4. Aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$

$$\text{Aplicación lineal } f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{y} = A\vec{x} \end{array}$$

- **Trabajando en base estándar**

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) \quad \overset{\text{A.L.}}{\Rightarrow} \quad \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}) + x_2 f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}) + \ldots + x_n f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; f(\vec{e}_n)\,]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} \qquad \boxed{A = [\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; f(\vec{e}_n)\,] \qquad A\,\vec{x} = \vec{y}}$$

$\vec{x}$ está en coordenadas estándar
$\vec{y}$ está en coordenadas estándar
A es la matriz estándar de f

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$$

- **Trabajando en base B**

  $\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \ldots + c_n \vec{b}_n$

  $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \ldots + c_n \vec{b}_n) \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \ldots + c_n f(\vec{b}_n)$ Premultiplicando los dos miembros por P_B^{-1}, cambiamos $\vec{y}$ y los $f(\vec{b}_i)$ de coordenadas estándar a coordenadas relativas a la base B.

  $\Rightarrow [\vec{y}]_B = c_1 [f(\vec{b}_1)]_B + c_2 [f(\vec{b}_2)]_B + \ldots + c_n [f(\vec{b}_n)]_B$

  $$\underset{[\vec{y}]_B}{\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix}} = \underbrace{[\, [f(\vec{b}_1)]_B \ [f(\vec{b}_2)]_B \ \ldots \ [f(\vec{b}_n)]_B \,]}_{F} \underset{[\vec{x}]_B}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}$$

  $$\boxed{\begin{array}{c} F = [\ [f(\vec{b}_1)]_B \ [f(\vec{b}_2)]_B \ \ldots \ [f(\vec{b}_n)]_B \ ] \\ F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \end{array}}$$

  Tomamos del vector de partida sus coordenadas relativas a la base B: $[\vec{x}]_B$
  La transformación produce las coordenadas de la imagen relativas a la base B: $[\vec{y}]_B$
  F es la matriz de f relativa a la base B, es decir, a coordenadas del original y transformado, relativas a base B.

  $$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \ldots + c_n \vec{b}_n$$
  $$\vec{y} = c'_1 \vec{b}_1 + c'_2 \vec{b}_2 + \ldots + c'_n \vec{b}_n$$

- **Relaciones entre A y F, dada base B**
  - $A = PFP^{-1}$, siendo $P = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \ldots \ \vec{b}_n]$
  - A y F tienen el mismo determinante. Deducción obvia desde el resultado anterior.
  - A y F tienen la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal).
  - A y F tienen el mismo rango.

  Las matrices cuadradas asociadas a la misma aplicación lineal se dice que son **semejantes**. Se dice de la traza y el determinante que son "invariantes" de las matrices semejantes.

- **Justificación de $A = P\,F\,P^{-1}$:**

  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\} \qquad P = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\ ] \qquad \vec{x} = P\,[\vec{x}]_B \qquad \vec{y} = P\,[\vec{y}]_B$

  La ec. $F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ la podemos reescribir como: $F\,P^{-1}\,\vec{x} = P^{-1}\,\vec{y}$

  Premultiplicando por la izda. por P: $P\,F\,P^{-1}\,\vec{x} = \vec{y}$

  Por otra parte, $A\vec{x} = \vec{y}$, por lo que igualando las dos últimas ecuaciones: $\boxed{A = P\,F\,P^{-1}}$

Justificación gráfica para interpretar $A = P\,F\,P^{-1}$ como composición de aplicaciones lineales:

Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a f y a los cambios de base.

$$f:\quad \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed] & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$A = P\ F\ P^{-1}$$

$$f:\quad \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed] \arrow[r, bend left=80, "F"] & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$F = P^{-1}\ A\ P$$

En el esquema de la izquierda podemos ver A como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha F como composición de tres aplicaciones lineales.
Fijándonos en la izquierda vemos que A se puede entender como la composición de tres pasos:
1) pasar de $\vec{x}$ a $[\vec{x}]_B$, con P^{-1}.
2) aplicar la función en base B, con la matriz F
3) pasar el resultado a base estándar, con P.
$A = P\,F\,P^{-1}$

- **Im** f El subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las imágenes.

  $\text{Im}f = \{f(\vec{x}) \ / \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_2 f(\vec{e}_1) \ / \ x_i \in \mathbb{R}\}$
  Por comodidad trabajamos con la base canónica.

