

### 3 Espacios Vectoriales

- 3.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos
- 3.2 Combinación lineal, conjunto generado y dependencia lineal
- 3.3 Subespacios vectoriales
- 3.4 Base y dimensión de un espacio vectorial
- 3.5 Coordenadas

## 3.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos

### Definición

Un conjunto  $V$  de elementos se dice que es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , si en el se han definido dos operaciones: la suma,  $+$ , de manera que a cada par de elementos  $u$  y  $v$  de  $V$  se le haga corresponder el elemento  $u + v$  de  $V$ , y la multiplicación por un número real<sup>1</sup>, de tal manera que a cada par de elementos  $u$  de  $V$  y  $\alpha$  de  $\mathbb{R}$  se le haga corresponder el elemento  $\alpha u$  de  $V$ , cumpliéndose además los siguientes axiomas:

#### Para la suma

A1 Conmutativa:  $\forall u, v \in V, u + v = v + u$

A2 Asociativa:  $\forall u, v, w \in V, u + (v + w) = (u + v) + w$

A3 Existencia de elemento neutro:  $\exists 0_V \in V / u + 0_V = u \quad \forall u \in V$

A4 Existencia de elemento opuesto:  $\forall u \in V \quad \exists -u \in V / u + (-u) = 0_V$

#### Para la multiplicación por un escalar

A5  $1u = u$        $1$  es el elemento neutro del producto en  $\mathbb{R}$ . Se le denomina elemento unidad de  $V$ .

A6 Pseudoasociativa respecto de la multiplicación por escalares:  $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall u \in V$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

#### Distributivas

A7 De la multiplic. por escalar respecto de la suma de vectores<sup>2</sup>:  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall u, v \in V$  y  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

A8 De la multiplic. por escalar respecto de la suma de escalares:  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Es importante volver a señalar explícitamente la condición dada en la definición de que las dos operaciones sean cerradas, o axiomas de cierre:

$$C1 \quad \forall u, v \in V, u + v \in V$$

$$C2 \quad \forall u \in V \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in V$$

---

<sup>1</sup>La operación también se designa como "multiplicación por escalar". Debemos entender que aquí solo nos referimos a escalares reales (quedan excluidos los complejos).

<sup>2</sup>A los elementos de un espacio vectorial se les designa con frecuencia con el nombre genérico de vectores, heredando la nomenclatura de los elementos del espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ .

Un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  se denomina también espacio vectorial real.

### Propiedades

De la definición de Espacio Vectorial se infieren las siguientes propiedades:

- Por la propiedad conmutativa:

$$0_V + u = u$$

$$-u + u = 0_V$$

- El elemento neutro de un espacio vectorial es único.
- El elemento opuesto de cada elemento de un espacio vectorial es único.
- $\forall u \in V \quad 0 \cdot u = 0_V$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot 0_V = 0_V$
- $\alpha u = 0_V \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } u = 0_V$
- $(-1) \cdot u = -u$
- La combinación de las operaciones de multiplicación por un escalar y suma es la operación conocida como combinación lineal. La combinación lineal de los elementos  $u$  y  $v$  de  $V$  con escalares  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  es  $\alpha u + \beta v$ , y pertenece a  $V$ .

### Ejemplos (ver HVZ12, pgs. 145-146)

- El conjunto  $\mathbb{R}^2$  de los vectores en el plano.
- El conjunto  $\mathbb{R}^3$  de los vectores en el espacio.
- El conjunto  $\mathbb{R}^n$  de los vectores en el espacio de dimensión  $n$ .
- El conjunto  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  de todas las matrices reales de  $m$  filas y  $n$  columnas.
- El conjunto  $P_n$  de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que  $n$ .

Los elementos de  $P_n$  se definen por la expresión:  $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$  con  $a_i \in \mathbb{R}$

Un polinomio tiene grado  $k$  si  $a_k \neq 0$  y  $a_i = 0$  para todo  $i > k$ .

