Tema 6. Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

1 Rectas en el plano

E_2 es el conjunto de los puntos del plano ordinario.

1.1 Ecuación vectorial paramétrica

1.1.1 Recta que pasa por el origen

Considerado un vector cualquiera $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (que no sea el vector $\vec{0}$), el lugar geométrico de los múltiplos del mismo define una recta que pasa por el origen.

Por ejemplo dado el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, tendremos que $\vec{x} = \alpha\vec{v}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es el lugar geométrico de una recta en E_2. Se dice que el vector $\vec{v}$ es vector generador de la recta o que la recta está generada por el vector $\vec{v}$. Cualquier múltiplo de $\vec{v}$ (excepto el vector $\vec{0}$) puede considerarse vector generador de la recta.

Por ejemplo los vectores $(-1, -3/2)$ y $(200, 300)$ generan la misma recta.

A la ecuación $\boxed{\vec{x} = \alpha\vec{v}}$ se le denomina **ecuación vectorial** de la recta. Variando α desde menos infinito hasta más infinito el vector $\vec{x}$ recorre todos los puntos de la recta. Por incluir la ecuación un parámetro, el parámetro α, a la ecuación se le denomina también **ecuación vectorial paramétrica**.

Una ecuación vectorial en $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como dos ecuaciones escalares, una por componente. A esas ecuaciones las denominamos **ecuaciones paramétricas de la recta**.

Para la recta generada por el vector $\vec{v} = (2, 3)$ la ecuacion vectorial es $\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \; / \; \alpha \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = 3\alpha \end{cases} \; / \; \alpha \in \mathbb{R}$

Nótese que a partir de dos puntos de la recta (distintos) se puede obtener un segmento orientado en la misma, que tiene la misma dirección que el vector generador y que por tanto es a su vez generador.

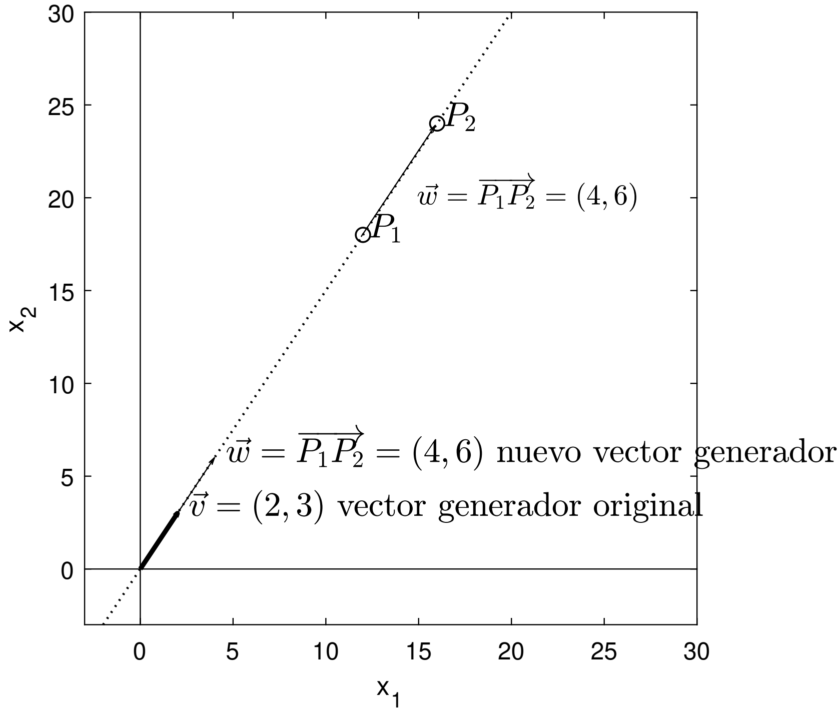
Escogiendo por ejemplo $\alpha = 6$ tenemos el punto P_1 de la recta, que viene dado por el vector $\vec{p_1} = (12, 18)$. Para $\alpha = 8$ el punto de la recta será P_2 que viene dado por el vector $\vec{p_2} = (16, 24)$.

El vector diferencia $\vec{w} = \vec{p_2} - \vec{p_1} = (16, 24) - (12, 18) = (4, 6)$ es también generador de la recta.

Obviamente a este vector $\vec{w}$, como elemento de $\mathbb{R}^2$, le corresponde una representación en el plano como un segmento orientado con su origen en el punto $(0, 0)$ y su extremo en $(4, 6)$.

Teniendo en cuenta cómo ha sido obtenido, también se podría usar la notación $\vec{w} = (4, 6) = \overrightarrow{P_1P_2}$

Desde el punto de vista del Álgebra Lineal, cuando situamos el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ con su origen en P_1 estamos considerando un vector trasladado, concretamente el vector $\vec{w} = \overrightarrow{P_1P_2}$ con traslación dada por $\vec{p_1} = \overrightarrow{OP_1}$.



1.1.2 <u>Recta genérica (no es necesario que pase por el origen)</u>

Los puntos de cualquier recta r' (pase o no por el origen) se pueden expresar vectorialmente en la forma siguiente:

$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}}$

siendo $\vec{v}$ un vector generador de la recta r paralela a la anterior y que pasa por el origen, y $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, siendo P un punto de la recta r'.

La expresión encuadrada es la ecuación vectorial paramétrica de la recta r'.

Al igual que para la recta que pasa por el origen, para la recta r' se puede deducir un vector generador a partir de la diferencia de los vectores de posición de dos puntos de la misma.

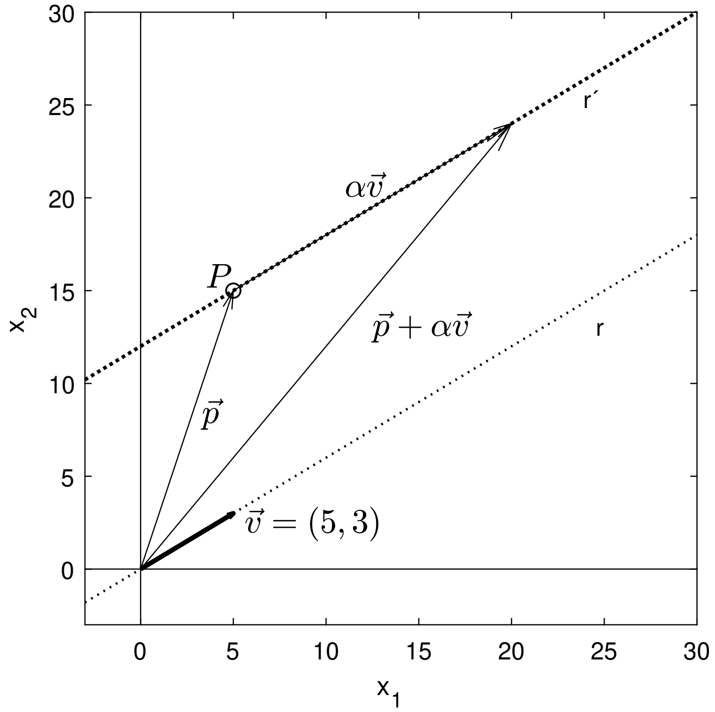
Ejemplo 1 En E_2, obtén la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones paramétricas de la recta generada por $\vec{v} = (5, 3)$ que pasa por el punto $P = (5, 15)$.

Sol.:

Observamos que $\overrightarrow{OP} = (5, 15)$ no es múltiplo de $\vec{v}$, por tanto la recta no pasa por el origen. Definiendo $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ tenemos que la ec. vectorial paramétrica es la siguiente:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x_1 = 5 + 5\alpha \\ x_2 = 15 + 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$



El conjunto $\{\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\}$ es l.i.

NOMENCLATURA general: Para distinguir la recta que no pasa por el origen de la que sí pasa por el origen algunos autores designan las primeras explícitamente como **rectas afines** y a las segundas como **rectas vectoriales**. En los enunciados de algunos ejercicios de este documento se indica mediante esta nomenclatura, si las rectas pasan o no por el origen.

Ejemplo 2. En E_2, obtén la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P = (15, 21)$ y $Q = (20, 24)$.

Ejemplo adicional: Hernández, Vázquez y Zurro (HVZ12). Ejemplo A. pg. 295.

1.2 Forma implícita

1.2.1 Recta que pasa por el origen

Dada una recta r con vector generador $\vec{v}$ para obtener su forma implícita tenemos dos procedimientos:

1. Obtenemos en primer lugar un vector ortogonal a $\vec{v}$, que denotamos como $\vec{n}$.

   Las componentes de $\vec{n}$ se deducen de la ecuación $v_1 n_1 + v_2 n_2 = 0$ **[1]**

   $\vec{n}$ es ortogonal a todo vector $\vec{x} = (x, y)$ de la recta, por tanto la ecuación de la recta será:

   $$\boxed{n_1 x + n_2 y = 0 \qquad \textbf{[2]}}$$

   Es una ecuación lineal homogénea con un parámetro libre. Resolviéndola obtendríamos los pares de puntos (x, y) de la recta en forma paramétrica, y por tanto su vector generador.

   Siendo $\vec{v} = (v_1, v_2)$, es sencillo ver que $\vec{n} = (-v_2, v_1)$ es ortogonal a él (cumple la ec. **[1]**):

   La ecuación **[2]** queda entonces $-v_2 x + v_1 y = 0$ Distinguimos tres casos:

   - Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$ queda la ecuación $y = v_2/v_1\, x$, que es la forma denominada punto-pendiente.
   - Si $v_2 = 0$ y $v_1 \neq 0$ queda la ecuación $y = 0$
   - Si $v_1 = 0$ y $v_2 \neq 0$ queda la ecuación $x = 0$

2. Las ecuaciones paramétricas de la recta son: $\begin{cases} x = \alpha v_1 \\ y = \alpha v_2 \end{cases}$ De nuevo distinguimos tres casos:

   - Si v_1 y v_2 son ambos no nulos podemos despejar α de un punto dado, que será por la primera coordenada $\alpha = x/v_1$ y por la segunda $\alpha = y/v_2$.

