

Resultado y/o solución de algunos ejercicios

- Ejercicio 4.2

a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

b) $f(\vec{a}) = (-4, 2, 31)$

c) \vec{b} tiene un único antecedente, que es el vector $(-5, 7/2, 39/8)$

- Ejercicio 4.3

Si $c \neq -7/3$ el único vector \vec{x} tal que $f(\vec{x}) = \vec{0}$ es el propio vector $\vec{0}$. $\text{Kerf} = \{\vec{0}\}$.

Kerf es el subespacio cero, y por tanto no tiene base.

Si $c = -7/3$ hay infinitos vectores \vec{x} cuya imagen es el vector $\vec{0}$.

Una posible base de Kerf es $B = \{(2/3, -2/3, 1)\}$

• Ejercicio 4.5

$$\text{simetría ortogonal: } A = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \quad \text{proyección ortogonal: } A = \begin{bmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

Presentación del método de obtención de A para la simetría

Se pide calcular la matriz estándar de la aplicación lineal, es decir A tal que $A\vec{x} = \vec{y}$

1) Resolviendo la ec. de la recta $y = \frac{x}{3}$ obtenemos un vector sencillo de la misma, que es $\vec{a} = (3, 1)$.

Dado un vector de \mathbb{R}^2 (v_1, v_2), se tiene que uno ortogonal a él y sencillo de obtener es $(-v_2, v_1)$. Es fácil comprobar como su producto escalar es cero.

Considerando la base $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a} = (3, 1)$ vector de la recta o eje de simetría y $\vec{b} = (-1, 3)$ un vector ortogonal a \vec{a} , la matriz de la simetría relativa a esa base es $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2) Para pasar de la matriz referida a la base B a la matriz estándar se utiliza la fórmula $A = PSP^{-1}$

Mediante los cálculos pertinentes obtenemos $P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

3) Seguidamente comprobamos los tres invariantes, que son traza, determinante y rango.

$$\text{traza}(S)=0 \quad \text{traza}(A)=\frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0$$

$$|S| = -1 \quad |A| = \frac{1}{5}^2 * (-16 - 9) = \frac{-25}{25} = -1$$

Por ser los dos determinantes distintos de cero, tenemos que el rango en los dos casos es 2.

4) Comprobación del punto de partida, es decir, de que $f(3, 1) = (3, 1)$ y de que $f(-1, 3) = (1, -3)$. Expresado matricialmente:

$$A[\vec{a} \ \vec{b}] = [\vec{a} \ -\vec{b}]$$

$$1/5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Otro procedimiento de obtención de A para la simetría

Este procedimiento se basa en la ecuación que acabamos de escribir, $A[\vec{a} \ \vec{b}] = [\vec{a} \ -\vec{b}]$, y que constituye, tanto antes como ahora, el punto de partida para resolver el problema.

Podemos reescribir la ec. como $AP = M$, llamando M a la matriz de la derecha.

Puesto que P es invertible, por tratarse de una base de \mathbb{R}^2 , podemos calcular A sin más que despejarla en la ecuación.

$$A = MP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Obtención de A para la proyección

El método es el mismo, cambiando S por $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que es la matriz de proyección respecto de la base B .

Con respecto al segundo método se efectúa $A[\vec{a} \ \vec{b}] = [\vec{a} \ \vec{0}]$, por tanto:

$$A = MP^{-1}, \text{ con } M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ejercicios 4.6 y 4.7

- Proyección ortogonal:

a) Una base respecto de la cual la matriz es lo más sencilla posible: $B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$

La matriz de la transformación respecto de esa base: $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Matriz estándar: $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

- Simetría

a) Una base respecto de la cual la matriz es lo más sencilla posible: $B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$

La matriz de la transformación respecto de esa base: $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Matriz estándar: $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$