  Cada vector de Imf es una combinación lineal de los $f(\vec{e_i})$. Los $\vec{x}$ de salida dan los coeficientes que se usan en la imagen. Ya que Imf es el conjunto de las imágenes de <u>todos los $\vec{x}$</u>, tendremos en Imf <u>todas las combinaciones lineales posibles</u> de los $f(\vec{e_i})$.

  $\text{Im}f = < f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n) > = \text{Col}A.$

  La base de $\text{Im}f$ se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto $\{ f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2), \ldots,\ f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, <u>quedándonos</u> con los vectores correspondientes a las columnas pivotales de A.

  dim Imf = el número de estos vectores que son l.i. = rg$A$.

- **Núcleo de una aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ Se denota $\text{Ker}f$ y es el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^n$:

  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}.$

  Teniendo en cuenta que $f(\vec{x} = A\vec{x}$, Ker $f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul}A$

- **Dimensiones de Im**f **y Ker**f
  Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, con matriz asociada A. Teniendo en cuenta que Imf=Col$A$ y que Ker$f$=Nul$A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

$$\boxed{\textbf{dim } \mathbb{R}^n = \textbf{dim Ker}f + \textbf{dim Im}f}$$

$$\boxed{n = \textbf{dim Nul}A + \textbf{dim Col}A = \textbf{dim Nul}A + \textbf{rg } A}$$

  Recordamos que el resultado muestra simplemente que el número de columnas de A es igual al nº de no pivotales, que es igual al nº de parámetros libres y dimensión del núcleo, más el nº de pivotales, que es igual al rg$A$ y dimensión de la imagen.

Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla: Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En $\mathbb{R}^2$ giro de ángulo α alrededor del origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$ con orientación positiva (determinante positivo de la matriz que tiene por columnas los vectores base).
  Por tanto también en la base estándar, ya que es base ortonormal y de orientación positiva.

  $0 < \alpha < \pi$ o $-\pi < \alpha < 0$

  α positivo o sentido positivo, giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj (negativo, sentido de las agujas del reloj).

  Giro de ángulo $0 =$ Matriz I. Esta misma matriz para cualquier base.

  Giro de ángulo $\pi =$ Simetría respecto del origen. Matriz $-I$. Esta misma matriz para cualquier base.

- En $\mathbb{R}^2$ simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^2$ proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^2$ contracción de factor k o dilatación de factor k

  Esta transformación tiene la matriz asociada $k\,I$ respecto de cualquier base. También se denomina escalamiento uniforme.

  Contracción: $0 < k < 1$
  Dilatación: $k > 1$

  Para $k = 1$ la matriz asociada es I.

- En $\mathbb{R}^2$ escalamiento anísotropo o no uniforme en dos direcciones l.i.

  Escalamientos de factores k_1 y k_2, con $k_i > 0$ y $k_1 \neq k_2$.

  Esta transformación tiene la matriz asociada $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores base de las direcciones de escalamiento k_1 y k_2 respectivamente.

• Para pasar de la matriz relativa a la base natural $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ de la transformación, a la matriz estándar, si no son la misma, se debe aplicar:

$$\boxed{A = P\,F\,P^{-1}},$$

siendo F la matriz del endomorfismo referida a la base natural B y $P = [\,\vec{a}\,\vec{b}\,]$.

• Deben comprobarse los tres invariantes: traza, rango y determinante. En $\mathbb{R}^2$ son cálculos sencillos.

- <u>En $\mathbb{R}^3$ giro de ángulo α alrededor del eje dirigido según el vector $\vec{n}$</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}\}$.

  Cambiando $\vec{n}$ por un vector múltiplo positivo del mismo, la matriz asociada sería la misma.

  Para α positivo se produce el giro de acuerdo con el criterio de la mano derecha, con el pulgar apuntando según $\vec{n}$, y los demás dedos en el sentido del giro.

- <u>En $\mathbb{R}^3$ simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- <u>En $\mathbb{R}^3$ proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- Otras dos transformaciones lineales sencillas son el escalamiento uniforme y el escalamiento no uniforme, en ambos casos sobre tres direcciones linealmente independientes.

  En el segundo caso $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada relativa a la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, que da las direcciones de los tres escalamientos, en el mismo orden.

  Si el escalamiento es uniforme, de factor k, la matriz asociada es $k\, I$ independientemente de la base utilizada.