     Igualando las dos ecuaciones tenemos la relación entre las coordenadas x e y del punto: $x/v_1 = y/v_2$, que se puede reescribir como la ec.

     $y = v_2/v_1\, x$
   - Para el caso $v_2 = 0$ y $v_1 \neq 0$ las ecuaciones paramétricas quedan:

     $x = v_1\alpha$, $y = 0$

     Vemos que x es parámetro libre, pues α recorre todo $\mathbb{R}$. La única ecuación resultante es $y = 0$.
   - Razonando como en el apartado anterior, si $v_1 = 0$ y $v_2 \neq 0$ llegamos a la ecuación $x = 0$

Obviamente las ecuaciones obtenidas con los dos procedimientos son las mismas.

1.2.2 Recta genérica (no es necesario que pase por el origen)

Podría obtenerse por los dos métodos del apartado anterior, pero solo presentamos la deducción para el primer método. Ya que la recta r' puede no pasar por el origen necesitamos dos datos, pues además de su vector generador $\vec{v}$ tenemos que incluir un punto $P = (p_1, p_2)$ incluido en ella.

La obtención del vector $\vec{n}$ se realiza como en el apartado anterior. La ec. **[2]** sin embargo varía, ya que ahora la condición sobre $\vec{n}$ es la de ser ortogonal a $(x, y) - (p_1, p_2)$.

La nueva ecuación es: $\boxed{n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) = 0 \quad \textbf{[3]}}$

Sustituyendo $\vec{n} = (-v_2, v_1)$ queda:
$-v_2(x - p_1) + v_1(y - p_2) = 0$ Distinguimos los tres casos:

- Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$ queda la ecuación $y = v_2/v_1\,(x - p_1) + p_2$, que es la forma denominada punto-pendiente.
- Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 = 0$ queda la ecuación $y = p_2$
- Si $v_1 = 0$ y $v_2 \neq 0$ queda la ecuación $x = p_1$

Estas ecuaciones son las más generales, válidas para cualquier $\vec{p}$. Si se toma $\vec{p} = \vec{0}$ o cualquier otro vector $\vec{p}$ múltiplo de $\vec{v}$ estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones de apartado anterior.

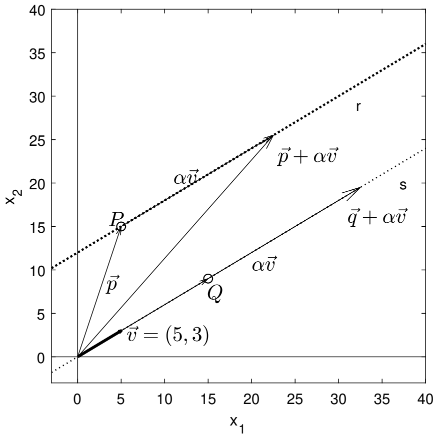
Sin expresar las componentes n_i en función de las componentes v_i, la ecuación **[3]** queda desarrollada en la forma:

$$\boxed{n_1x + n_2y = b \quad \text{con} \quad b = \vec{n} \cdot \vec{p} \qquad \textbf{[4]}}$$

[2] es el caso particular con $b = 0$, que se tiene cuando la recta pasa por el origen.

Ejemplo 3. Obtén la ecuación implícita de la recta r y la de la recta s en E_2. Ambas rectas están generadas por $\vec{v} = (5, 3)$. r pasa por el punto $P = (5, 15)$ y s por $Q = (15, 9)$.

Sol.:



Resolución partiendo de las ecuaciones paramétricas:

- Recta r: $\begin{cases} x_1 = 5 + 5\alpha \\ x_2 = 15 + 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$

  Cada punto de r (un valor fijo de α) verifica $\frac{x_1-5}{5} = \frac{x_2-15}{3}$

  Esta es la ecuación implícita, que podemos reescribir de forma más compacta cómo:

  $3x_1 - 5x_2 = -15 \times 5 + 5 \times 3 = 5 \times (-12) = -60$

  $$\boxed{3x_1 - 5x_2 = -60}$$

- Recta s: $\begin{cases} x_1 = 15 + 5\alpha \\ x_2 = 9 + 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$

  Cada punto de s (un valor fijo de α) verifica $\frac{x_1-15}{5} = \frac{x_2-9}{3}$

  En forma más compacta: $3x_1 - 5x_2 = -45 + 45 = 0$

  $$\boxed{3x_1 - 5x_2 = 0}$$

  La recta s pasa por el origen. Es obvio que (0,0) cumple la ecuación.

Resolución usando la condición de ortogonalidad:

En los dos casos $\vec{n} = (-3, 5)$ es ejemplo de vector ortogonal a $\vec{v}$

- Recta r: $(x_1, x_2) \in r$ cumple $(x_1 - 5, x_2 - 15) \cdot (-3, 5) = 0$

  $-3x_1 + 15 + 5x_2 - 75 = 0$

  $$\boxed{3x_1 - 5x_2 = -60}$$

- Recta s: $(x_1, x_2) \in r$ cumple $(x_1 - 15, x_2 - 9) \cdot (-3, 5) = 0$

  $-3x_1 + 45 + 5x_2 - 45 = 0$

  $$\boxed{3x_1 - 5x_2 = 0}$$

Obviamente encontramos las mismas ecuaciones que con el método anterior.

Otro método: mediante determinantes

Podemos utilizar que si la recta tiene vector director $\vec{v} = (5, 3)$ y pasa por $P = (p_1, p_2)$, entonces $(\vec{x} - \vec{OP})$ es proporcional a $\vec{v}$, y por tanto el determinante $|\vec{v}\ (\vec{x} - \vec{OP})|$ es cero.

Para la recta r la ec. implícita viene dada por: $\begin{vmatrix} 5 & x_1 - 5 \\ 3 & x_2 - 15 \end{vmatrix} = 0$, que desarrollada queda $3x_1 - 5x_2 + 60 = 0$

Para la recta s la ec. implícita viene dada por: $\begin{vmatrix} 5 & x_1 - 15 \\ 3 & x_2 - 9 \end{vmatrix} = 0$, que desarrollada queda $3x_1 - 5x_2 = 0$

Ejemplo adicional: HVZ12. Ejemplo B. pg. 297.

1.3 Orientación relativa

	paralelas	secantes	se solapan
vector generador	igual	distinto	igual
ec. implícita (SL)	igual la matriz de coeficientes	distinta	igual
intersección de implícitas (ecs. conjuntas)	conjunto vacío SL incomp.	un punto SCD	las propias rectas SCIndet.

Ejemplo adicional: HVZ12. Ejemplos D y E. pgs. 299-300-301. En estos ejemplos se usan las formas paramétricas, en vez de las implícitas, para obtener la intersección.

Por ejemplo en el Ejemplo D las rectas $(1, 0) + t(-1, 2)$ y $(-2, 1) + s(-1, -3)$ se cortarán en un punto si existen valores de t y s que cumplan:

$$(1, 0) + t(-1, 2) = (-2, 1) + s(-1, -3)$$

La ec. se puede reescribir como el siguiente SL: $\begin{cases} -t + s = -3 \\ 2t + 3s = 1 \end{cases}$

Si el SL no tiene solución las rectas son paralelas, si tiene solución única son secantes, y si tiene infinitas soluciones las rectas se solapan.

---

2 Rectas y planos en el espacio

E_3 es el conjunto de los puntos del espacio ordinario.

2.1 Rectas

2.1.1 Ec. vectorial

Se extiende fácilmente desde la teoría para E_2, sin más que añadir una entrada a los vectores, para pasar de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Tomando $\vec{v}$ como vector director, y siendo $\vec{p}$ un punto de la recta, la ecuación vectorial es:
$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}}$

La recta pasa por el origen si $\vec{p} = 0$ o si $\vec{p}$ y $\vec{v}$ son proporcionales.

La ecuación vectorial en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como tres ecuaciones escalares, una por componente. A esas ecuaciones las denominamos **ecuaciones paramétricas de la recta**.

A partir de dos puntos P_1 y P_2 de la recta (distintos) se puede obtener su vector director como $\vec{v} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$, siendo $\vec{p_i}$ el vector de posición de P_i.

Por ejemplo, la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones paramétricas de la recta en E_3 generada por el vector $(1, 2, 3)$ son:

$$\vec{x} = \alpha(1, 2, 3) \ / \ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{o} \qquad \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$$

2.1.2 Forma implícita

Consideramos la recta con vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ que pasa por $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Se permite que $\vec{p}$ sea el vector cero, que sea proporcional a $\vec{v}$ o que no sea proporcional a $\vec{v}$, para incluir todas las rectas, pasando o no por el origen.

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha v_1 \\ x_2 = p_2 + \alpha v_2 \\ x_3 = p_3 + \alpha v_3 \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$ **[1]**

A continuación distinguimos tres casos:

- Si las tres componentes de $\vec{v}$ son distintas de cero, entonces podemos reescribir las ecuaciones anteriores de esta forma:

  $$\begin{cases} \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \alpha \\ \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \alpha \\ \frac{x_3 - p_3}{v_3} = \alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$$

  A cada valor de α le corresponde un punto de la recta, y en cada punto se cumple:
  $\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3} = \alpha$

Las dos primeras igualdades dan lugar a dos ecuaciones independientes. Esas dos ecuaciones, que forman un SL, son las ecuaciones de la recta.

