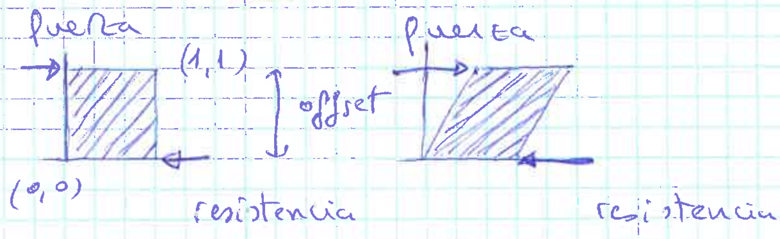
Transformaciones Afines

Antes / estudiamos / revisamos / algunas transformaciones lineales.

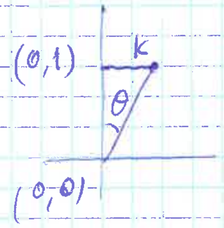
Shear transformation o cizalladura

shear force



$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ es la matriz estandar asociada en este caso.

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$$



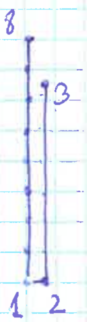
$\tan\theta = \frac{k}{1} = k$

es una cizalladura horizontal con coeficiente $k > 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$$

LAY 2.7 Linear Algebra and its Applications
5ª edición Pearson 2016

Ejemplos 1, 2, 3 páginas 140-141



$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0.50 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 8 \end{array} \end{array}$$

1ª transformación $\begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$ inclina (slanted)

figura 2

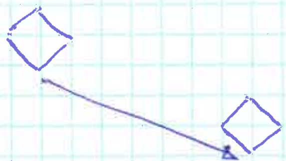
2) Contracción no uniforme $k = 0.75$ en eje x

$\begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ estrecha según eje x

1º // 2º //

Ninguna de las dos transformaciones es un movimiento rígido, pues en ningún caso la matriz es ortogonal. Además resulta obvio que las transformaciones no conservan la norma de los vectores.

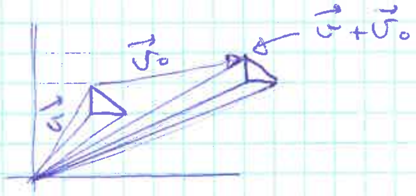
<u>Traslación</u> La traslación en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación que no es lineal, pero sí es un movimiento rígido, pues conserva la forma de los objetos.



vector de traslación $\vec{v}_0$

$$f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{v}_0$$

$$f(x,y) = (x,y) + (x_0, y_0)$$



$$f(x,y) = (x,y) + (5,1)$$

en el segundo dibujo

Esta transformación se puede expresar matricialmente mediante <u>coordenadas homogéneas</u>

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no se puede reducir a una expresión $A\vec{x} = \vec{x}'$

pero veremos que con las "coordenadas homogéneas" sí podremos.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & v_{0x} \\ 0 & 1 & v_{0y} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matriz Transformación afín estándar

En $\mathbb{R}^2$ las coordenadas homogéneas tienen la forma $(x_1, x_2, 1)$
" $\mathbb{R}^3$ " " " " " " $(x_1, x_2, x_3, 1)$

Sólo analizaremos transformaciones afines en $\mathbb{R}^2$

Para averiguar el transformado de $(2,2)$ efectuaremos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0+5 \\ 0+2+1 \\ \hline 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

El transformado de $(2,2)$ mediante esta traslación es $(7,3)$

$$T_{Af} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I} & \begin{matrix} v_{01} \\ v_{02} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ es la matriz de la traslación dada.

T_{Af} se refiere a transformación afín.

¿Es posible combinar matricialmente traslaciones con transformaciones lineales? Sí, porque éstas admiten expresión en coordenadas homogéneas.

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$, giro de $30°$

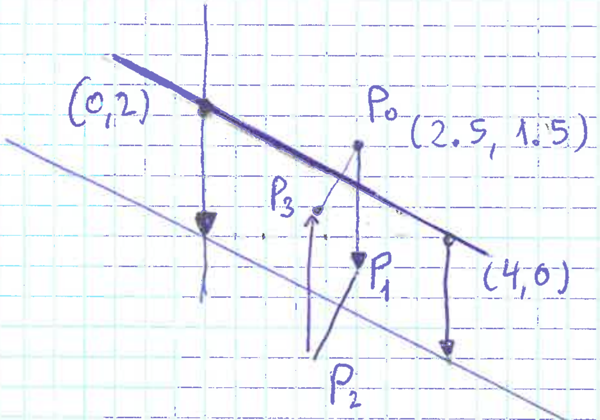
$$T_{af} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos 30 & -\operatorname{sen} 30 & 0 \\ \operatorname{sen} 30 & \cos 30 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$, simetría respecto de recta $x+2y=0$

$$T_{af} = \left(\begin{array}{cc|c} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hemos (expresado) (representado) el giro y la simetría en el formato de las coordenadas homogéneas.

Ejercicio 1. Obtén la matriz de la transformación afín correspondiente a la simetría ortogonal respecto de la recta $x+2y=4$ en E_2.



recta original r_0

recta trasladada según $\vec{v_0}=(0,-2)$ r_1

$$T_1 = T_{af}(0,-2) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad P_0 \to P_1 \qquad \text{traslación}$$

$$T_2 = T_{af\,simet\,r_1} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad P_1 \to P_2 \qquad \text{Aplicación lineal}$$

$$T_3 = T_{af}(0,2) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad P_2 \to P_3 \qquad \text{traslación}$$

$$T_3\,T_2\,T_1 \overset{P_0}{\begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}} = \overset{P_3}{\begin{bmatrix} 19/10 \\ 3/10 \\ 1 \end{bmatrix}} = \overset{P_3}{\begin{bmatrix} 1.9 \\ 0.3 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$T_{af\,final} = T_3\,T_2\,T_1 = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 8/5 \\ -\frac{4}{5} & -3/5 & 16/5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Queda la aplicación lineal

④

OTRO MÉTODO:

Los puntos de la recta de simetría r_0 no cambian de posición"

$$\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & t_1 \\ -4/5 & -3/5 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -\frac{8}{5}+t_1=0, \quad t_1=\frac{8}{5} \\ -\frac{6}{5}+t_2=2, \quad t_2=\frac{16}{5} \end{array}$$