respectivamente.
  - Matriz de coeficientes A.
  - Matriz ampliada $[\,A \mid \vec{b}\,]$ o A^*.

- **Ejercicio 1.1.2** (HVZ12, ejemplo B, pgs. 3-5). SL 3 x 3 (3 ecuaciones y tres incógnitas) con solución única.

  Obtener la solución del SL: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

  considerando sólo la matriz ampliada y las operaciones elementales sobre ella. Aplica en primer lugar eliminación gaussiana, y a continuación reducción de Gauss-Jordan.

- **Ejercicio 1.1.3** (HVZ12, ejemplo C, pgs. 5-6). $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

  SL 3 x 4 (3 ecuaciones y 4 incógnitas) con infinitas soluciones y un parámetro libre. Se dice que es compatible indeterminado, con un grado de indeterminación en este caso.

  Resolución considerando la matriz ampliada y las operaciones elementales sobre ella (Gauss-Jordan).

- Pivotes, columnas pivotales y filas pivotales en una matriz escalonada. El número de cualquiera de ellos en una matriz escalonada es obviamente el mismo.
- Matriz escalonada reducida: pivotes 1 y ceros por encima de los pivotes. (Eliminación de Gauss-Jordan y escalamiento de las filas para que los pivotes tengan valor 1.)
- Parámetros libres.
- Solución (conjunto de todas las soluciones) en forma vectorial paramétrica.
- Soluciones particulares.

- Formas escalonadas y forma escalonada reducida de una matriz.
- La forma escalonada reducida de una matriz es única.
- Dada una matriz, todas sus formas escalonadas tienen el mismo número de columnas pivotales. A ese número se le llama rango de la matriz, rg$A$.

- Reducción de Gauss-Jordan (G-J): transformación mediante operaciones elementales de la matriz ampliada hasta llegar a su forma escalonada reducida. Con esta última matriz obtenemos el SL más sencillo posible equivalente al original.

  Resolución de SL mediante eliminación gaussiana: $A^* \to \ldots \to A^*_{\mathrm{esc.}}$

  Resolución de SL mediante la reducción G-J: $A^* \to \ldots \ \ldots \to A^*_{\mathrm{esc.red.}}$

- Símbolo $\sim$ para expresar que las matrices ampliadas sucesivas corresponden a SLs equivalentes.
  Por ejemplo $A^* \sim \ldots \sim A^*_{\mathrm{esc.}} \sim \ldots \sim A^*_{\mathrm{esc.red.}}$

- **Ejercicio 1.1.4** (HVZ12, ejemplo D, pg. 7). SL 3 x 3 (3 ecuaciones y 3 incógnitas) que no tiene solución. Se dice que es incompatible.

  $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

  No hace falta llegar hasta la forma escalonada reducida de la matriz ampliada, ya que a partir de la forma escalonada de ésta se inferirá la ausencia de solución, al existir pivote en la última columna.

- **Teorema 1.1.1** Teorema de Rouché-Frobenius.

  $A_{m\times n}$ es la matriz de coeficientes.

  A^* es la matriz ampliada.

  $p =$ número de columnas pivotales de cualquier forma escalonada de A.

  $p^* =$ número de col. piv. de cualquier forma escalonada de A^*.

  Clasificación del SL respecto del tipo de solución.

  - Sistema compatible determinado si y solo si $p^* = p = n$
  - Sistema compatible indeterminado si y solo si $p^* = p < n$
  - Sistema incompatible si y solo si $p^* = p + 1$

  Observación: Si $p = m$ el SL es compatible.

  Se puede reescribir el Teor. de Rouché-Frobenius en términos de los rangos de $A_{m\times n}$ y A^*.

  - Sistema compatible determinado si y solo si $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A) = n$
  - Sistema compatible indeterminado si y solo si $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A) < n$
  - Sistema incompatible si y solo si $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A) + 1$

- Aplicación del Teorema RF a los ejercicios 1.1.2, 1.1.3 y 1.1.4.
- Un SL se dice homogéneo (SLH) si $\vec{b} = \vec{0}$.