- Si dos componentes de $\vec{v}$ son distintas de cero, entonces podemos reescribir las ecuaciones **[1]** de esta forma (hemos tomado la tercera componente como nula, pero el razonamiento que sigue sería similar si la nula fuera otra):

  $$\begin{cases} \frac{x_1-p_1}{v_1} = \alpha \\ \frac{x_2-p_2}{v_2} = \alpha \\ x_3 - p_3 = 0 \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$$

  Queda entonces el siguiente par de ecuaciones lineales:
  $\frac{x_1-p_1}{v_1} = \frac{x_2-p_2}{v_2} \quad , \quad x_3 = p_3$

- Si dos componentes de $\vec{v}$ son nulas, entonces podemos reescribir las ecuaciones **[1]** de esta forma (hemos tomado la primera como no nula, pero el razonamiento que sigue sería similar si la no nula fuera otra):

  $$\begin{cases} \frac{x_1-p_1}{v_1} = \alpha \\ x_2 = p_2 \\ x_3 = p_3 \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$$

  Las ecuaciones implícitas de la recta <u>son las dos últimas</u>, que forman un SL. x_1 es parámetro libre.

A modo de síntesis, dependiendo del número de componentes nulas del vector generador $\vec{v}$ de la recta tenemos tres casos:

- Si todas las componentes son no nulas las ecuaciones son: $\begin{cases} \frac{x_1-p_1}{v_1} = \frac{x_2-p_2}{v_2} \\ \frac{x_2-p_2}{v_2} = \frac{x_3-p_3}{v_3} \end{cases}$
- Si sólo la componente i es nula las ecuaciones son: $\begin{cases} \frac{x_j-p_j}{v_j} = \frac{x_k-p_k}{v_k} \\ x_i = p_i \end{cases}$
- Si las componentes i y j son nulas las ecuaciones son: $\begin{cases} x_i = p_i \\ x_j = p_j \end{cases}$

En los tres casos se encuentra un SL de la forma: $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d' \end{cases}$ **[2]**,

donde el valor de las constantes $a, b, c, d, a', b', c', d'$ dependerá de los valores de las componentes de $\vec{v}$ y de $\vec{p}$.

El SL será homogéneo, es decir $d = d' = 0$, si y sólo si $\vec{v}$ y $\vec{p}$ son l.d., es decir, si la recta pasa por el origen.

Resolviendo el SL **[2]** encontraríamos como solución general los puntos (x_1, x_2, x_3) de la recta, en la forma paramétrica dada en **[1]**.

Cada ecuación lineal en **[2]** es la ec. implícita de un plano en E_3, es decir, la primera correspondería a un plano Π_1 y la segunda a un plano Π_2. La recta, por cumplir las dos ecuaciones, es la intersección de esos dos planos.

Ejemplo 4. En E_3 calcula la forma implícita de la recta con vector generador $\vec{u} = (3, 1, 0)$ y que pasa por $P = (2, 3, 7)$.

Sol.:

Su forma paramétrica es: $\begin{cases} x_1 = 2 + 3\alpha \\ x_2 = 3 + \alpha \\ x_3 = 7 \end{cases}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

- Eliminando α entre las dos primeras ecuaciones tenemos la primera ecuación de la forma implícita:
  $\frac{x_1 - 2}{3} = x_2 - 31$
  desarrollada: $x_1 - 3x_2 = -7$
- La segunda ecuación se toma directamente de la tercera paramétrica: $x_3 = 7$

$$\boxed{\text{La forma implícita es el siguiente SL : } \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ x_3 = 7 \end{cases}}$$

Nótese que:

- la recta no pasa por el origen.
- las soluciones del SL son los puntos de la recta.
- la recta es la intersección de dos planos, π_1 y π_2, correspondiendo cada uno a una de las ecuaciones.
- denotando $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ como los vectores normales a π_1 y π_2 respectivamente, $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ tiene la dirección de $\vec{u}$.
  $\vec{n}_1 = (1, -3, 0) \qquad \vec{n}_2 = (0, 0, 1)$
  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, -3, 0) \times (0, 0, 1) = (-3, -1, 0)$

Ejemplo 5. En E_3 calcula la forma implícita de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3, 7)$ y $Q = (3, 4, 9)$.

Ejemplo adicional: HVZ12. Ejemplo C. pgs. 306-307.

2.2 Planos

2.2.1 Ec. vectorial

Plano que contiene el origen

Considerados dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, que formen un conjunto l.i., el lugar geométrico de sus combinaciones lineales es un plano que pasa por el origen.

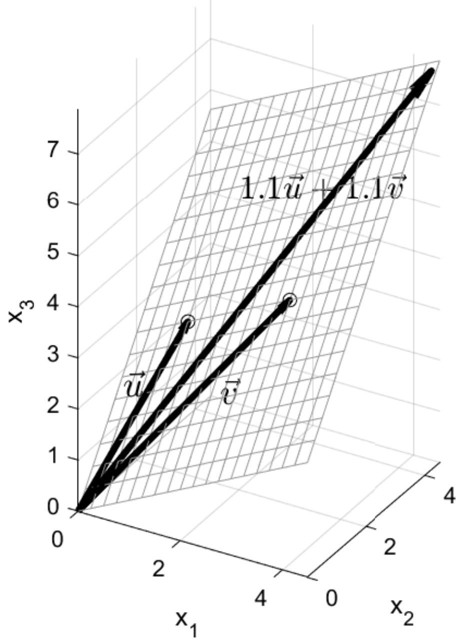
Por ejemplo dados los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}$, tendremos que $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es el lugar geométrico de un plano en E_3 que contiene el $(0, 0, 0)$. Se dice que el conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es conjunto generador del plano, o que el plano está generado por esos dos vectores. Cualquier par de vectores del plano, l.i. entre sí, es un par generador del mismo.

Por ejemplo los vectores $\vec{u}+\vec{v} = (4, 4, 7)$ y $\vec{u}-\vec{v} = (-2, 0, -1)$ también forman un par que es conjunto generador, porque están dentro del plano y son linealmente independientes (uno no es múltiplo del otro).

Considerando el par generador inicial, la **ecuación vectorial paramétrica** del plano queda:

$$\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix} \;\; / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Las **ecuaciones paramétricas** son: $\begin{cases} x_1 = 1\alpha + 3\beta \\ x_2 = 2\alpha + 2\beta \\ x_3 = 3\alpha + 4\beta \end{cases} \quad / \; \alpha, \;\beta \in \mathbb{R}$



Nótese que a partir de tres puntos del plano se podría obtener un par de vectores que lo genere, siempre que los tres puntos no estén alineados.

Plano genérico (no es necesario que contenga el origen)

Los puntos de cualquier plano Π' (pase o no por el origen) se pueden expresar vectorialmente en la forma siguiente:

$\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ / $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$,

siendo $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ el par generador del plano Π que pasa por el origen y es paralelo (o igual) a Π', y $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, siendo P un punto cualquiera del plano Π'.

Al igual que para el plano que pasa por el origen, para el plano Π' se puede deducir un par de vectores generadores a partir de las posiciones de tres puntos P, Q, R en Π' que no estén alineados entre sí.

Ejemplo 6. Obtén la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas del plano H de E_3 generado por $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (3, 2, 4)$ y que pasa por el punto $P = (0.5, 0.5, 10)$.

Sol.:

Sabemos que los puntos (x_1, x_2, x_3) del plano Π generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que pasa por el origen cumplen la siguiente ecuación:

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(3, 2, 4)$$

Si $(0.5, 0.5, 10)$ verifica esta ecuación, es decir, si $\vec{p}$ es c.l. de los vectores generadores, entonces el plano H del enunciado contiene el origen, y por tanto H es el plano Π.

Determinamos a continuación si la ecuación $(0.5, 0.5, 10) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(3, 2, 4)$ tiene solución para algún par (α,β).

A esta ecuación vectorial le corresponden las 3 ecuaciones escalares siguientes:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0.5 \\ 2\alpha + 2\beta = 0.5 \\ 3\alpha + 4\beta = 10 \end{cases}$$

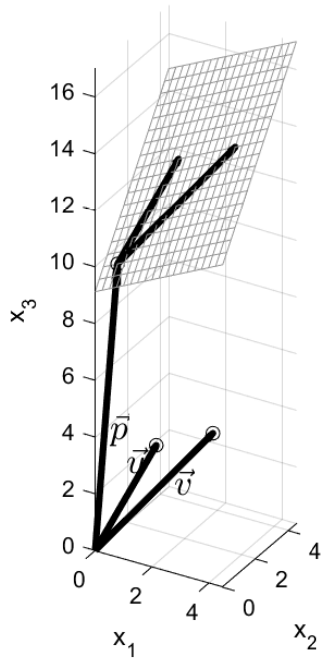
Restando a la segunda ecuación el doble de la primera, y a la tercera el triple de la primera vemos que queda el siguiente sistema equivalente: $\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0.5 \\ 0 - 4\beta = -0.5 \\ 0 - 5\beta = 8.5 \end{cases}$,

Despejando β en la segunda ecuación obtenemos 0.125, mientras que con la tercera ecuación obtenemos -1.70, por tanto el sistema de ecuaciones es incompatible, y en consecuencia P no está en el plano Π generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que pasa por el origen.

La ecuación vectorial del plano H se debe escribir entonces como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 10 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x_1 = 0.5 + 1\alpha + 3\beta \\ x_2 = 0.5 + 2\alpha + 2\beta \\ x_3 = 10 + 3\alpha + 4\beta \end{cases}$ / $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$



NOMENCLATURA general: Al igual que para las rectas, para distinguir el plano que no pasa por el origen del que sí pasa por el origen algunos autores designan los primeros explícitamente como **planos afines** y a los segundos como **planos vectoriales**. En los enunciados de algunos ejercicios de este documento se usa esta nomenclatura para señalar explícitamente si el origen está o no incluido en el plano.

