

4. Aplicaciones lineales f de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n

$$\text{Aplicación lineal } f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$$

- Trabajando en base estándar

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) \quad \text{A.L.} \Rightarrow \quad \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + x_2 f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \dots + x_n f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \underbrace{[f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)]}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

\vec{y} \vec{x}

$$A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)] \quad A\vec{x} = \vec{y}$$

\vec{x} está en coordenadas estándar

\vec{y} está en coordenadas estándar

A es la matriz estándar de f

- **Justificación de $A = P F P^{-1}$:**

$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \quad P = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] \quad \vec{x} = P [\vec{x}]_B \quad \vec{y} = P [\vec{y}]_B$$

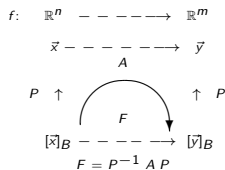
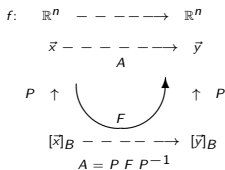
La ec. $F [\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ la podemos reescribir como: $F P^{-1} \vec{x} = P^{-1} \vec{y}$

Premultiplicando por la izda. por P : $P F P^{-1} \vec{x} = \vec{y}$

Por otra parte, $A \vec{x} = \vec{y}$, por lo que igualando las dos últimas ecuaciones: $A = P F P^{-1}$

Justificación gráfica para interpretar $A = P F P^{-1}$ como composición de aplicaciones lineales:

Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a f y a los cambios de base.



En el esquema de la izquierda podemos ver A como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha F como composición de tres aplicaciones lineales.

Fijándonos en la izquierda vemos que A se puede entender como la composición de tres pasos:

- 1) pasar de \vec{x} a $[\vec{x}]_B$, con P^{-1} .
- 2) aplicar la función en base B , con la matriz F
- 3) pasar el resultado a base estándar, con P .

$$A = P F P^{-1}$$

- **Im f** El subespacio de \mathbb{R}^n formado por todas las imágenes.

$$\text{Im } f = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$$

Por comodidad trabajamos con la base canónica.

Cada vector de $\text{Im } f$ es una combinación lineal de los $f(\vec{e}_i)$. Los \vec{x} de salida dan los coeficientes que se usan en la imagen. Ya que $\text{Im } f$ es el conjunto de las imágenes de todos los \vec{x} , tendremos en $\text{Im } f$ todas las combinaciones lineales posibles de los $f(\vec{e}_i)$.

$$\text{Im } f = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle = \text{Col } A.$$

La base de $\text{Im } f$ se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, quedándonos con los vectores correspondientes a las columnas pivotaes de A .

$\dim \text{Im } f$ = el número de estos vectores que son l.i. = $\text{rg } A$.

- **Núcleo de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$** Se denota $\text{Ker } f$ y es el siguiente subespacio de \mathbb{R}^n :

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

$$\text{Teniendo en cuenta que } f(\vec{x}) = A\vec{x}, \quad \text{Ker } f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul } A$$

- **Dimensiones de $\text{Im } f$ y $\text{Ker } f$**

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, con matriz asociada A . Teniendo en cuenta que $\text{Im } f = \text{Col } A$ y que $\text{Ker } f = \text{Nul } A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

$$n = \dim \text{Nul } A + \dim \text{Col } A = \dim \text{Nul } A + \text{rg } A$$

Recordamos que el resultado muestra simplemente que el número de columnas de A es igual al $n^{\mathbf{a}}$ de no pivotaes, que es igual al $n^{\mathbf{a}}$ de parámetros libres y dimensión del núcleo, más el $n^{\mathbf{a}}$ de pivotaes, que es igual al $\text{rg } A$ y dimensión de la imagen.