  Los SLH son siempre compatibles. Como mínimo tienen una solución que es $\vec{x} = \vec{0}$, denominada solución trivial.

- **1.1.5** Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados [1], utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^5$ y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ produce una solución válida del sistema).

$$I : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$II : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- **1.1.6** Igual al ejercicio 1.1.3 pero tomando como vector de términos independientes $\vec{b} = (0, 0, 0)$.

- **1.1.7** Obtén la solución del SL de HVZ12, ejemplo E, pg. 11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

- Cualquiera de los ejercicios desde el 1 hasta el 4, pgs. 12-13, de HVZ12.

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

Operaciones con vectores, combinación lineal y dependencia lineal

- Los vectores se expresan matricialmente como columnas.
- Toda matriz $m \times n$ se puede considerar concatenación de n vectores columna, cada uno con m entradas o componentes, o concatenación de m "vectores fila" de n componentes.

  $A = [\, \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_n]$

  Por ejemplo, para $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$ y $\vec{a}_2 = (4, 5, 6)$, vectores de $\mathbb{R}^3$,

  la matriz $A = [\, \vec{a}_1\ \vec{a}_2\,]$ es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

- Formalmente un vector fila es la matriz traspuesta de un vector columna.
  - $\vec{a}$ es una matriz columna
  - $\vec{a}^{\,t}$ es una matriz fila o vector fila
- Traspuesta de una matriz:

  Dada $A_{m\times n}$ se define matriz traspuesta de A, y se denota A^t, a aquella cuya fila i-ésima es la columna i-ésima de A.

- Una propiedad importante de los rangos es la siguiente: $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A^t$

- Son obvias las siguientes operaciones con vectores:
  - Establecer la igualdad de dos vectores.
  - Suma de vectores.
  - Multiplicación de un vector por un real (también llamado escalar).

  $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad , \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$
  $\vec{a} = \vec{b}$ si y solo si $a_i = b_i$ para todo i desde 1 hasta n
  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
  c $\vec{a} = (c\, a_1, c\, a_2, \ldots, c\, a_n)$

- Dos de las operaciones elementales realizadas en la eliminación gaussiana son sumas de vectores fila y multiplicación de un vector fila por un real.

- Propiedades de la suma de vectores, de la multiplicación de un vector por un escalar y distributivas.
  - Asociativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$.
  - Conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \forall\ \vec{a}, \vec{b}, \in \mathbb{R}^n$.
  - Existencia de elemento neutro: $\exists\ \vec{0} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \forall\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n$.
  - Existencia de elemento simétrico u opuesto: $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad \exists\ -\vec{a} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$
    $-\vec{a}$ es el denominado opuesto de $\vec{a}$. $-\vec{a}$ tiene como elementos los opuestos de los elementos de $\vec{a}$.
  - $1\ \vec{a} = \vec{a} \quad \forall\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n$. 1 es el elemento neutro del producto en $\mathbb{R}$.
  - Pseudoasociativa: $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$
  - Distributiva respecto a la suma de vectores
    $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
  - Distributiva respecto a la suma de escalares:
    $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Obtención del opuesto de un vector con la multiplicación por -1 $\quad$ (-1) $\vec{a} = -\vec{a}$
- Diferencia de vectores. $\quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

- Conjunto de vectores y combinación lineal:

  $\vec{b}$ es combinación lineal (c.l.) del conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p\}$ si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ tales que

  $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_p\vec{a}_p = \vec{b}$ [2]

  Los c_i reciben el nombre de coeficientes o pesos de la combinación lineal.

  $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores (basta con tomar todos los escalares 0, y ya tenemos la combinación lineal $\vec{0}$).

- **Ejercicio 1.2.1** Considera $S = \{(1,1,0),(0,1,0)\}$. ¿Es $(1,2,0)$ c.l. de los vectores de S?. ¿Es $(0,0,5)$ c.l. de los vectores de S?.

