4. Aplicaciones lineales f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$

Aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$
$\vec{x} \longmapsto \vec{y} = A\vec{x}$

- **Trabajando en base estándar**

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) \quad \overset{\text{A.L.}}{\Rightarrow} \quad \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) + x_2 f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) + \ldots + x_n f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; f(\vec{e}_n) \,]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} \qquad \boxed{A = [\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; f(\vec{e}_n) \,] \qquad A\,\vec{x} = \vec{y}}$$

$\vec{x}$ está en coordenadas estándar
$\vec{y}$ está en coordenadas estándar
A es la matriz estándar de f

- **Trabajando en base** B

$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n$

$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n) \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \ldots + c_n f(\vec{b}_n)$ Premultiplicando los dos miembros por P_B^{-1}, cambiamos $\vec{y}$ y los $f(\vec{b}_i)$ de coordenadas estándar a coordenadas relativas a la base B.

$\Rightarrow [\vec{y}]_B = c_1\, [f(\vec{b}_1)]_B + c_2\, [f(\vec{b}_2)]_B + \ldots + c_n\, [f(\vec{b}_n)]_B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix}}_{[\vec{y}]_B = [f(\vec{x})]_B} = \underbrace{\left[\, [f(\vec{b}_1)]_B \;\; [f(\vec{b}_2)]_B \;\; \ldots \;\; [f(\vec{b}_n)]_B \,\right]}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{[\vec{x}]_B}$$

$$\boxed{\begin{gathered} F = [\; [f(\vec{b}_1)]_B \;\; [f(\vec{b}_2)]_B \;\; \ldots \;\; [f(\vec{b}_n)]_B \;] \\ F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \end{gathered}}$$

Tomamos del vector de partida sus coordenadas relativas a la base B: $[\vec{x}]_B$
La transformación produce las coordenadas de la imagen relativas a la base B: $[\vec{y}]_B$
F es la matriz de f relativa a la base B, es decir, a coordenadas del original y transformado, relativas a base B.

$$\vec{x} = c_1\,\vec{b}_1 + c_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c_n\,\vec{b}_n$$
$$\vec{y} = f(\vec{x}) = c_1'\,\vec{b}_1 + c_2'\,\vec{b}_2 + \ldots + c_n'\,\vec{b}_n$$

- **Relaciones entre** A **y** F**, dada base** B
  - $A = PFP^{-1}$, siendo $P = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n]$
  - A y F tienen el mismo determinante. Deducción obvia desde el resultado anterior.
  - A y F tienen la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal).
  - A y F tienen el mismo rango.

Las matrices cuadradas asociadas a la misma aplicación lineal se dice que son **semejantes**. Se dice de la traza y el determinante que son "invariantes" de las matrices semejantes.

- **Justificación de $A = P\,F\,P^{-1}$:**

  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \qquad P = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_n\ ] \qquad \vec{x} = P\,[\vec{x}]_B \qquad \vec{y} = P\,[\vec{y}]_B$

  La ec. $F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ la podemos reescribir como: $F\,P^{-1}\,\vec{x} = P^{-1}\,\vec{y}$

  Premultiplicando por la izda. por P: $P\,F\,P^{-1}\,\vec{x} = \vec{y}$

  Por otra parte, $A\vec{x} = \vec{y}$, por lo que igualando las dos últimas ecuaciones: $\boxed{A = P\,F\,P^{-1}}$

Justificación gráfica para interpretar $A = P\,F\,P^{-1}$ como composición de aplicaciones lineales:

Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a f y a los cambios de base.

$$
\begin{tikzcd}
f: \quad \mathbb{R}^n \arrow[rr, dashed] & & \mathbb{R}^n \\
\vec{x} \arrow[rr, dashed, "A"'] \arrow[rr, bend right=90, "F"] & & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[rr, dashed] & & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
f: \quad \mathbb{R}^n \arrow[rr, dashed] & & \mathbb{R}^m \\
\vec{x} \arrow[rr, dashed, "A"'] & & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, bend left=90, "F"'] & & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$A = P\,F\,P^{-1} \qquad\qquad\qquad F = P^{-1}\,A\,P$$

En el esquema de la izquierda podemos ver A como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha F como composición de tres aplicaciones lineales.
Fijándonos en la izquierda vemos que A se puede entender como la composición de tres pasos:
1) pasar de $\vec{x}$ a $[\vec{x}]_B$, con P^{-1}.
2) aplicar la función en base B, con la matriz F
3) pasar el resultado a base estándar, con P.
$A = P\,F\,P^{-1}$

- **Im** f El subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las imágenes.

  $\text{Im}f = \{f(\vec{x}) \;/\; \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_2 f(\vec{e}_1) \;/\; x_i \in \mathbb{R}\}$

  Por comodidad trabajamos con la base canónica.

  Cada vector de Imf es una combinación lineal de los $f(\vec{e_i})$. Los $\vec{x}$ de salida dan los coeficientes que se usan en la imagen. Ya que Imf es el conjunto de las imágenes de <u>todos los $\vec{x}$</u>, tendremos en Imf <u>todas las combinaciones lineales posibles</u> de los $f(\vec{e_i})$.

  $\text{Im}f = < f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n) > = \text{Col}A.$

  La base de $\text{Im}f$ se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto $\{\, f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2), \ldots,\ f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, <u>quedándonos</u> con los vectores correspondientes a las columnas pivotales de A.

  dim Imf = el número de estos vectores que son l.i. = rg$A$.

- **Núcleo de una aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ Se denota $\text{Ker}f$ y es el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^n$:

  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;/\; f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

  Teniendo en cuenta que $f(\vec{x} = A\vec{x}$, Ker $f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;/\; f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul}A$

- **Dimensiones de Imf y Ker$f$**
  Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, con matriz asociada A. Teniendo en cuenta que Imf=Col$A$ y que Ker$f$=Nul$A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

  $$\boxed{\textbf{dim } \mathbb{R}^n = \textbf{dim Ker}f + \textbf{dim Im}f}$$

  $$\boxed{n = \textbf{dim Nul}A + \textbf{dim Col}A = \textbf{dim Nul}A + \textbf{rg } A}$$

  Recordamos que el resultado muestra simplemente que el número de columnas de A es igual al nº de no pivotales, que es igual al nº de parámetros libres y dimensión del núcleo, más el nº de pivotales, que es igual al rg$A$ y dimensión de la imagen.