Ejemplo 7 a) Obtén la ecuación vectorial paramétrica del plano F de E_3 generado por $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (1, 2, 4)$ y que pasa por el punto $P = (2, 4, 7)$.
b) Obtén la ecuación vectorial paramétrica del plano F' de E_3 generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que pasa por $Q = (2, 5, 7)$

Sol. apartado a):

Sería correcto escribir directamente la expresión general: $\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, sin preocuparnos de si el plano pasa por el origen o no.

Quedaría entonces la ecuación: $$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \;\; / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo en este caso el origen está contenido en el plano (nótese que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{p}$), y quedaría más elegante tomar como punto $\vec{p}$ el propio origen de coordenadas, con lo que nos quedaría:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \;\; / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ es decir,} \qquad \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \;\; / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Así la ecuación vectorial paramétrica ya nos muestra que en este caso el plano contiene el origen.

De forma general, para averiguar si el origen está contenido en el plano basta con obtener el determinante de $[\,\vec{u}\;\vec{v}\;\vec{OP}]$, ya que si es así, entonces el determinante es cero.

Efectivamente $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Resuelve tú mismo el apartado b).

2.2.2 Forma implícita

Plano que contiene el origen

Dado un plano Π con vectores generadores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener su forma implícita obtenemos en primer lugar un vector normal al plano, que denotamos como $\vec{n}$, que no es más que un vector ortogonal a todos los vectores del plano. Seguidamente basta imponer que el vector genérico del plano, $\vec{x} = (x, y, z)$, sea ortogonal a $\vec{n}$.

Tenemos dos formas de obtener $\vec{n}$:

1. $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ha de ser ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ por tanto ha de verificar las ecuaciones:

   $$\begin{cases} u_1n_1 + u_2n_2 + u_3n_3 = 0 \\ v_1n_1 + v_2n_2 + v_3n_3 = 0 \end{cases}$$

   Los elementos u_i y v_i son reales conocidos, por tanto tenemos un SLH de dos ecuaciones con tres incógnitas. Es por tanto compatible indeterminado, con un grado de indeterminación.

   El grado de indeterminación resulta de que hay infinitos vectores ortogonales a los dos dados, todos ellos sobre la misma recta.

   Resolviendo el SL obtendríamos la solución general y escogiendo un valor para el parámetro libre queda determinado el vector $\vec{n}$.

2. Podemos obtener el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Como vector $\vec{n}$ tomaríamos directamente el resultado, o un múltiplo que deje números más sencillos.

Una vez obtenido (n_1, n_2, n_3), la ecuación implícita del plano es:

$$\boxed{n_1x + n_2y + n_3z = 0 \quad \textbf{[1]}}$$

Plano genérico (no es necesario que contenga el origen)

Al igual que en el caso anterior hay que obtener $\vec{n}$ a partir del par generador del plano paralelo en el origen, que puede ser el mismo. Si del plano sabemos que contiene un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$, y $V = (x, y, z)$ es un punto genérico del plano, entonces el vector ortogonal a $\vec{n}$ ya no es (x, y, z), como en el caso anterior, sino $(x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)$. Por tanto la ecuación implícita del plano en el caso general es:

$$\boxed{n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0 \quad \textbf{[2]}}$$

Desarrollando la ecuación anterior tenemos: $\quad n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$,

que se simplifica en la forma:

$n_1x + n_2y + n_3z = b$, siendo la constante b el segundo miembro de la ec. anterior.

Se trata de una ecuación lineal, como era de esperar ya que la ecuación **[1]** es un caso particular de ésta.

Nótese que b coincide con el producto escalar de los vectores $\vec{n}$ y $\vec{p}$, ya que la ecuación $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ es la misma que $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$

Distinguimos entonces los dos casos posibles.

- $b = 0$ y la ecuación es por tanto homogénea. Estamos en el caso **[1]** si y solo si $\vec{p}$ y $\vec{n}$ son ortogonales, lo que sucede si y solo si $\vec{p}$ está en el plano Π que pasa por el origen. En ese caso la traslación $\vec{p}$ se realiza "sobre" el plano, por tanto el plano no cambia y $\Pi' = \Pi$ (Π' es el "plano trasladado sobre sí mismo").

$$\boxed{n_1x + n_2y + n_3z = 0}$$

- Si la traslación no tiene lugar sobre el plano Π, entonces $\Pi' \neq \Pi$, $b \neq 0$ y el SL es no homogéneo.

$$\boxed{n_1x + n_2y + n_3z = b \quad \text{con } b \neq 0}$$

Otro método

Suponiendo el punto de paso P (que puede ser el origen de coordenadas) y los vectores generadores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, los vectores (x, y, z) del plano son aquellos que verifican que el vector $(x, y, z) - \vec{p}$ sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por tanto la ec. implícita se obtiene a partir de la siguiente igualdad:

$$|\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{x} - \vec{p}\ | = 0$$

Ejemplo 8. a) Encuentra la ecuación implícita del plano de E_3 que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 3, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$. b) Obtén el centro geométrico de los tres puntos y comprueba que se encuentra sobre el plano. *El centro geométrico o centroide de un triángulo se encuentra en la intersección de sus medianas.*

Sol.:

a) Obtenemos los vectores $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\overrightarrow{PR} = R - P = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Seguidamente el vector normal al plano, mediante el producto vectorial: $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

Para definir el plano falta tomar un punto del mismo y elegimos P (podríamos haber tomado cualquiera de los tres).

Planteamos la condición de ortogonalidad entre el vector $\vec{n}$ y el vector genérico del plano:

$$(\vec{x} - \overrightarrow{OP}) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

$$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0$$

para los valores del ejercicio:

$$-1(x - 1) + 9(y - 2) + 6(z - 1) = 0$$

Desarrollada queda:

$$\boxed{x - 9y - 6z = -23}$$

Vemos que el plano no contiene el origen $(0, 0, 0)$.

Otro método: Desarrollando el siguiente determinante e igualando a cero también podemos obtener la ec. implícita.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & x-1 \\ 1 & -2 & y-2 \\ -2 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

b) El centro geométrico es 1/3 de la suma de los vectores de posición de los tres puntos.
$1/3 * ((1,2,1) + (-2,3,-1) + (1,0,4)) = (0, 5/3, 4/3)$

Comprobamos que el centro geométrico calculado está en el plano, y también que los puntos P, Q y R lo están, o dicho de otra forma, comprobamos que cumplen la ecuación, con la siguiente operación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5/3 \\ 1 & -1 & 4 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & -23 & -23 & -23 \end{bmatrix}$$

HVZ12. Ejemplo D (pg. 309) y Ejemplo G (pgs. 311-312). En el segundo ejemplo se halla la ec. implícita del plano paralelo a $x + y + z = 0$ que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$.

2.3 Orientación relativa entre rectas y entre planos

	clasificación SL de ecs. implicitas conjuntas
Π_1 y Π_2	S Incompatible: Planos paralelos SC Indet. un parámetro libre: recta SC Indet. dos params. libres: Π_1 (los planos son el mismo)
Π y r	S Incompatible: recta paralela a plano SCD: la intersección es un punto SC Indet.: r (r contenida en Π)
r y s	S Incompatible: rectas paralelas (vector generador igual) o se cruzan (vector generador distinto) SCD: la intersección es un punto SC Indet.: r (las rectas son la misma)

HVZ12. Ejemplos B, E, F. pgs. 305-306, 310-311, 311. Se analizan orientaciones relativas en base a las ecuaciones paramétricas o en base a las ecuaciones implícitas.

---

3 Producto escalar. Longitudes, distancias y ángulos

3.1 El producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$

El producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$ es una operación interna que permite asignar longitudes a los vectores y obtener distancias y ángulos entre ellos. Se le denomina también "producto escalar usual" o "producto escalar habitual".

3.1.1 Definición

El producto escalar canónico de dos vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ se define como el siguiente escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n = \rho \qquad [\mathbf{1}]$$

El producto escalar vemos pues que es una operación interna y que no es cerrada. El resultado no es un elemento del conjunto $\mathbb{R}^n$ sino de $\mathbb{R}$. De ahí el nombre de producto escalar: el resultado es un escalar. Es la suma de n productos de dos números reales, y por tanto es un real.

También se le denomina producto punto.

Se cumplen las propiedades que vemos a continuación. Son muy sencillas de demostrar, por lo que la demostración se presenta solo para la primera.

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

  En efecto, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \cdot \vec{w} = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \ldots + (u_n + v_n)w_n$

  Y ya que en $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

  $= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + \ldots + u_nw_n + v_nw_n$

  Utilizando ahora la propiedad conmutativa de la suma de reales, reagrupamos los sumandos:

  $= u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n + v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots v_nw_n = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, con justificación muy similar a la anterior.

- $\lambda\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Por la propiedad conmutativa del producto de reales)

  Esta propiedad se conoce como <u>simetría</u> del producto escalar.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, con $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ (Es una suma de cuadrados: el resultado solo puede ser positivo o cero)

<u>Expresión matricial del producto escalar canónico:</u>

Partimos de la ecuación [**1**]:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \underset{\uparrow}{=} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \vec{u}^t\ \vec{v}$$

El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ corresponde al producto matricial del traspuesto de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Es el producto de una matriz $1 \times n$ por una matriz $n \times 1$, que da como resultado una matriz 1×1, es decir, un escalar.