- Dependencia lineal:
  - Un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p\}$ es linealmente dependiente (l.d.) si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$, no todos cero, tales que $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_p\vec{a}_p = \vec{0}$ [3]

    La ecuación anterior, <u>con c_i que no son todos cero</u>, se denomina relación de dependencia lineal.
  - Un conjunto de vectores es linealmente independiente (l.i.) si no es linealmente dependiente.

- **Ejercicio 1.2.2** Determina si el conjunto S del ejercicio anterior es l.d. o l.i.

- **Teorema 1.2.1** Teorema fundamental de la dependencia lineal: Un conjunto es l.d. si y solo si al menos un vector es c.l. del resto. En efecto, a partir de la relación de dependencia lineal [2] siempre se puede despejar un vector como c.l. del resto.

- **Ejercicio 1.2.3** (HVZ12, ejemplo A, pg. 15). Estudia si los vectores $\vec{a}_1 = (2, 1)$ y $\vec{a}_2 = (1, 1)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes.
- **Ejercicio 1.2.4** Estudia si los vectores $\vec{a}_1 = (1, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 5)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes (HVZ12, ejemplo B, pg. 16). Extrae un subconjunto linealmente independiente máximo (con el máximo número de vectores l.i. posible) y expresa los restantes como combinación lineal de ese subconjunto.
- **Ejercicio 1.2.5** Considerado el conjunto $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0)\}$. ¿Es A l.d.?. En caso afirmativo obtén una relación de dependencia lineal.

- Conclusiones para un conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$
  - El conjunto es l.i. si y solo si todas las columnas de la forma escalonada[2] de $[\,\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p\,]$ son pivotales.
  - De un conjunto l.d. se puede obtener un subconjunto máximo de vectores l.i. entre sí eliminando los que correspondan a columnas no pivotales en la forma escalonada.
  - Cada vector eliminado se puede expresar como combinación lineal del subconjunto máximo l.i.

  - Dos vectores son l.i. si y solo si uno no es múltiplo del otro.

[2] Cualquier forma escalonada

- Rango de un conjunto de vectores y rango de una matriz:

  El rango de un conjunto de vectores es el número máximo de vectores l.i. entre sí con los que cuenta el conjunto. Aunque existan distintas elecciones de estos vectores l.i. el número de ellos es siempre el mismo.

  $\mathrm{rg}\{\, \vec{a}_1 \,, \ldots \,, \vec{a}_n \,\}$

  El rango de una matriz se define como el rango de sus columnas.

  $$A = [\, \vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n \,] \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{rg} A = \mathrm{rg}\{\, \vec{a}_1 \,, \ldots \,, \vec{a}_n \,\}$$

Observaciones:

- No hace falta completar la reducción de G-J para determinar el subconjunto l.i. o el rango, pues basta con llegar a una forma escalonada de la matriz para reconocer las columnas pivotales. El rango es el <u>número de ellas</u>, y el subconjunto l.i. máximo que se escoge sistemáticamente es el formado por <u>las columnas de A</u> correspondientes a las columnas pivotales en la forma escalonada.

- $\mathrm{rg}A_{m\times n}$ es como máximo el menor de los valores de m y n, ya que en sus formas escalonadas no puede haber más de m filas pivotales ni más de n columnas pivotales.

- **Ejercicio 1.2.6** (HVZ12, ejemplo C, pgs. 17-18). Rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

  Obtén además un conjunto de vectores linealmente independiente, tomado de sus columnas.

- **Teorema 1.2.2** La estructura de las soluciones de un SLH indeterminado tiene la forma:

  $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k,$ [4]

  siendo $\vec{v}_i$ vectores linealmente independientes, y k el número de parámetros libres.

  $k = n - \mathrm{rg} A$, siendo A la matriz de coeficientes.

  Análisis con el correspondiente homogéneo del **Ejerc. 1.1.3.**

- **Teorema 1.2.3** Relación entre la solución de un SL no homogóneo compatible indeterminado y la de su correspondiente homogéneo.

  $\vec{x}_{\mathrm{NH}} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k,$ [5]

  siendo $\vec{p}$ una solución particular del SLNH y $\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$ la solución del correspondiente homogéneo.