De nuevo, la transformación de la matriz F relativa a la base natural a la matriz estándar A se realizará mediante la fórmula, $A = P\,F\,P^{-1}$. Una vez obtenida pueden comprobarse los invariantes. Obviamente la comprobación más sencilla es la de la traza.

4.1. Dada la aplicación lineal con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

a) Obtén una base de Imf.
b) Obtén una base de Ker$f$.
c) Razona si la aplicación lineal es o no sobreyectiva.
d) Obtén la imagen de $(2, 7, 0)$.
e) Determina el/los antecedentes de $(6, 9, a)$ en función de a.

4.2. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$(1, 0, 0) \longmapsto (1, 1, 1) \qquad (0, 1, 0) \longmapsto (2, 0, -3) \qquad (0, 0, 1) \longmapsto (0, 0, 4)$

a) Halla la matriz estándar asociada a f.
b) Halla la imagen de $\vec{a} = (2, -3, 5)$
c) Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2, -5, 4)$

4.3. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 2)$. Determina una base de Ker$f$ en función del parámetro c.

4.4 Dada la aplicación lineal f con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determina

a) Una base y la dimensión de Imf.
b) Una base y la dimensión de Ker$f$.

4.5 Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:

* simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

* proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

Considerada la figura con los vértices P, Q, R y S dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simetrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = (\quad , \quad)$	$P' = (\quad , \quad)$
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

4.6 Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano $x + y + z = 0$.

a) Determina una base B respecto de la cual la matriz asociada a f sea lo más sencilla posible. Escribe también dicha matriz.

b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

4.7 Resuelve el ejercicio anterior tomando f correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano $x + y + z = 0$.

4.8 La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ produce un **estiramiento** en la dirección x. Representa la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y esboza a su alrededor los puntos (x, y) que resultan de multiplicar por A. ¿Cual es la forma de la figura?.

G. Strang. Linear Algebra and its Applications. Edición 4. Wellesley Cambridge Press. 2009. Pg. 149. Ejercicio 3.

4.9 Dada la aplicación lineal f en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtén la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1, -1, 0), (-2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9. Pearson 2015. Pr. 212. Ejemplo 2.

4.10 a) En $\mathbb{R}^3$, obtén la matriz estándar A correspondiente al giro de 90 grados en sentido positivo respecto del eje dirigido según el vector $(0, 0, 1)$. b) Obtén la matriz estándar de la siguiente composición de transformaciones: en primer lugar el giro anterior, y a continuación dilatación de factor 4 según el eje Z.

4.11 a) En $\mathbb{R}^2$, interpreta geométricamente, cualitativa y cuantitativamente, la transformación lineal con la matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Apéndice: Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$

Una matriz A cuadrada de orden 2 se dice ortogonal si sus columnas son base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, es decir, base de $\mathbb{R}^2$ con vectores ortogonales entre sí y unitarios (producto escalar cero y norma uno). Las aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz estándar es una matriz ortogonal se denominan **transformaciones ortogonales**. En $\mathbb{R}^2$ una aplicación es ortogonal si y solo si es de alguno de estos dos tipos:

- Giro alrededor del origen
- Simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen.

Se reconoce si la transformación ortogonal es del primer tipo o del segundo, porque en el primer caso el determinante de A es positivo (la transformación se dice 'directa') y en el segundo es negativo (la transformación se dice 'inversa').

Las transformaciones ortogonales son las únicas transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ que producen los llamados "movimientos rígidos", que conservan longitudes, ángulos y formas de los objetos.

La tabla presenta la clasificación de las transformationes ortogonales en $\mathbb{R}^2$ con matriz estándar A, junto con sus carácterísticas. La columna de la derecha se explica en el tema de 'Autovalores, autovectores y diagonalización'.

	Clasificación	**Tipo / Determinante / Traza**	**Autovalores**
I	Rotación respecto al origen	Directa / 1 / $2\cos\alpha$	no reales
Ia	Rotación de ángulo 0 = Identidad	Directa / 1 / 2	$1, 1$
Ib	Rotación de ángulo π = Simetría respecto al origen	Directa / 1 / -2	$-1, -1$
II	Simetría respecto de recta $S = < \vec{a} >$	Inversa / -1 / 0	$1, -1$

La composición de transformaciones ortogonales es transformación ortogonal, por lo que la transformación resultante corresponderá a uno de los cuatro casos anteriores.