Definición de la suma:

$$\text{Sean } p_1(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \text{ y } p_2(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_n\lambda^n, \text{ entonces}$$
$$p(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\lambda + (a_2 + b_2)\lambda^2 + \dots + (a_n + b_n)\lambda^n$$

Definición de la multiplicación por un real:

$$\text{Sean } p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ entonces}$$
$$\alpha p(\lambda) = \alpha a_0 + \alpha a_1\lambda + \alpha a_2\lambda^2 + \dots + \alpha a_n\lambda^n$$

- El conjunto de las funciones reales de variable real continuas y definidas en el intervalo  $[a, b]$  es espacio vectorial. Def. de la suma:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  Def. de la multiplicación por un real:  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

### Ejemplos de conjuntos que no son espacios vectoriales

Para justificar que no lo son basta con demostrar que no cumplen uno de los 10 axiomas.

- Conjunto de las matrices de orden  $n$  de determinante nulo, con las operaciones de suma y producto por escalar estudiadas.
- El conjunto de los polinomios de grado exactamente  $n$
- **Ejerc. 3.1** Demuestra que el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  no es espacio vectorial.  
 $W = \{(a, 1) / a \in \mathbb{R}\}$   
(Observa que  $W$  es la recta de  $\mathbb{R}^2$  de ecuación  $y = 1$ ).

## 3.2 Combinación lineal, conjunto generado y dependencia lineal

Sea  $V$  espacio vectorial real y  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$ .

- Se dice que  $v \in V$  es combinación lineal de los elementos de  $S$  si

$$\exists c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R} / v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p.$$

A los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_p$  se les llama pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden tomar cualquier valor real incluido el 0.

- El conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los elementos de  $S$  se denomina conjunto generado por  $S$  y se denota  $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$  o  $\langle S \rangle$ . A su vez  $S$  se denomina conjunto generador o sistema generador de  $\langle S \rangle$

- Se dice que el conjunto  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  es linealmente dependiente si existen  $p$  reales  $(c_1, c_2, \dots, c_p)^3$ , no todos cero, tales que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0_V \quad \mathbf{[1]}$$

Una ecuación como **[1]**, en la que no todos los coeficientes son cero, se denomina relación de dependencia lineal del conjunto.

- Se dice que  $S$  es linealmente independiente si y sólo si no es linealmente dependiente.

$$\text{Es decir, si } c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0_V \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

---

<sup>3</sup>Se ha incluido el paréntesis para recalcar que los coeficientes actúan de forma agrupada

### Propiedades en relación con la dependencia e independencia lineal

- $S$  es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si al menos un elemento de  $S$  puede expresarse como combinación lineal del resto.
- $S$  formado por dos elementos es linealmente dependiente si y sólo si un elemento es múltiplo del otro.
- Si  $0_V \in S$ , entonces  $S$  es un conjunto linealmente dependiente.

En la Sección 1.2 se adelantaron algunas de estas definiciones y propiedades para los vectores de  $\mathbb{R}^n$ .

- 
- En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  no puede haber conjuntos linealmente independientes formados por más de  $n$  vectores. Justificación: La matriz cuyas columnas son los vectores tendrá  $n$  filas, y por tanto no puede tener más de  $n$  columnas pivotaes, tendrá como máximo  $n$ .
  - $n$  vectores de  $\mathbb{R}^n$  que formen las  $n$  columnas de una matriz  $A_n$  son l.i. si y solo si la matriz  $A$  es invertible.
  - **Ejerc. 3.2** En el espacio vectorial de las matrices cuadradas 2 por 2, obtén la combinación lineal de las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ , tomando como coeficientes 2 y  $-2$ , respectivamente.
  - **Ejerc. 3.3** Justifica que en el espacio vectorial de las funciones reales de variable real, continuas, y definidas en el intervalo  $[a, b]$ , las funciones  $f(x) = \cos^2(x)$ ,  $g(x) = \sen^2(x)$  y  $h(x) = 1$  forman un conjunto linealmente dependiente. (HVZ12 pg. 151).
-

## 3.3 Subespacios vectoriales

### Definición

Sea  $V$  espacio vectorial y  $H$  un subconjunto no vacío de  $V$ . Se dice que  $H$  es subespacio vectorial de  $V$ , si  $H$  es, en sí mismo, espacio vectorial con las mismas operaciones.

- $H \subseteq V$ , no vacío, es subespacio de  $V$  si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\text{C1 } \forall u, v \in H, u + v \in H \qquad \text{C2 } \forall u \in H \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in H$$

Basta con que se cumplan los axiomas de cierre.