  $k = n - \mathrm{rg} A$, siendo A la matriz de coeficientes.

  Análisis con **Ejerc. 1.1.3.**

- 1.2.7 Análisis de los teoremas 1.2.2 y 1.2.3 con el ejercicio 1.1.5.
- 1.2.8 Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ con: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \\ a \end{bmatrix}$, con a parámetro,

  y el vector $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ b \end{bmatrix}$, con b parámetro.

  a) Obtén el rango del conjunto S en función del parámetro a.

  b) Determina los valores de a y b para que $\vec{v}_4$ sea combinación lineal de los vectores de S. Justifica la respuesta.

  c) Escoge un par de valores (a, b) que verifiquen el apartado b) y obtén para ese caso los coeficientes de la combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ que producen $\vec{v}_4$.

- 1.2.9 Considera el sistema lineal de matriz ampliada $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & a & 5 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right]$

a) Mediante eliminación gaussiana obtén la matriz ampliada B^* de un sistema lineal equivalente, de forma que B^* cumpla:

$b^*_{21} = 0$, $b^*_{31} = 0$, $b^*_{41} = 0$, $b^*_{32} = 0$, $b^*_{42} = 0$ y $b^*_{43} = 0$,

b) Estudia, en función del parámetro a, el rango de la matriz de coeficientes A y el rango de la matriz ampliada A^*, basándote en el apartado anterior. Clasifica el sistema en base a esos rangos, cubriendo toda la información indicada en la tabla.

Usa una fila de la tabla para cada par de valores posible de los rangos (rg$A$, rgA^*). Asegúrate de que ningún valor de a esté en filas distintas de la tabla, y también de que entre todas las filas hayas considerado todos los valores de a. Si das más de una condición para el parámetro a utiliza los nexos adecuados "o" (la coma también significa "o") o "y".

Valores de a	rango A	rango A^*	Tipo de sistema en cuanto a solución

- 1.2.10 Considera el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz ampliada:

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & b_1 \\ 4 & 7 & -4 & b_2 \\ -6 & -3 & 1 & b_3 \end{array}\right]$$

a) ¿ Es el sistema lineal compatible para todo $\vec{b}$?. Razona la respuesta.

b) En caso de que la respuesta sea negativa, encuentra una ecuación que incluya a b_1, b_2 y b_3, y que permita que el sistema sea compatible.

- 1.2.11 Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y + 3z - 5t = 1 \\ \quad\;\; 3y + 3z + 3t = 3 \\ x + 3y + 4z - 4t = 2 \end{cases}$, halla:

a) La solución general en forma vectorial paramétrica.

b) La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.

c) La solución general en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

- 1.2.12 Calcula a para que sea compatible el siguiente sistema y resuélvelo. $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 5 \\ 2x - y = 8 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

Los sistemas lineales con más ecuaciones que incógnitas se denominan sobredeterminados, y suelen ser incompatibles.

- 1.2.13 Considera el siguiente sistema constituido por 4 masas puntuales:

Punto	Masa
$\vec{v}_1 = (5, -4, 3)$	$m_1 = 2$ g
$\vec{v}_2 = (4, 3, -2)$	$m_2 = 5$ g
$\vec{v}_3 = (-4, -3, -1)$	$m_3 = 2$ g
$\vec{v}_4 = (-9, 8, 6)$	$m_4 = 1$ g

  - Calcula el centro geométrico del sistema. $\vec{v}_{\mathrm{c}} = \dfrac{\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k}{k}$
  - Calcula el centro de masa, $\vec{v}_{\mathrm{cdm}}$, del sistema, sabiendo que:

$$\vec{v}_{\mathrm{cdm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_k\vec{v}_k}{m_1 + \ldots + m_k}$$

  Comenta para cada apartado cual ha sido el conjunto de vectores empleado para la combinación lineal y cuales han sido los coeficientes o pesos utilizados.

  Enunciado tomado de LLM16 (Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications", Quinta edición 2016.). Ejercicio 29. pg. 50.

- Cualquiera de los ejercicios desde el 1 hasta el 5, pgs. 24-25, de HVZ12.

