Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla: Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- <u>En $\mathbb{R}^2$ giro de ángulo α alrededor del origen</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$ con orientación positiva (determinante positivo de la matriz que tiene por columnas los vectores base).
  Por tanto también en la base estándar, ya que es base ortonormal y de orientación positiva.

  $0 < \alpha < \pi$ o $-\pi < \alpha < 0$

  α positivo o sentido positivo, giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj (negativo, sentido de las agujas del reloj).

  Giro de ángulo $0 =$ Matriz I. Esta misma matriz para cualquier base.

  Giro de ángulo $\pi =$ Simetría respecto del origen. Matriz $-I$. Esta misma matriz para cualquier base.

- <u>En $\mathbb{R}^2$ simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- <u>En $\mathbb{R}^2$ proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- <u>En $\mathbb{R}^2$ contracción de factor k o dilatación de factor k</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $k\,I$ respecto de cualquier base. También se denomina escalamiento uniforme.

  Contracción: $0 < k < 1$
  Dilatación: $k > 1$

  Para $k = 1$ la matriz asociada es I.

- En $\mathbb{R}^2$ escalamiento anísotropo o no uniforme en dos direcciones l.i.

  Escalamientos de factores k_1 y k_2, con $k_i > 0$ y $k_1 \neq k_2$.
  Esta transformación tiene la matriz asociada $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores base de las direcciones de escalamiento k_1 y k_2 respectivamente.

• Para pasar de la matriz relativa a la base natural $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ de la transformación, a la matriz estándar, si no son la misma, se debe aplicar:

$$\boxed{A = P\,F\,P^{-1}},$$

siendo F la matriz del endomorfismo referida a la base natural B y $P = [\,\vec{a}\,\vec{b}\,]$.

• Deben comprobarse los tres invariantes: traza, rango y determinante. En $\mathbb{R}^2$ son cálculos sencillos.

Endomorfismos en $\mathbb{R}^3$ con interpretación geométrica sencilla: Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En $\mathbb{R}^3$ giro de ángulo α alrededor del eje dirigido según el vector $\vec{n}$

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}\}$.

  Cambiando $\vec{n}$ por un vector múltiplo positivo del mismo, la matriz asociada sería la misma.

  Para α positivo se produce el giro de acuerdo con el criterio de la mano derecha, con el pulgar apuntando según $\vec{n}$, y los demás dedos en el sentido del giro.

- En $\mathbb{R}^3$ simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- En $\mathbb{R}^3$ proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- Otras dos transformaciones lineales sencillas son el escalamiento uniforme y el escalamiento no uniforme, en ambos casos sobre tres direcciones linealmente independientes.

  En el segundo caso $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada relativa a la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, que da las direcciones de los tres escalamientos, en el mismo orden.

  Si el escalamiento es uniforme, de factor k, la matriz asociada es $k\, I$ independientemente de la base utilizada.

De nuevo, la transformación de la matriz F relativa a la base natural a la matriz estándar A se realizará mediante la fórmula, $A = P\, F\, P^{-1}$. Una vez obtenida pueden comprobarse los invariantes. Obviamente la comprobación más sencilla es la de la traza.