Ejemplo 9 En $\mathbb{R}^3$ y considerando el producto escalar canónico, determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$, con

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

<u>Sol.:</u>

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = [2 \ -5 \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \times 3 + (-5) \times 2 + (-1) \times (-3) = 6 - 10 + 3 = -1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^t \vec{u} = [3 \ 2 \ -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \times 2 + 2 \times (-5) + (-3) \times (-1) = 6 - 10 + 3 = -1$$

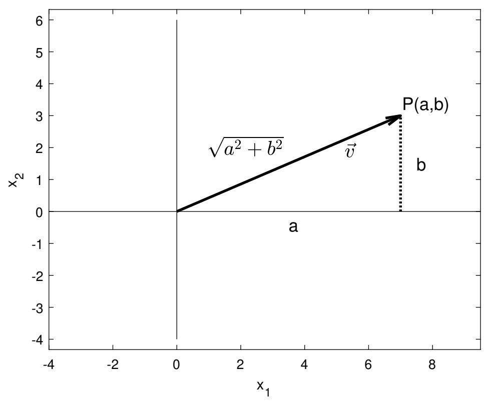
3.1.2 <u>Longitud o norma de un vector</u>

Considerado $\mathbb{R}^n$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, y el producto escalar canónico, se denomina **norma** o **longitud** de $\vec{v}$, y se denota $\| \vec{v} \|$ al escalar:

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^t \ \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \qquad \textbf{[2a]}$$

Nótese que la raíz está siempre definida, ya que $\vec{v} \cdot \vec{v}$ es positivo o cero (es cero solo si $\vec{v} = \vec{0}$).

En la figura se observa como la longitud definida coincide con lo que conocemos como longitudes de los vectores de $\mathbb{R}^2$.



Propiedades de la norma:

- $\| c\vec{v} \| = |c| \ \| \vec{v} \|$
- Desigualdad triangular $\quad \| \vec{u} + \vec{v} \| \ \leq \ \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$

  La igualdad se cumple cuando alguno de ellos es cero, o, sin serlo, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es **unitario** si $\| \vec{v} \| = 1$

Multiplicando el vector no nulo $\vec{v}$ por el escalar $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ obtenemos un vector $\vec{v}_\circ = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ que es unitario. El proceso de crear $\vec{v}_\circ$ a partir de $\vec{v}$ se denomina **normalización** de $\vec{v}$.

$\vec{v}$ y $\vec{v}_\circ$ tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Elevando al cuadrado la expresión **[2a]** se tiene:

$\| \vec{v} \|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^t \ \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$ **[2b]**

Con frecuencia resulta conveniente trabajar con las normas al cuadrado, para evitar la expresión con la raíz cuadrada. Si se maneja esta expresión hay que recordar que la norma toma valores solo en $\mathbb{R}^+$ (0 incluido).

Ejemplo 10 Encuentra un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v} = (2, -3)$.

Sol:

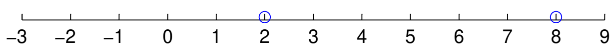
$\| \vec{v} \|^2 = 4 + 9 = 13$ $\qquad \vec{v}_0 = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}})$

también se puede escribir, más simplificado:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)$$

3.1.3 Distancia entre dos vectores

Recordamos que si a y b son números reales, la distancia en $\mathbb{R}$ entre a y b es el real positivo $|b - a|$. En la figura se da un ejemplo.



Distancia entre $x_1 = 2$ y $x_2 = 8$: $\qquad |8 - 2| = |6| = 6$

Otro ejemplo, distancia entre $x_1 = -3$ y $x_2 = -4$:

$| - 4 - (-3)| = | - 1| = 1$

Esta definición de distancia se puede extender a $\mathbb{R}^n$.

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la **distancia entre** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$, denotada como $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v})$, es la norma del vector $\vec{v} - \vec{u}$.

Esto es, $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \| \vec{v} - \vec{u} \| = \sqrt{(\vec{v} - \vec{u})^t(\vec{v} - \vec{u})} = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \ldots + (v_n - u_n)^2}$ **[3]**

Propiedades de la distancia:

- $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{v}$, y $\text{dist}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$
- $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{dist}(\vec{v}, \vec{u})$
- Desigualdad triangular $\quad \text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) \leq \text{dist}(\vec{u}, \vec{w}) + \text{dist}(\vec{w}, \vec{v})$

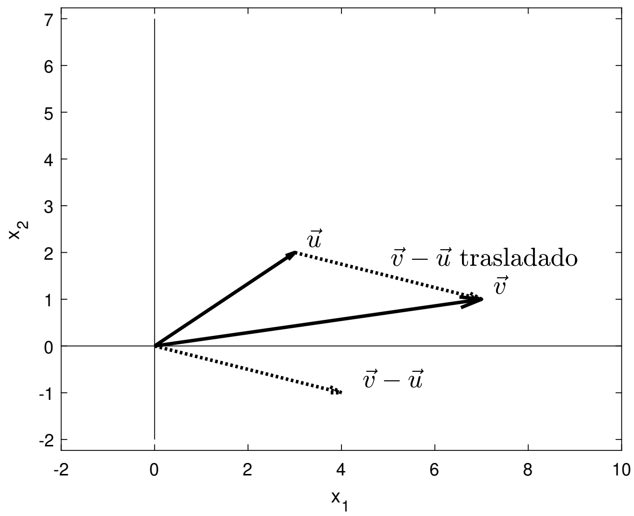
Ejemplo 11 a) En $\mathbb{R}^2$ y con el producto escalar canónico calcula la distancia entre los vectores $\vec{v} = (7, 1)$ y $\vec{u} = (3, 2)$.

b) Representa gráficamente los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$ (todos ellos con origen en $(0, 0)$). Seguidamente representa el vector $\vec{v} - \vec{u}$ situando su origen en $\vec{u}$, como si se tratara del vector original trasladado. Al situarlo en esta localización se entiende bien que su norma corresponde a la distancia entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Sol.:

$$\vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\| \vec{v} - \vec{u} \|^2 = 4^2 + (-1)^2 = 17$
$\| \vec{v} - \vec{u} \| = \sqrt{17}$



Ejemplo 12 a) Calcula las longitudes de las diagonales del paralelogramo de vértices consecutivos $(-3, 2)$, $(0, 0)$, $(7, 1)$.

b) Calcula las longitudes de las diagonales del paralelogramo de vértices consecutivos $(3, 2)$, $(0, 0)$, $(7, 1)$.

Ejemplo 13 Considerando el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^4$, calcula la distancia entre los vectores $\vec{v} = (7, 1, 1, 5)$ y $\vec{u} = (3, 2, 1, 3)$.

Sol.:

$\vec{v} - \vec{u} = (4, -1, 0, 2)$
dist $= \| \vec{v} - \vec{u} \| = \sqrt{16 + 1 + 0 + 4} = \sqrt{21}$

3.1.4 Ángulo entre dos vectores

Con el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$ se define ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ninguno de ellos el vector $\vec{0}$, como el escalar $\alpha = \text{áng}(\vec{u}, \vec{v})$ siguiente:

$$\alpha \in [0, \pi] \quad \text{tal que} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \ \| \vec{v} \| \cos\alpha$$

Despejando $\cos\alpha$:
$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\| \vec{u} \| \ \| \vec{v} \|} \qquad [\mathbf{4}]$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi/2$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in [0, \pi/2)$

Caso $\alpha = 0$ Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \lambda \| \vec{u} \|^2$

$$\cos\alpha = \frac{\lambda \| \vec{u} \|^2}{\| \vec{u} \| \ \| \lambda\vec{u} \|} = \frac{\lambda \| \vec{u} \|^2}{|\lambda| \ \| \vec{u} \|^2} = 1 \qquad \Rightarrow \alpha = 0$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (\pi/2, \pi]$

Caso $\alpha = \Pi$ Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \lambda \| \vec{u} \|^2$

$$\cos\alpha = \frac{\lambda \| \vec{u} \|^2}{\| \vec{u} \| \ \| \lambda\vec{u} \|} = \frac{\lambda \| \vec{u} \|^2}{|\lambda| \ \| \vec{u} \|^2} = -1 \qquad \Rightarrow \alpha = \pi$$

OBSERVACIÓN: Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$, ambos distintos de $\vec{0}$, son linealmente dependientes si y sólo si el ángulo que forman es 0 o π.

Ejemplo 14 En $\mathbb{R}^2$ considera el producto escalar habitual, y los siguientes vectores: $\vec{u} = (7,1)$, $\vec{v} = (-3,3)$, $\vec{w} = (3,-3)$ y $\vec{z} = (4,-3)$.
Calcula los siguientes ángulos:
a) Ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$:
b) Ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$:
c) Ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{z}$:

Sol.:

- $(7,1)\ (-3,3) = \sqrt{50}\ \ \sqrt{18}\ \ \cos\alpha$

  $$\cos\alpha = \frac{-21+3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{25\times 4\times 9}} = \frac{-18}{5\times 2\times 3} = -\frac{3}{5}$$

  arco coseno$(-\frac{3}{5})$ es el ángulo buscado.