$\{0_V\}$  es subespacio vectorial de  $V$ . Se denomina subespacio cero de  $V$ .

El espacio vectorial completo  $V$  puede considerarse subespacio vectorial de sí mismo. A los subespacios de  $V$  que no son el propio  $V$  los denominamos subespacios estrictos.

### Ejemplos:

- En  $\mathbb{R}^3$  todas las rectas que pasan por el origen y todos los planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales. Puedes fijarte, gráficamente, en que la suma y el producto por un real son cerrados tanto en las rectas que pasan por el origen como en los planos que pasan por el origen.
- Los polinomios con coeficientes reales son subespacio de las funciones continuas reales de variable real. A su vez los polinomios con coeficientes reales, de grado igual o inferior a  $n$ , son subespacio del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales.

- Dado  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$ ,  $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$  es subespacio vectorial de  $V$ . Se le denomina subespacio generado por  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ . Lo habíamos llamado en la sección anterior subconjunto generado. Precisamos ahora que es subespacio. En efecto lo es porque la suma de combinaciones lineales es una c.l. de los mismos vectores, y la multiplicación de una c.l. por un real es también c.l. de los mismos vectores.

Decimos del conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  que es conjunto generador del subespacio vectorial  $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ .

- El conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo con  $n$  incógnitas es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ . (En la Secc. 1.2 vimos que la suma soluciones de un SLH es también solución y que el producto de una solución por un real es también solución).

Tomando  $A \in M_{m \times n}$  como matriz de coeficientes,  $A\vec{x} = \vec{0}$  es el SLH.

Si  $A\vec{x}_1 = \vec{0}$ ,  $A\vec{x}_2 = \vec{0}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{0}$  y  $A\alpha\vec{x}_1 = \vec{0}$ .

El conjunto de soluciones se conoce como subespacio nulo de  $A$ , y se denota  $N(A)$  o  $\text{Nul}(A)$ .

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / A\vec{x} = \vec{0}\}$$

$N(A)$  es subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , al estar formado por los vectores de  $\mathbb{R}^n$  que cumplen el SL  $A\vec{x} = \vec{0}$

También se designa a este subespacio como núcleo de  $A$ .

## 3.4 Base y dimensión de un espacio vectorial

Hay espacios vectoriales que sólo tienen un elemento: los que están formados exclusivamente por el elemento neutro  $O_V$ . Para el resto de espacios vectoriales  $V$ , siempre existe un conjunto generador de la forma  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$  tal que  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ . Dicho de otra forma, todo espacio vectorial es un subespacio generado.

Por ejemplo en  $\mathbb{R}^3$ :

- El espacio vectorial  $\langle (1, 1, 1) \rangle$  es la recta que pasa por el origen, con vector generador  $(1,1,1)$ .
- El espacio vectorial  $\langle (1, 1, 1), (2, 2, 1) \rangle$  es un plano que pasa por el origen, con vectores generadores  $(1,1,1)$  y  $(2,2,1)$ . Es así no porque sean dos vectores, sino porque sean dos, y l.i.  
Por ejemplo  $\langle (1, 1, 1), (2, 2, 2) \rangle = \langle (1, 1, 1) \rangle$
- El espacio vectorial  $\langle (1, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1) \rangle$  es  $\mathbb{R}^3$ , ya que tenemos tres vectores l.i.

Un conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$  se dice que es base de  $V$  si es conjunto generador de  $V$  y linealmente independiente.

Se verifican los siguientes resultados:

- Dado  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  conjunto generador de  $V$ , si se elimina uno a uno cada vector del conjunto que sea c.l. del resto, los vectores que queden siguen siendo conjunto generador de  $V$ .
- $v \in V$  se escribirá de forma única como c.l. de los vectores del conjunto generador  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  si y solo si ese conjunto es linealmente independiente.

- Si un conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  genera  $V$ , entonces  $V$  no tiene conjuntos l.i. con más de  $p$  vectores.
- Todas las bases de  $V$  tienen el mismo número de vectores. A ese número se le denomina dimensión de  $V$ , denotado  $\dim V$ .

El espacio vectorial cero no tiene base, por ser  $\{O_V\}$  un conjunto l.d. Se le asigna, por definición, dimensión cero.