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes, por tanto:

- La composición de dos rotaciones es una rotación (sumándose los ángulos).
- La composición de dos simetrías es una rotación (si la simetría es la misma la composición es la identidad, que corresponde a la rotación de ángulo 0).
- La composición de simetría y rotación es una simetría.

Resultado y/o solución de algunos ejercicios

- Ejercicio 4.2

  a) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}}$

  b) $f(\vec{a}) = (-4, 2, 31)$

  c) $\vec{b}$ tiene un único antecedente, que es el vector $(-5, 7/2, 39/8)$

- Ejercicio 4.3

  Si $c \neq -7/3$ el único vector $\vec{x}$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{0}$ es el propio vector $\vec{0}$. $\mathrm{Ker}f = \{\vec{0}\}$.

  $\boxed{\text{Ker}f \text{ es el subespacio cero, y por tanto no tiene base.}}$

  Si $c = -7/3$ hay infinitos vectores $\vec{x}$ cuya imagen es el vector $\vec{0}$.

  $\boxed{\text{Una posible base de Ker}f \text{ es } B = \{(2/3, -2/3, 1)\}}$

- Ejercicio 4.5

  simetría ortogonal: $A = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix}$ proyección ortogonal: $A = \begin{bmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$

  <u>Presentación del método de obtención de A para la simetría</u>

  Se pide calcular la matriz estándar de la aplicación lineal, es decir A tal que $A\vec{x} = \vec{y}$

  1) Resolviendo la ec. de la recta $y = \frac{x}{3}$ obtenemos un vector sencillo de la misma, que es $\vec{a} = (3, 1)$.

  Dado un vector de $\mathbb{R}^2$ $(v1, v2)$, se tiene que uno ortogonal a él y sencillo de obtener es $(-v2, v1)$. Es fácil comprobar como su producto escalar es cero.

  Considerando la base $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a} = (3, 1)$ vector de la recta o eje de simetría y $\vec{b} = (-1, 3)$ un vector ortogonal a $\vec{a}$, la matriz de la simetría relativa a esa base es $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

  2) Para pasar de la matriz referida a la base B a la matriz estándar se utiliza la fórmula $A = PSP^{-1}$

  Mediante los cálculos pertinentes obtenemos $P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

  $$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

  3) Seguidamente comprobamos los tres invariantes, que son traza, determinante y rango.

  traza(S)=0 traza(A)=$\frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0$

  $|S| = -1$ $|A| = \frac{1}{5}^2 * (-16 - 9) = \frac{-25}{25} = -1$

  Por ser los dos determinantes distintos de cero, tenemos que el rango en los dos casos es 2.

4) Comprobación del punto de partida, es decir, de que $f(3, 1) = (3, 1)$ y de que $f(-1, 3) = (1, -3)$. Expresado matricialmente:

$A\,[\,\vec{a}\ \vec{b}\,] = [\,\vec{a}\ \ -\vec{b}\,]$

$$1/5\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 3\end{bmatrix} = 1/5\begin{bmatrix}15 & 5\\5 & -15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}$$

Otro procedimiento de obtención de A para la simetría

Este procedimiento se basa en la ecuación que acabamos de escribir, $A\,[\,\vec{a}\ \vec{b}\,] = [\,\vec{a}\ \ -\vec{b}\,]$, y que constituye, tanto antes como ahora, el punto de partida para resolver el problema.

Podemos reescribir la ec. como $AP = M$, llamando M a la matriz de la derecha.

Puesto que P es invertible, por tratarse de una base de $\mathbb{R}^2$, podemos calcular A sin más que despejarla en la ecuación.

$$A = MP^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}8 & 6\\6 & -8\end{bmatrix} = 1/5\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & -4\end{bmatrix}$$

Obtención de A para la proyección

El método es el mismo, cambiando S por $Pr = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, que es la matriz de proyección respecto de la base B.

Con respecto al segundo método se efectúa $A\,[\,\vec{a}\ \vec{b}\,] = [\,\vec{a}\ \ \vec{0}\,]$, por tanto:
$A = MP^{-1}$, con $M = \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$

- Ejercicios 4.6 y 4.7
  - Proyección ortogonal:
    a) Una base respecto de la cual la matriz es lo más sencilla posible: $B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$

    La matriz de la transformación respecto de esa base: $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

    b) Matriz estándar: $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
  - Simetría
    a) Una base respecto de la cual la matriz es lo más sencilla posible: $B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$

    La matriz de la transformación respecto de esa base: $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

    b) Matriz estándar: $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$