  El ángulo es $\alpha \simeq 2.2143$ radianes $\simeq 126.8699$ grados

- $(7,1)\ (3,-3) = \sqrt{50}\ \ \sqrt{18}\ \ \cos\alpha$

  $$\cos\alpha = \frac{21-3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{2}}{5\times\sqrt{2}} = \frac{3}{5}$$

  El ángulo es $\alpha \simeq 0.9273$ radianes $\simeq 53.1301$ grados

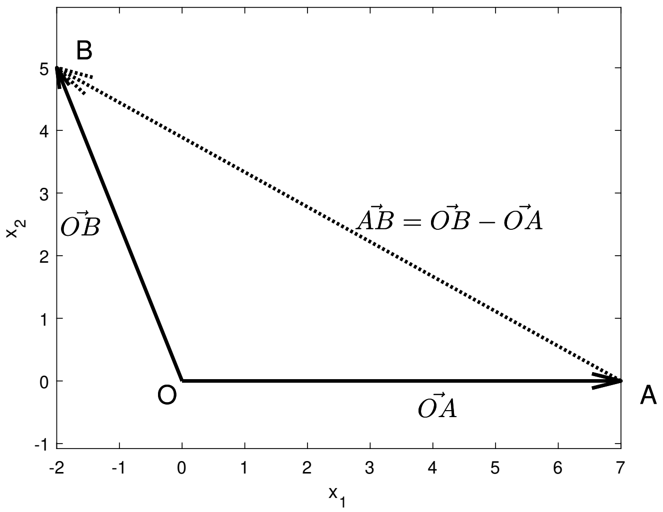
  Nótese que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores opuestos, por tanto la suma del ángulo de $\vec{u}$ con $\vec{v}$ más el ángulo de $\vec{u}$ con $\vec{w}$ es igual a 180 grados.

- $(7,1)\ (4,-3) = \sqrt{50}\ \ 5\ \ \cos\alpha$

  $$\cos\alpha = \frac{28-3}{5\sqrt{50}} = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7071$$

  El ángulo es $\alpha = 45$ grados

Ejemplo 15 Considera el plano E_2 y en él el triángulo con vértices en los puntos $O = (0,0)$, $A = (7,0)$ y $B = (-2,5)$. Determina los tres ángulos interiores del triángulo. Ten en cuenta que la suma de los ángulos ha de ser igual a 180 grados.
Sol.:



- Con el producto escalar (p.e.) de los vectores $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ podemos obtener el ángulo en O.

- Con el p.e. de los vectores $-\vec{OA}$ y $\vec{AB}$ podemos obtener el ángulo en A.
  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2,5) - (7,0) = (-9,5)$

- Con el p.e. de los vectores $-\vec{OB}$ y $-\vec{AB}$ podemos obtener el ángulo en B. Al efectuar este p.e. puedo sacar fuera $(-1) \times (-1) = 1$, por tanto el resultado es el mismo que si obtuviésemos el p.e. de $\vec{OB}$ y $\vec{AB}$

En O:
$$\cos\alpha = \frac{(7,0)\cdot(-2,5)}{\sqrt{7}\sqrt{29}} = \frac{-14}{7\sqrt{29}} \simeq -0.3714$$

Ángulo en radianes $\simeq 1.9513$ Ángulo en grados $\simeq 111.8014$

En A:
$$\cos\beta = \frac{-(7,0)\cdot(-9,5)}{\sqrt{7}\sqrt{106}} = \frac{63}{7\sqrt{106}} \simeq 0.8742$$

Ángulo en radianes $\simeq 0.5071$ Ángulo en grados $\simeq 29.0546$

En B:
$$\cos\gamma = \frac{(-2,5)\cdot(-9,5)}{\sqrt{29}\sqrt{106}} = \frac{18+25}{\sqrt{29}\sqrt{106}} = \frac{43}{\sqrt{29}\sqrt{106}} \simeq 0.7756$$

Ángulo en radianes $\simeq 0.6832$ Ángulo en grados $\simeq 39.1440$

Comprobación de la suma de ángulos: $111.8014 + 29.0546 + 39.144 = 180$

Ejemplo 16 En $\mathbb{R}^3$ y considerando el producto escalar canónico, determina el ángulo que forma el vector $\vec{v} = (4, -1, 6)$ con cada uno de los vectores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$
Sol.:

- $(4, -1, 6)\ (1, 0, 0) = \sqrt{16 + 1 + 36}\ \ 1\ \ \cos\alpha = \sqrt{53}\ \ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{53}} \simeq 0.5494$$

  El ángulo es $\alpha \simeq 0.9891$ radianes $\simeq 56.6712$ grados

- $(4, -1, 6)\ (0, 1, 0) = \sqrt{53}\ 1\ \cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{53}} \simeq -0.1374$$

  El ángulo es $\beta \simeq 1.7086$ radianes $\simeq 97.8951$ grados

- $(4, -1, 6)\ (0, 0, 1) = \sqrt{53}\ 1\ \cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{53}} \simeq 0.8242$$

  El ángulo es $\gamma \simeq 0.6021$ radianes $\simeq 34.4962$ grados

Ejemplo 17. Calcula los tres ángulos del triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 2)$ y $C = (-3, 6)$, y rellena un cuadro como el siguiente con los resultados. Expresa el ángulo en grados y con precisión de décimas (por redondeo).

En vértice	ángulo
A	
B	
C	

Solución con MATLAB:

```
 A=[1 1]'; B=[5 2]'; C=[-3 6]';
 AB=B-A;
 AC=C-A;
 BC=C-B;

% tomo AB y AC para el angulo en vertice A

 angA=acosd(dot(AB,AC)/norm(AB)/norm(AC));

 % dot( , )  es el producto escalar de los vectores que aparecen como argumentos
 % norm(  )  es la norma del vector
 % acosd( )  es el arcocoseno en grados



% tomo BA y BC porque vertice en B (BA=-AB)

 angB=acosd(dot(-AB,BC)/norm(AB)/norm(BC));


% tomo CA y CB porque vertice en C (CA=-AC , CB=-BC)

 angC=acosd(dot(-AC,-BC)/norm(AC)/norm(BC));


 angA+angB+angC - 180   % Si sale 0 cumple que la suma son 180 grados

 [angA angB angC]     % en una fila para ocupar menos espacio

%   0
%   114.6236   40.6013   24.7751

% redondeando a la decima: 114.6  40.6  y 24.8 grados
```

3.1.5 Vectores ortogonales. Teorema de Pitágoras generalizado

En $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar canónico decimos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

El vector cero es ortogonal a todos los vectores de $\mathbb{R}^n$, pues $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0 \;\; \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

• **Teorema de Pitágoras y Teorema de Pitágoras generalizado**

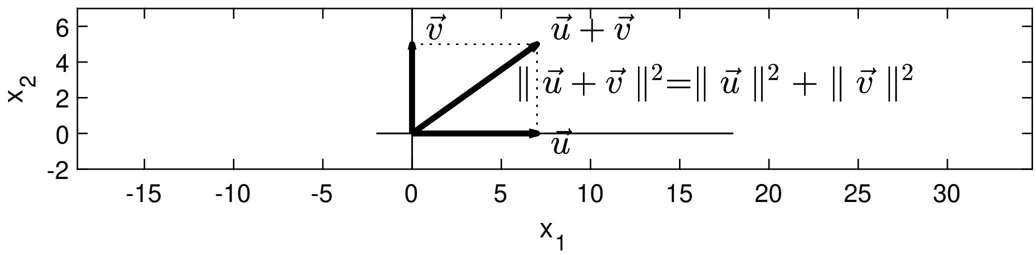
Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\quad \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2$ **[5a]**

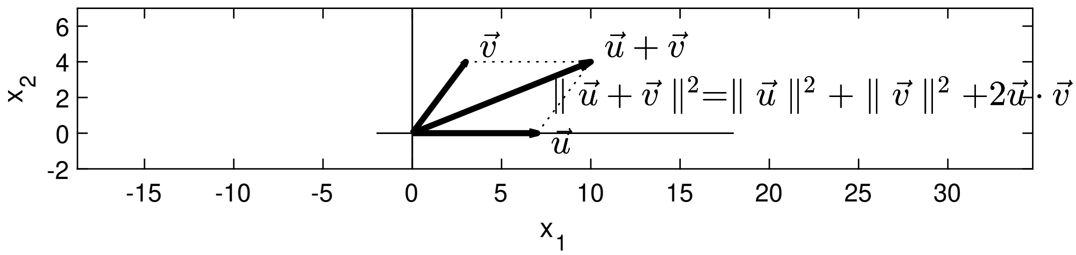
$$\begin{aligned} &\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 + 2\, \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

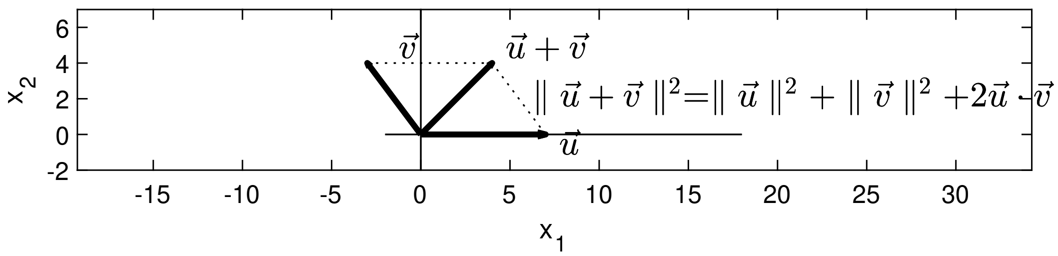
$$\boxed{\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 + 2\, \vec{u} \cdot \vec{v}} \qquad \textbf{[5b]}$$

La última expresión es el Teorema de Pitágoras generalizado. El Teorema de Pitágoras corresponde al caso particular en que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

Esquema en $\mathbb{R}^2$:





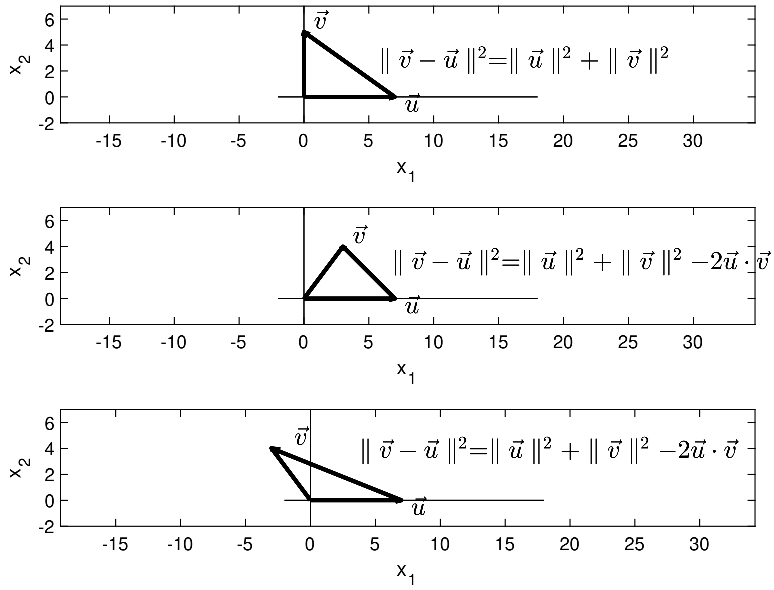


(Recuérdese como la suma de dos vectores coincide con la diagonal del paralelogramo que definen, tomando como origen de la diagonal el vector $\vec{0}$).