- Igualdad de matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$.
- Suma de matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$. Propiedades:
    - Asociativa: $\forall\ A, B, C \in M_{m\times n},\ A+(B+C)=(A+B)+C$
      $M_{m\times n}$ es el conjunto de todas las matrices reales $m\times n$.
    - Conmutativa: $\forall\ A, B \in M_{m\times n},\ A+B=B+A$
    - Elemento neutro: $\exists\ 0 \in M_{m\times n}\ /\ \forall\ A \in M_{m\times n}\ \ A+0=A$
      0 es la matriz cero. Todos sus elementos son cero.
    - Existencia de elemento opuesto:
      $$\forall A \in M_{m\times n} \quad \exists\ -A \in M_{m\times n}\ /\ A+(-A)=0$$
      $-A$ es la denominada matriz opuesta. La matriz opuesta de A es la que tiene como elementos los opuestos de los elementos de A. El elemento opuesto de $a \in \mathbb{R}$ es $-a \in \mathbb{R}$
- Producto de una matriz por un real. Propiedades:
    - $1A = A\ \ \forall A \in M_{m\times n}$.
    - Pseudoasociativa: $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)\quad \forall A \in M_{m\times n}\,\mathrm{y}\ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

  Observación: Se puede obtener la c.l. de matrices.
- Distributivas:
    - Distributiva respecto a la suma de matrices:
      $$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B \quad \forall A, B \in M_{m\times n}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
    - Distributiva respecto a la suma de escalares:
      $$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \quad \forall A \in M_{m\times n}\,\mathrm{y}\quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$
- Diferencia de matrices: $A-B=A+(-B)$

- Producto escalar[3] de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^{\,t}\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- Producto de matrices $A_{m\times n} B_{n\times p} = C_{m\times p}$. $\qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ [6]

  - **Ejercicio 1.3.1** HVZ12, ejemplo I, pg. 36. Estudiar si los productos AB y BA son posibles, y en caso afirmativo determinarlos. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $A[\,\vec{b}_1 \ \dots \ \vec{b}_n\,] = [\,A\vec{b}_1 \ \dots \ A\vec{b}_n\,]$
  - Propiedades algebraicas:
    - Asociativa: $\forall A, B, C \in M \quad A\,(B\ C) = (A\ B)\ C$
      M es el conjunto de matrices, y A, B y C han de ser multiplicables en ese orden.
    - Distributiva respecto a la suma de matrices:
      $\forall A, B, C \in M \quad A\,(B + C) = A\ B + A\ C \qquad (A + B)\ C = A\ C + B\ C$
    - Pseudoasociativa: $\forall A, B \in M$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha A)\ B = A\,(\alpha B) = \alpha(A\ B)$
  - Matriz identidad: $\quad A_{m\times n} I_n = A_{m\times n} \qquad I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$
  - El producto de matrices no es necesariamente conmutativo
  - Traspuesta del producto:
    $(AB)^t = B^t A^t$, siempre que se pueda realizar el producto AB. Se extiende al producto de cualquier número de matrices: por ejemplo $(ABC)^t = C^t B^t A^t$
  - El producto matriz-vector es un vector. $A\vec{v} = \vec{w}$.

[3] también llamado estándar, canónico o habitual

- Otras propiedades de la trasposición de matrices:
  $(A^t)^t = A \qquad (\alpha A)^t = \alpha A^t \qquad (A+B)^t = A^t + B^t$

- Producto matriz vector calculado como c.l.:

$$A\vec{v} = [\,\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_n\,] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\vec{a}_1 + \ldots + v_n\vec{a}_n \qquad [7]$$

En $A\vec{v} = \vec{w}$, $\vec{w}$ resulta ser la c.l. de las columnas de A tomando como coeficientes las entradas de $\vec{v}$. El coeficiente que acompaña a la columna i de A es la entrada i de $\vec{v}$.

