Ejerc. 3.9 Cambio de base en $\mathbb{R}^2$.

Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y en él las bases $B = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

1. Obtén la matriz de P de cambio de coordenadas de base B a base B'.
2. Sabiendo que las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, obtén sus coordenadas respecto de la base B'.
3. ¿Cuales son las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$?

Solución:

1

Justificaciones teóricas

$$\begin{array}{l} P_B[\vec{x}]_B = \vec{x} \\ P_{B'}[\vec{x}]_{B'} = \vec{x} \end{array} \quad \Rightarrow \quad P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}[\vec{x}]_{B'} \quad \Rightarrow \quad P_{B'}^{-1} P_B[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$$

Por tanto la matriz de cambio de coordenadas o de cambio de base pedida, que realiza la transformación de $[\vec{x}]_B$ a $[\vec{x}]_{B'}$ es

$$\boxed{P = P_{B'}^{-1} P_B} \qquad [\ \mathrm{I}\ ]$$

Es sencillo darse cuenta de que P no es más que la solución del SL con matriz ampliada múltiple $[\ P_{B'} \mid P_B\ ]$.

Sin más que multiplicar la expresión encuadrada por $P_{B'}$ por la izquierda en los dos miembros obtenemos $P_{B'} P = P_B$, por tanto P es la solución que acabamos de mencionar.

El método [I] requiere calcular la inversa de $P_{B'}$. Es más sencillo hallar P mediante la resolución del sistema $[\ P_{B'} \mid P_B]$ con el método de Gauss-Jordan: $\boxed{[\ P_{B'} \mid P_B] \ \rightarrow \ \dots \ \rightarrow \ [\ I \mid P\ ]}$ $\quad [\ \mathrm{II}\ ]$

Hay por último otra forma de escribir la expresión de la matriz de cambio de base P que es la siguiente:

P tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B, en su orden, respecto de la base B'.

$$P = [\ [\vec{b}_1]_{B'}\ [\vec{b}_2]_{B'}\ \dots\ [\vec{b}_n]_{B'}\ ] \qquad [\ \mathrm{III}\ ]$$

Es sencillo relacionar esta expresión tanto con la ec. [II] como con la ec. [I].

Nótese, con la ec. [I], que <u>P es la composición de dos transformaciones</u>. Primero se aplica P_B para transformar coordenadas en B a coordenadas estándar. Seguidamente se resuelven las coordenadas estándar respecto de la base B' para obtener las coordenadas en B'.

P es obviamente invertible, pues es producto de invertibles. (Producto de matrices de determinante distinto de cero produce matriz de determinante distinto de cero, ya que el determinante del producto es igual al producto de los determinantes).

<u>Transformación inversa:</u> $[\vec{x}]_{B'}$ a $[\vec{x}]_B$.

Denotando con Q la matriz de cambio de coordenadas, $Q[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$. Para este orden resulta: $Q = P_B^{-1} P_{B'}$

Q es obviamente la inversa de P.

$P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$, y multiplicando ambos miembros por P^{-1}:

$[\vec{x}]_B = P^{-1}[\vec{x}]_{B'}$

Obtención de P para el ejercicio

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

La matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base B' es: $\boxed{P = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}}$

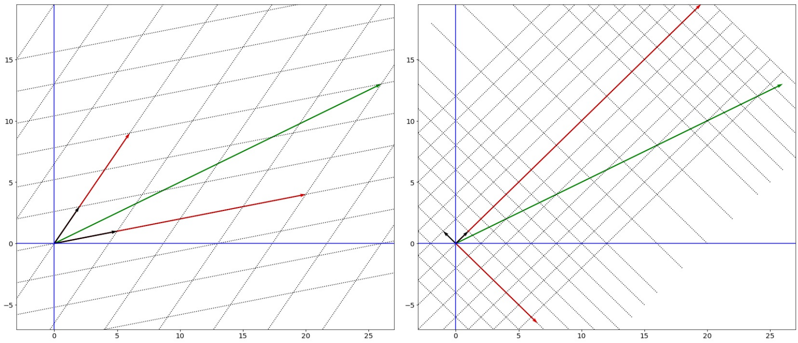
2 $P[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B'}$, por tanto: $[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39/2 \\ -13/2 \end{bmatrix}$ $\boxed{\begin{bmatrix} 39/2 \\ -13/2 \end{bmatrix}}$

3 $P_B[\vec{v}]_B = \vec{v}$, por tanto: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}$ $\boxed{\begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}}$

Conclusiones sobre coordenadas de $\vec{v}$:

- $\vec{v}$ tiene coordenadas (4,3) en base $B = \{(5,1),(3,2)\}$
- $\vec{v}$ tiene coordenadas (39/2,-13/2) en base $B' = \{(1,1),(-1,1)\}$
- $\vec{v}$ tiene coordenadas (26,13) en $B_{\mathrm{can}} = \{(1,0),(0,1)\}$

En la siguiente página, figura izquierda, vemos en negro los vectores de la base B, $(5,1)$ y $(2,3)$. En verde vemos el vector $\vec{v}$, que tiene coordenadas (4,3) en esta base. Se marca en rojo el vector igual a las cuatro unidades del primer vector base, y el vector igual a las tres unidades del segundo vector base.
En la figura derecha vemos en negro los vectores de la base B', $(1,1)$ y $(-1,1)$. El vector $\vec{v}$, en verde, tiene coordenadas $(33/2,-5)$ respecto de esta base. Se marca en rojo el vector igual a 16.5 unidades del primer vector base, y el vector iugal a las -5 unidades del segundo vector base.



Comparación entre las coordenadas del vector $\vec{v} = (26, 13)$ relativas a dos bases distintas. El vector está representado en verde y la base en negro.

Observación: No todo lo obtenido en este ejercicio es aplicable si en vez de trabajar con las bases de un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ trabajamos con las bases de subespacios de $\mathbb{R}^n$ con dimensión estrictamente menor que n. En este caso las matrices P_B y $P_{B'}$ no son invertibles (por no ser cuadradas, ya que las columnas sí son l.i.), y únicamente se pueden utilizar los métodos [II] y [III] para determinar la matriz de cambio de base P. Ésta última matriz sí es invertible siempre.

Ejerc. 3.10

a) Demuestra que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^4$
$B_1 = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 1, 1), \vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$
$B_2 = \{\vec{u}_1 = (1, 2, 0, 0), \vec{u}_2 = (0, 1, 2, -1), \vec{u}_3 = (1, -1, -1, -1), \vec{u}_4 = (0, 1, 1, 1)\}$
b) Encuentra las coordenadas del vector $\vec{x} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ relativas a la base B_2
c) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 a la base B_2.

(Los dos primeros apartados son prácticamente iguales a los del ejercicio 10, pg. 161 de HVZ12)

Ejerc. 3.11 Sean las bases de $\mathbb{R}^3$:
$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ con $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2$ y $\vec{u}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
y $B' = \{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \vec{u'}_3\}$ con $\vec{u'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{u'}_2 = \vec{e}_2$ y $\vec{u'}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$,
siendo los $\vec{e}_i$ los vectores de la base canónica.
a) Justifica que ambos conjuntos son base.
b) Obtén las coordenadas en la base B' del vector $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$
c) Obtén la matriz de cambio de base de B a B'.
d) Obtén las coordenadas de $\vec{x}$ en la base estándar.

(HVZ12 ejemplo A, pg. 158. Cambiando ligeramente el enunciado y ampliándolo).

3.7 Formas paramétrica e implícita de los subespacios de $\mathbb{R}^n$

Todo subespacio H de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de las combinaciones lineales o conjunto generado por sus vectores base.

Se expresa $H = < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k >$, siendo $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ base de H.

Los vectores de H se expresan en forma vectorial paramétrica (o forma explícita) como:

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$, con α_i parámetros libres.

La expresión anterior nos muestra que H es el conjunto de las soluciones $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de un SLH con n incógnitas y k parámetros libres, por tanto con $n - k$ ecuaciones.

Los vectores de H se expresan en forma implícita como las soluciones de un SLH con $m = n - k$ ecuaciones independientes, es decir, como las soluciones de una ec. matricial $A_{m\times n}\vec{x} = \vec{0}$.

k es la dimensión de H.

En el documento Tema3-EV-supl-param-impli.pdf tienes material suplementario de justificaciones teóricas de la obtención de las ecuaciones a partir de la base por dos métodos y ejemplos, tanto de lo anterior como del paso de ecuaciones a base.

Paso de ecuaciones a base: Si un subespacio H de $\mathbb{R}^n$ viene dado en un ejercicio mediante un SLH, la base de H se obtiene resolviendo el SLH.

Paso de base a ecuaciones: (presentamos dos métodos)

- Partiendo de una base $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ las ecuaciones implícitas en las variables $x_1, \ldots, x_n$ pueden obtenerse sin más que imponer que el siguiente sistema lineal sea compatible:
  $[\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ]$, con $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, dejando los x_i como variables.
  En efecto $\vec{x} \in < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k > \Leftrightarrow [\ \vec{v}_1 \ \ldots \ \vec{v}_k \mid \vec{x}\ ]$ es compatible.