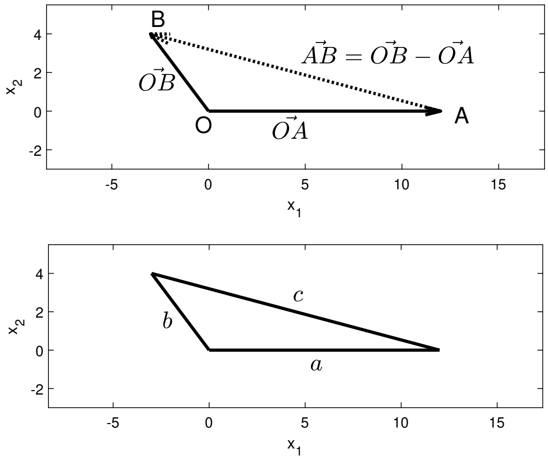
Observación: En la figura del medio se ha tomado $\vec{v}$ formando un ángulo agudo con $\vec{u}$, por lo que el sumando $2\vec{u} \cdot \vec{v}$ es positivo (producto escalar positivo), y la norma al cuadrado de la suma es mayor que la suma de los cuadrados de las normas. En la figura inferior se ha tomado $\vec{v}$ formando un ángulo obtuso con $\vec{u}$, por lo que el sumando $2\vec{u} \cdot \vec{v}$ es negativo (producto escalar negativo), y la norma al cuadrado de la suma es menor que la suma de los cuadrados de las normas.

- **Teorema del coseno**

Se deduce igual que el Teorema de Pitágoras generalizado, pero considerando $\vec{v} - \vec{u}$. Mostramos la misma figura que en el apartado anterior, pero para la diferencia en vez de la suma.



Presentamos el mismo teorema, con otra notación.



$\| \vec{AB} \|^2 = \| \vec{B} - \vec{A} \|^2 = (\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \| \vec{A} \|^2 + \| \vec{B} \|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} =$

$\| \vec{A} \|^2 + \| \vec{B} \|^2 - 2 \| \vec{A} \| \quad \| \vec{B} \| \ \cos\gamma$, siendo γ el ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Denotando las longitudes de $\vec{A}$, $\vec{B}$ $\vec{AB}$ como a, b y c, respectivamente, la expresión del Teorema del Coseno queda:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ \cos\gamma}$$

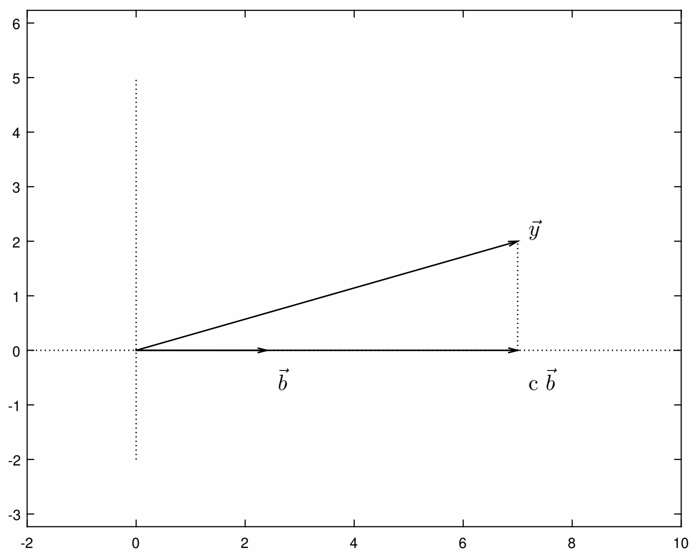
Por simetría se puede encontrar una expresión similar para los otros dos ángulos interiores:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ \cos\alpha$ $\qquad$ α es el ángulo opuesto al lado a

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c\ \cos\beta$ $\qquad$ β es el ángulo opuesto al lado b

3.2 Proyección y simétrico respecto de una recta en $\mathbb{R}^2$

Presentamos el esquema en $\mathbb{R}^2$ de la proyección ortogonal del vector $\vec{y}$ sobre la recta vectorial generada por el vector $\vec{b}$.



$\hat{\vec{y}} = \text{proy}_{<\vec{b}>}\vec{y} = c\,\vec{b}$ es la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre la recta generada por $\vec{b}$, denotada como $<\vec{b}>$.

$\vec{z} = \vec{y} - \ c\vec{b}$ es la componente de $\vec{y}$ ortogonal al vector $\vec{b}$ y a la recta $<\vec{b}>$.

$$(\vec{y} - c\vec{b})\ .\ \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{y}.\vec{b} - c\ \vec{b}.\vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}$$

$$\hat{\vec{y}} = \text{proy}_{<\vec{b}>}\vec{y} = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\ \vec{b}$$

Obsérvese que el vector proyección de $\vec{y}$ sobre $<\vec{b}>$ no depende de como esté escalado $\vec{b}$ (con múltiplos de $\vec{b}$ obtendríamos el mismo vector proyección).

La misma fórmula se aplicaría para la proyección ortogonal de un vector sobre una recta vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 18. Considera en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{y} = (7,6)$ y $\vec{b} = (2,1)$. Encuentra la **proyección ortogonal** de $\vec{y}$ sobre $<\ \vec{b}\ >$ y la distancia de $\vec{y}$ a la recta $<\vec{b}>$. Encuentra el **simétrico** de $\vec{y}$ respecto de $<\vec{b}>$ y comprueba que la norma del vector simétrico es igual a la norma del vector original.

Sol:

$$\text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\ \vec{b}$$

$$\text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} = \frac{(7,6).(2,1)}{(2,1).(2,1)}\ (2,1) = \frac{20}{5}\ (2,1) = 4(2,1) = (8,4)$$

• La distancia de $\vec{y}$ a $<\vec{b}>$ es igual a la norma de $\vec{z} = \vec{y} - proy_{<\vec{b}>}\ \vec{y}$

dist $=\| \vec{y} - \text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} \|$

$\vec{y} - \text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} = (7,6) - (8,4) = (-1,2)$ dist $= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

• $\vec{y}_{\text{sim}} = proy_{<\vec{b}>}\ \vec{y} - \vec{z} = (8,4) - (-1,2) = (9,2)$

También se podría haber calculado como:

$\vec{y}_{\text{sim}} = \vec{y} - 2\vec{z} = (7,6) - (-2,4) = (9,2)$

La norma de $\vec{y} = (7,6)$ es $\sqrt{49+36} = \sqrt{85}$ y la norma de $\vec{y}_{\text{sim}}$ es $\sqrt{81+4} = \sqrt{85}$

3.3 Proyección ortogonal de un vector sobre un plano y simétrico respecto del plano en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 19. Considerados en $\mathbb{R}^3$ el vector $\vec{v} = (5,-1,1)$ y el plano Π de ecuación $x - 2y + z = 0$.

a) Obtén la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre Π.

En primer lugar proyectamos sobre la recta vectorial perpendicular al plano y seguidamente tenemos que la proyeccion sobre el plano es el vector original menos la proyeccion sobre la recta perpendicular al plano.

$\vec{n} = (1,-2,1)$ es el vector ortogonal al plano.

Calcularemos $\text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v}$, y seguidamente $\text{proy}_{\Pi}\vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v}$

$$\text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}{1+4+1}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{8}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_{\Pi}\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-4/3 \\ -1+8/3 \\ 1-4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

b) Obtén el simétrico de $\vec{v}$ respecto de Π.

Es sencillo deducir: $\vec{v}_{\text{sim}} = \text{proy}_{\Pi}\vec{v} - \text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v}$

El simétrico tiene la misma componente en el plano Π que el vector $\vec{v}$, y en la dirección de la recta $<\vec{n}>$ la componente opuesta a la del vector $\vec{v}$.

$$\vec{v}_{\text{sim}} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 13/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}$$

También podríamos haber utilizado esta expresión para el simétrico:

$\vec{v}_{\text{sim}} = \vec{v} - 2\,\text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v} = (5,-1,1) - 2(4/3,-8/3,4/3) = (5,-1,1) + (-8/3,16/3,-8/3) = (7/3,13/3,-5/3)$

c) Obtén la distancia de $\vec{v}$ a Π.

La distancia a Π es la norma de $\text{proy}_{<\vec{n}>}\vec{v} = 4/3(1,-2,1)$.