Ejercicio 1.3.2 $\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{w}}{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times -1 \\ 0\times 1 + 0\times 2 + 6\times -1 \\ 1\times 1 + 1\times 2 + 3\times -1 \\ 0\times 1 + 1\times 2 + 1\times -1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↑
Desarrollamos el producto
con la regla [6]

↑ Desglosamos en sumandos
y sacamos factor común

Queda demostrada la interpretación
del producto matriz-vector como c.l.

- Dada una matriz A_n y un número natural k, entonces A^k, leído como A a la potencia k, es el producto de A por sí misma k veces.

  Se define $A^0 = I$

- Otras propiedades del producto de matrices:
  - El producto de matrices triangulares superiores (inferiores) es triangular superior (inferior).
  - El producto de matrices diagonales es diagonal.

Representación del SL mediante la ec. matricial $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Desarrollando el producto, y teniendo en cuenta ec. [1].

$\vec{x}_{n\times 1}$ es solución del SL [1] $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_{n\times 1}$ es solución de la ecuación matricial $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ [8].

Representación del SL mediante una ec. vectorial

Partimos de la igualdad: $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

descomponiendo el vector de la izquierda en n sumandos, y sacando como factor común las x_1, x_2, ..., x_n, obtenemos:

$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, por tanto

$\boxed{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}}$, [2] siendo $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ las columnas de A.

$\vec{x}$ es solución del SL $\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ es solución de la ecuación vectorial $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$.

Expresado de otra forma, la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si $\vec{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A. Cada conjunto de coeficientes de la combinación lineal es una solución posible del SL.
La ecuación se ha designado como [2] porque ya había sido utilizada, expresando en ella que $\vec{b}$ es combinación lineal de los vectores $\{\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n\}$ si existen coeficientes $(c_1, \ldots, c_n)$, aquí denotados como $(x_1 \ldots x_n)$, para los que se cumple la igualdad.

Es obvio el paso de la ec. [8] a la [2] y viceversa, teniendo en cuenta el desarrollo del producto matriz-vector como combinación lineal.

Repaso del producto matriz-vector

Sea $A_{m \times n}$ con columnas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, y sea $\vec{x}$ un vector de n entradas, $\vec{x}_{n \times 1} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces el producto $A\vec{x}$, es la suma de las columnas de A, pesando cada una de ellas ordenadamente con cada entrada de $\vec{x}$.

$$A\,\vec{x} = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ \ldots\ \vec{a}_n\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n$$

Expresado de otra forma, el producto $A\vec{x}$ es la combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes o pesos las entradas de $\vec{x}$.

- **Ejercicio 1.3.3** Dado el SL de ecuaciones: $\begin{cases} 2x_1 & +1x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 & +4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$, obtén la correspondiente ecuación matricial y la correspondiente ecuación vectorial.

- **Teorema 1.3.1** En un SLH indeterminado, se cumple:
  - la suma de soluciones es solución
  - el producto de una solución por un escalar es solución
  - como consecuencia de los dos resultados anteriores, la combinación lineal de soluciones es solución

- **1.3.4** Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$. a) Encuentra a simple vista una solución particular de $A\vec{x} = \vec{0}$ que no sea la solución $\vec{0}$, teniendo en cuenta que solución es el par de coeficientes (α, β) tal que la combinación $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$ es igual a $(0, 0, 0)$, siendo $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ las columnas de A.

  b) Encuentra la solución general basándote en el resultado anterior y justifica la respuesta.

- **1.3.5** a) Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & -2 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = (3, 5, 8, 12)$.

  b) Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo (la misma A y $\vec{b} = \vec{0}$).

- **1.3.6** Considera el sistema lineal cuya matriz ampliada tiene la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$

  (a) ¿ Para que valores de a y b tiene el sistema lineal infinitas soluciones ?

  (b) ¿ Para qué valores de a y b es el sistema lineal incompatible?

  Enunciado tomado de S.J Leon "Linear Algebra with Applications". Novena edición. Pearson 2015. pag. 41

- **1.3.7** Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

  Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:
  $\vec{v} =$ (17 mg de vitamina C , 54 mg de calcio, 31 mg de magnesio)

- Ejercicios de HVZ12: 14 y 15 (pg. 39).