CAMBIO DE BASE

Ejercicio 3.10. Resuelto en el aula 31-3-2022, sin ejecutar todas las operaciones

a) Demuestra que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^4$
$B_1 = \{\vec{v}_1 = (1,1,0,0), \vec{v}_2 = (0,1,0,0), \vec{v}_3 = (0,0,1,1), \vec{v}_4 = (0,0,0,1)\}$
$B_2 = \{\vec{u}_1 = (1,2,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,2,-1), \vec{u}_3 = (1,-1,-1,-1), \vec{u}_4 = (0,1,1,1)\}$
b) Encuentra las coordenadas del vector $\vec{x} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ relativas a la base B_2
c) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 a la base B_2.

(Los dos primeros apartados son prácticamente iguales a los del ejercicio 10, pg. 161 de HVZ12)

Presentación de la solución con MATLAB

```
% Escribimos la matrices de la base B1, con los vectores de la base en las columnas.
% Lo mismo para B2.

B1 = [ 1 1 0 0 ; 0 1 0 0; 0 0 1 1; 0 0 0 1]'
       1      0      0      0
       1      1      0      0
       0      0      1      0
       0      0      1      1


B2=[ 1 2 0 0 ; 0 1 2 -1; 1 -1 -1 -1; 0 1 1 0]'
       1      0      1      0
       2      1     -1      1
       0      2     -1      1
       0     -1     -1      0


% a)

det(B1)
      1
% el determinante es distinto de cero, lo que implica que las columnas son l.i.
% Como ademas son 4, que es la dimension de R4, el conjunto de 4 vectores l.i. es también
% sistema generador de R4, y por tanto base de R4.

det(B2)
      1
% el determinante vuelve a ser distinto de cero. Con los mismos argumentos dados para B1,
% se tiene que B2 es base.

% b)
xB1 = [3 2 -1 0]'    % son las coordenadas del vector x relativas a la base B1
xB2 = B2^(-1)*B1*xB1
       4
       2
      -1
      -6
```

```
% La explicacion es que en el paso B1*xB1 obtenemos
% las coordenadas estandar de x
% y premultipicando este x  por B2^(-1)
% estamos resolviendo el SL [B2 | x] y por tanto obteniendo
% las coordenadas del vector x (en canonicas o estandar) respecto de la base B2.

% c)
P = B2^(-1)*B1

   -0.0000    1.0000   -2.0000   -1.0000
   -1.0000    1.0000   -3.0000   -2.0000
    1.0000   -1.0000    2.0000    1.0000
    3.0000   -3.0000    9.0000    5.0000

% La explicacion es que la matriz de cambio de base (o coordenadas) de la base B1
% a la base B2, denotada P,
% se construye como la matriz cuyas columnas son
% las coordenadas de los vectores de la primera
% base, es decir B1,  relativas a la segunda base, B2.
% Por tanto hay que resolver [B2 | B1].
% Mediante eliminacion de Gauss-Jordan en [B2 | B1 ]
% llegaremos a [I | P], ``leyendo" P en la parte derecha de la matriz.
% Si bien a mano este es el procedimiento mas sencillo,
% con MATLAB podemos obtener facilmente la inversa de B2,
% por lo que la solucion del SL [B2 | B1] se consigue de
% forma inmediata con la expresion B2^(-1)*B1.
% Por tanto P = B2^(-1)*B1.

% Otro razonamiento sencillo es usar esta ecuacion
% B1*xB1=B2*xB2    y despejar   B2^-1*B1 *xB1 = xB2
% Por tanto B2^-1*B1 es la matriz P buscada.
```