$\text{dist} = 4/3\sqrt{1+4+1} = 4/3\ \sqrt{6}$

d) Obtén la norma del simétrico de $\vec{v}$.

La norma de $\vec{v}_{\text{sim}} = 1/3\ (7, 13, -5)$ es: $\qquad 1/3\sqrt{49+169+25} = 1/3\ \sqrt{243}$

Es obviamente igual a la norma de $\vec{v}$, que es $\sqrt{27}$

e) Obtén el coseno del ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con su proyección sobre Π.

Razona si el ángulo es agudo u obtuso.

$$cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \text{proy}_{\Pi}\vec{v}}{\parallel \vec{v} \parallel \parallel \text{proy}_{\Pi}\vec{v} \parallel}$$

Los vectores son $(5, -1, 1)$ y $1/3(11, 5, -1)$

El ángulo que forman estos dos vectores es el mismo que el que forman $(5, -1, 1)$ y $(11, 5, -1)$, por tanto:

$$cos\theta = \frac{(5,-1,1)\cdot(11,5,-1)}{\sqrt{27}\sqrt{121+25+1}} = \frac{55-5-1}{\sqrt{27}\sqrt{147}} = \frac{49}{\sqrt{27}\sqrt{147}}$$

Es agudo porque el producto escalar es positivo.

---

4 Producto vectorial

El producto vectorial, también denominado producto cruz, solo está definido en $\mathbb{R}^3$. Es una operación interna entre dos elementos y cerrada, puesto que el resultado también es elemento de $\mathbb{R}^3$.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ se define como el vector siguiente:

$$\vec{u} \times \vec{v} \ = \ \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{6}]$$

Existe una forma sencilla de calcular el producto vectorial utilizando el siguiente determinante.[1]

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Sin más que aplicar la regla de Sarrus para los determinantes de orden 3, obtenemos:
$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$
Podemos observar que las componentes coinciden con las de la definición.

Vemos a continuación una serie de propiedades que cumple el producto vectorial, y de ahí el interés en su definición.

[1]en realidad no es un determinante pues los elementos de la primera fila no son escalares, pero el procedimiento ayuda a recordar cómo calcular el producto cruz

- El vector $\vec{z} = \vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

  Demostramos la ortogonalidad a $\vec{u}$:

  $(u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3 = 0$

  desarrollando la expresión se obtienen 6 sumandos, opuestos dos a dos.

  La demostración de la ortogonalidad a $\vec{v}$ es similar.

- El sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ es el del avance de un tornillo dextrógiro que gira del primer al segundo vector por el camino más corto.

  Se comprueba fácilmente que efectivamente:

  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\qquad$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\qquad$ $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

  $\vec{i}\times\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$ $\qquad$ $\vec{j}\times\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}$ $\qquad$ $\vec{k}\times\vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}$

- El producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

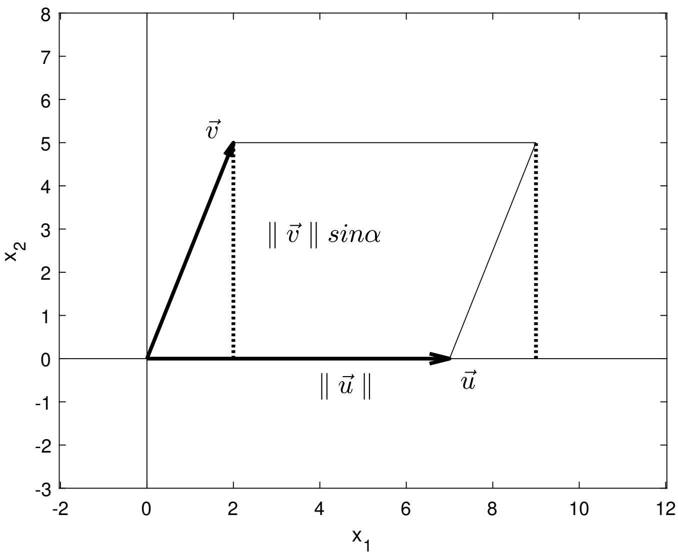
  Efectuar la operación en orden inverso equivale a intercambiar dos filas en el determinante, lo que cambia su signo. También es obvio que el camino más corto del giro de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tiene sentido inverso al camino más corto de $\vec{v}$ a $\vec{u}$.

- Considerados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ninguno de ellos el vector $\vec{0}$, se tiene:

  $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \operatorname{sen}\alpha$, siendo α el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

  El requisito de que ningún vector sea $\vec{0}$ es debido a que solo hemos definido ángulo entre vectores distintos de $\vec{0}$.

  La norma del producto vectorial tiene una interesante interpretación geométrica pues es el área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Ver el esquema en la siguiente figura.

  Obviamente, un medio de la norma es el área del triángulo cuyos vértices son el origen, el extremo de $\vec{u}$, y el extremo de $\vec{v}$.

- El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector $\vec{0}$ si y solo si los dos vectores son l.d..

5 Ejercicios

EJERCICIO 1. Para el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 3)$ y $C = (-3, 7)$, obtén:
a) Los ángulos interiores en A, B y C. b) El perímetro.
c) El área. d) El centro geométrico, centroide o baricentro.
e) El cuarto vértice del paralelogramo de vértices consecutivos CAB

Bisectrices en E_2

EJERCICIO 2. MATLAB. Considera en E_2 el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 4)$ y $C = (-8, 5)$.
a) Determina un **vector bisector** $\vec{v}$ en A, o vector que divida el ángulo interior en A en dos partes iguales.
b) Obtén vectores bisectores $\vec{v_1}$ entre $\vec{AB}$ y $\vec{v}$ y $\vec{v_3}$ entre $\vec{v}$ y $\vec{AC}$.
c) Comprueba que los cuatro ángulos formados en A son iguales y escribe su valor.

EJERCICIO 3. (HVZ12. Ejemplo I. páginas 325-326)
a) Halla la ecuación vectorial paramétrica de la bisectriz interior de las rectas:
$r_1 : x - y = -1$
$r_2 : 2x + y = 4$
b) Halla la ecuación vectorial paramétrica de la bisectriz exterior.

Puntos de proyección ortogonal en rectas y planos afines

EJERCICIO 4. (HVZ12. Ejemplo F. página 322). En E_3 obtén el punto P' correspondiente a la proyección de $P = (1, 2)$ sobre la recta r de ecuación $-2x + 3y = -6$.

EJERCICIO 5. (HVZ12. Ejemplo G. página 322). En E_3 obtén el punto P' correspondiente a la proyección de $P = (1, 2, 3)$ sobre $x + y - 2z = 3$.

6 Aplicación de los determinantes para el cálculo de áreas y volúmenes

1) El área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores que lo determinan.

Tomando en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el área del paralelogramo que definen es:

$$\text{Area} = |\ |\ \vec{u}\ \vec{v}\ |\ | = |\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\ |$$

Las barras interiores corresponden al determinante y las exteriores al valor absoluto.

Los vectores se toman con su origen en O, por tanto:

$\vec{u} = \vec{OU}$, siendo U el extremo del vector $\vec{u}$.

$\vec{v} = \vec{OV}$, siendo V el extremo del vector $\vec{v}$.

Este paralelogramo tiene vértices consecutivos U, O, V.

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes fueran B y C, usaríamos:

$\vec{u} = \vec{AB}$ $\qquad$ $\vec{v} = \vec{AC}$

2) El volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores que lo determinan.

Tomando en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el volumen del paralelepípedo que definen es:

$$\text{Volumen} = |\ |\ \vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}\ |\ | = |\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}\ |$$

Las barras interiores corresponden al determinante y las exteriores al valor absoluto.

Los vectores se toman con su origen en O, por tanto:

$\vec{u} = \vec{OU}$, siendo U el extremo del vector $\vec{u}$.

$\vec{v} = \vec{OV}$, siendo V el extremo del vector $\vec{v}$.

$\vec{w} = \vec{OW}$, siendo W el extremo del vector $\vec{w}$.

El vértice principal es O y U, V y W son los vértices adyacentes.

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes fueran B, C y D usaríamos:

$\vec{u} = \vec{AB}$ $\qquad$ $\vec{v} = \vec{AC}$ $\qquad$ $\vec{w} = \vec{AD}$

Teniendo en cuenta que $|A| = |A^t|$, también podríamos haber colocado los vectores en filas.

$$\text{Área del paralelogramo} = |\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\ |$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = |\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\ |$$

EJERCICIO 6.
a) Considerado el paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ con vértices consecutivos $A = (-2, -2)$, $B = (0, 3)$, $C = (4, -1)$, calcula su área.

Presentamos su solución en MATLAB

```
A=[-2 -2]'; B=[0 3]'; C=[4 -1]';   % Vertices escritos como matrices columna
abs  (det([A-B C-B]))              % Valor absoluto del determinante
ans
28
```

La solución es 28 unidades al cuadrado.

b) Considerado el paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ con un vértice en $A = (1, 1, 1)$ y vértices adyacentes en $B = (3, 3, 6)$, $C = (5, 7, 3)$ y $D = (4, -10, 9)$, calcula su volumen.

```
A=[1 1 1]' ;
B=[3 3 6]' ;
C=[5 7 3]' ;
D=[4 -10 9]' ;
abs(det([B-A C-A D-A]))
ans
222
```

El volumen tiene 222 unidades al cubo.

EJERCICIO 7. (HVZ12. Ejemplo B. página 341). Calcula el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación 2x+y+3z=6 con los ejes coordenados.
Realiza el boceto, señalando los vértices.

EJERCICIO 8. (HVZ12. Ejemplo D. página 346). Halla el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (0, 1, 2))$, $\vec{c} = (1, -2, -1)$.