  La ecuación que da lugar al SLH buscado es:

  $\mathrm{rg}([\ \vec{v}_1 \ \ldots \ \vec{v}_k\ ]) = \mathrm{rg}([\ \vec{v}_1 \ \ldots \ \vec{v}_k \mid \vec{x}\ ])$, dejando los x_i como variables, o lo que es lo mismo:
  $\mathrm{rg}([\ \vec{v}_1 \ \ldots \ \vec{v}_k \mid \vec{x}\ ]) = k$, dejando los x_i como variables.

- Se obtiene una base de $\mathrm{Nul}(\ [\ \vec{v}_1 \ \ldots \ \vec{v}_k\ ]^t\ )$. Esos vectores base puestos como filas forman una matriz A que es matriz de coeficientes de las ecs. implícitas.

Ejercicios

3.12 Determina una base y la dimensión del subespacio Nul(A), para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.13 Determina una base y la dimensión del subespacio Nul(A), siendo $A = [\ 1\ 1\ 1\ ]$.
El enunciado también podía haber sido: "Determina una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación implícita $x + y + z = 0$."

3.14 Determina la/s ecuación/es implícitas de $H =< (2, -1, 0), (3, 0, -1) >$. H es un hiperplano[1] de $\mathbb{R}^3$.

3.15 Sean $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de $H =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$.

a) Determina si $\vec{x} \in H$, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a B.
b) Obtén la ec/ecs. implícita/s del sub. vec. H.
c) A partir del resultado anterior obtén una nueva base B' de H.

3.16 Obtén la/s ec./ecs. implícita/s de $H =< (1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1) >$ utilizando los dos métodos que conoces.

3.17 Obtén la/s ec./ecs. implícita/s del subespacio de $\mathbb{R}^5$ de base $B = \{(1, 2, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1\}$. (En HVZ12 pgs. 164-165, ejemplo D).

[1] $\dim H = \dim \mathbb{R}^3$ - 1

3.18 Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H. Razona la respuesta.

b) A partir de la base obtenida calcula la ecuación o ecuaciones implícitas de H, denotando a las variables como x_1, x_2, x_3, x_4.

c) Escribe un vector que no pertenezca a H. Razona la respuesta.

d) Escribe las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$, sabiendo que sus coordenadas respecto de la base B son (4,2,1), o lo que es lo mismo $[\vec{v}]_B = (4, 2, 1)$.

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base B' de H distinta de la base anterior B.

Dada $A = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ ...\ \ \vec{a}_n\ ]$, al subespacio $<\ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ ...\ ,\ \vec{a}_n\ >$ se le denomina <u>subespacio generado por las columnas de A</u> y se denota $\mathrm{Col}A$. Por tanto en este ejercicio, denotando $A = [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ \vec{v}_4\ ]$, $H = \mathrm{Col}A$.

3.19 MATLAB. Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto.

b) A partir de la base B, obtén la/s ec/ecs. implícita/s de H, denotando a las variables de $\mathbb{R}^4$ como x_1, x_2, x_3, x_4.

c1) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 4, -5, -10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

c2) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 8, -10, 10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

Consideramos la matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Col}A$ denota el <u>subespacio generado por las columnas de A</u>, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

$A = [\ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \ldots\ \ \vec{a}_n\ ] \qquad \mathrm{Col}A \ = \ <\vec{a}_1\ ,\ \vec{a}_2\ ,\ \ldots\ ,\ \vec{a}_n>$

Nótese que Col$A$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$, pues las columnas de A son vectores de m entradas (m filas).

Obviamente $\dim$ (Col$A$) $=$ rg(A), pues las columnas de A que sean c.l. de otras hay que quitarlas para obtener la base.

Recordemos que el <u>subespacio nulo de A</u>, denotado $\mathrm{Nul}A$, es el conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\vec{x} = \vec{0}\}$.

Nul$A$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$, y obviamente $\dim$ (Nul$A$) $= \ n \ - \ $ rg(A).

La dimensión del subespacio nulo de A o núcleo de A es el número de soluciones independientes en el SLH o, lo que es lo mismo, el grado de indeterminación del SLH.

Se obtiene entonces:

$$\boxed{\dim(\mathrm{Nul}A) + \dim(\mathrm{Col}A) = n}$$

3.20 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determina

a) Una base y la dimensión de Col$A$.
b) Una base y la dimensión de Nul$A$.

