Apéndice: Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$

Una matriz A cuadrada de orden 2 se dice ortogonal si sus columnas son base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, es decir, base de $\mathbb{R}^2$ con vectores ortogonales entre sí y unitarios (producto escalar cero y norma uno). Las aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz estándar es una matriz ortogonal se denominan **transformaciones ortogonales**. En $\mathbb{R}^2$ una aplicación es ortogonal si y solo si es de alguno de estos dos tipos:

- Giro alrededor del origen
- Simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen.

Se reconoce si la transformación ortogonal es del primer tipo o del segundo, porque en el primer caso el determinante de A es positivo (la transformación se dice 'directa') y en el segundo es negativo (la transformación se dice 'inversa').

Las transformaciones ortogonales son las únicas transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ que producen los llamados "movimientos rígidos", que conservan longitudes, ángulos y formas de los objetos.

La tabla presenta la clasificación de las transformationes ortogonales en $\mathbb{R}^2$ con matriz estándar A, junto con sus carácterísticas. La columna de la derecha se explica en el tema de 'Autovalores, autovectores y diagonalización'.

	Clasificación	**Tipo / Determinante / Traza**	**Autovalores**
I	Rotación respecto al origen	Directa / 1 / $2\cos\alpha$	no reales
Ia	Rotación de ángulo 0 = Identidad	Directa / 1 / 2	$1, 1$
Ib	Rotación de ángulo π = Simetría respecto al origen	Directa / 1 / -2	$-1, -1$
II	Simetría respecto de recta $S = < \vec{a} >$	Inversa / -1 / 0	$1, -1$

La composición de transformaciones ortogonales es transformación ortogonal, por lo que la transformación resultante corresponderá a uno de los cuatro casos anteriores.

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes, por tanto:

- La composición de dos rotaciones es una rotación (sumándose los ángulos).
- La composición de dos simetrías es una rotación (si la simetría es la misma la composición es la identidad, que corresponde a la rotación de ángulo 0).
- La composición de simetría y rotación es una simetría.