3.9 Intersección y suma de subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Sean H y F subespacios de $\mathbb{R}^n$, se define intersección de H y F así :
  $H \bigcap F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{v} \in H \ \text{y} \ \vec{v} \in F\}$
  Obviamente, $H \bigcap F \subseteq H$, $H \bigcap F \subseteq F$, $H \bigcap F = H \Leftrightarrow H \subseteq F$.
- $H \bigcap F$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$. $\dim(H \bigcap F) \leq \dim H$ y $\dim(H \bigcap F) \leq \dim F$
- Los vectores de $H \bigcap F$ cumplen a la vez las ecuaciones implícitas de H y las ecuaciones implícitas de F, por tanto las ecuaciones implícitas de $H \bigcap F$ se obtienen uniendo las ecuaciones de H y de F, y eliminando en el sistema lineal homogéneo resultante las ecuaciones que sean combinación lineal de otras.
  Las ecuaciones redundantes se convierten en filas de ceros en la eliminación gaussiana.
  Resolviendo las ecuaciones de $H \bigcap F$ se obtiene la base de $H \bigcap F$.
- **Ejemplos sencillos**
  - $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ z = 0\}$ Plano XY
    $F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ y = 0\}$ Plano XZ
    $H \bigcap F = \{(x, y, z) \ / \ y = 0 \ , \ z = 0\}$ Eje X
    Base de $H \bigcap F = \{(1, 0, 0)\}$
  - $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ y = 0 \ , \ z = 0\}$ Eje X
    $T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ x = 0 \ , \ z = 0\}$ Eje Y
    $G \bigcap T = \{(x, y, z) \ / \ x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$
  - $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ z = 0\}$ Plano XY
    $F \subset \mathbb{R}^3 =< (1, 1, 1) >$ Recta no incluida en el Plano XY
    Las ecs. implícitas de F son $x = y, x = z$
    $H \bigcap F = \{(0, 0, 0)\}$; $x = y = z = 0$

- Sean H y F subespacios de $\mathbb{R}^n$, se define <u>suma</u> de H y F así :

  $H + F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \ \text{ con } \ \vec{v}_1 \in H \ \text{ y } \ \vec{v}_2 \in F\}$

  $H + F \neq H \bigcup F$

  (se puede analizar por ejemplo tomando H: eje X y F: eje Y en $\mathbb{R}^3$. La suma es el plano XY pero la unión no lo es.)

  $H \subseteq H + F$, $F \subseteq H + F$, $H + F = H \Leftrightarrow F \subseteq H$.

- $H + F$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

  $\dim(H + F) \geq \dim H$ y $\dim(H + F) \geq \dim F$.

- La unión de una base de H y una base de F es conjunto generador de $H + F$.

  Podemos escribir la afirmación anterior así: Dadas B_H base de H y B_F base de F, entonces $H + F =< B_H \bigcup B_F >$

  $B_H \bigcup B_F$ es conjunto generador de $H + F$. Para convertir el conjunto generador en base tenemos que eliminar los vectores dependientes, es decir, que sean combinación lineal del resto.

  $\dim\,(H + F) \leq \dim H + \dim F$, con la igualdad en el caso de que la unión de las bases de H y F sea conjunto l.i. y por tanto directamente base.

- Se dice que $H + F$ es <u>suma directa</u> si $\dim\,(H + F) = \dim H + \dim F$. Se denota $H \bigoplus F$.
- Sea H subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se dice que G es subespacio <u>complementario</u> de H respecto de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n = H \bigoplus G$.
- Todo subespacio H de $\mathbb{R}^n$ tiene subespacio complementario.

Ejercicios

Ejerc. 3.21 Escribe el vector $\vec{v} = (5, 6)$ como suma de dos vectores, uno sobre la recta $\{(x, y) \; / \; y = 2x\}$ y otro sobre la recta $\{(x, y) \; / \; y = x/2\}$ (*Tomado de Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications". Quinta edición. 2016. Pearson pg. 90*).

Ejerc. 3.22 Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
* el plano Π: $3x + 6y - z = 0$
* la recta r : $\{(1, 2, 3)\lambda \; / \; \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Obtén una base de Π.

b) Justifica si la suma de Π y r es o no suma directa.

c) Justifica si Π y r son o no complementarios.

d) Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (4, -1, 42)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ del plano Π y un vector $\vec{v}_2$ de la recta r. En caso de que sea posible:

Calcula $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_1$ obtenido se encuentra en el plano Π.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_2$ obtenido se encuentra en la recta r.

Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

Ejerc. 3.23 Considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \; / \; x - y + 2z + t = 0\}$.
a) Halla una base y la dimensión de F
b) Halla la dimensión y una base de un subespacio complementario de F, denotándolo F'
c) Descompón $\vec{v} = (2, 1, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ de F y un vector $\vec{v}_2$ de F'

Ejerc. 3.24 Obtén una base de un subespacio G complementario de $F = <(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)>$.