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim P_n = n + 1$$

$$\dim M_{m \times n} = m \times n$$

La dimensión de un espacio vectorial marca el mínimo número de vectores necesarios para ser conjunto generador, y el máximo número posible para ser l.i.

Sea  $V$  de dimensión  $n > 0$ :

- Todo subconjunto de  $V$  formado por  $n$  vectores linealmente independientes es base de  $V$ .
- Todo subconjunto de  $V$  formado por  $n$  vectores y que genere  $V$  es base.
- Todo subconjunto que genere  $V$  tendrá al menos  $n$  vectores. Si tiene  $n$  serán l.i.. Si tiene más de  $n$  serán conjunto l.d., y se puede reducir hasta obtener una base.
- Todo subconjunto de  $V$  con  $k < n$  vectores linealmente independientes puede ampliarse con  $n - k$  vectores (que formen con el anterior un conjunto total l.i.) para formar una base de  $V$ .

**Ejerc. 3.4** Encuentra una base de  $\mathbb{R}^4$  que contenga los vectores  $\{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$ . (HVZ12, ejerc. 6, pg. 160).

**Ejerc. 3.5** Determina para qué valores de  $a$  los vectores  $\vec{u}_1 = (a, 0, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$  y  $\vec{u}_3 = (2, -1, a)$  forman una base de  $\mathbb{R}^3$ . (HVZ12, ej. 15, pg. 162).

**Ejerc. 3.6** En  $\mathbb{R}^3$ , obtén una base del subespacio generado por el conjunto  $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 2)\}$ . (HVZ12, pg. 163).

### Base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Los vectores dados por las columnas de la matriz real  $I_n$  son elementos del espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  y se denotan como  $\vec{e}_i$ , con  $i$  desde 1 hasta  $n$ .

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al conjunto  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  se le denomina **base canónica o estándar de  $\mathbb{R}^n$** .

- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  es un conjunto linealmente independiente, puesto que esos vectores, dispuestos como columnas en la matriz  $I_n$  corresponden todos a columnas pivotales (en este caso la matriz coincide con su forma escalonada reducida).
- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  es sistema generador de  $\mathbb{R}^n$ , ya que el sistema lineal de matriz ampliada  $[\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n \mid \vec{v}]$  es compatible para todo  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , pues  $\text{rg}A = n = \text{rg}A^*$ , y por tanto todo  $\vec{v}$  puede escribirse como c.l. del conjunto  $B$ .

$\{(1, 0), (0, 1)\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^2$

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^3$

## 3.5 Coordenadas

La razón principal de elegir una base de un espacio vectorial en vez de un conjunto generador es que cada vector  $v$  de ese espacio puede escribirse de una sola manera como combinación lineal de los vectores de la base.

Sea  $B = \{b_1, \dots, b_d\}$  una base del espacio vectorial  $V$ , entonces  $\forall v \in V$ ,  $v$  se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de la base. A los coeficientes o pesos  $c_1, c_2, \dots, c_d$ , tales que  $v = c_1 b_1 + \dots + c_d b_d$  se les denomina coordenadas de  $v$  relativas a la base  $B$ .

Las coordenadas, que son  $d$  reales, se pueden almacenar como un vector, denominado vector de coordenadas de  $v$  respecto a  $B$ .

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$$

### Notación en el espacio $\mathbb{R}^n$

- El vector de coordenadas de  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  respecto de una base  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  se expresa de acuerdo con la notación indicada cómo:

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \text{partiendo de } \vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n$$

- Cuando las coordenadas están referidas a la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ , utilizamos la notación:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \text{ prescindiendo de los corchetes y de la referencia a la base.}$$

$$\vec{x} = c_1 \vec{e}_1 + \dots + c_n \vec{e}_n,$$

$$\text{Más usual es expresar } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ denotando las coordenadas de } \vec{x} \text{ relativas a la base canónica como } x_j. \text{ A}$$

estas coordenadas las denominamos coordenadas canónicas o coordenadas estándar de  $\vec{x}$ .

Ejerc. 3.7  $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  significa que  $\vec{x}$  tiene coordenadas (2, 3, 4, 5) respecto de la base canónica, o lo que es lo mismo, que  $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 5\vec{e}_4$

Respecto de la base  $B = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$  las coordenadas de  $\vec{x}$  son:

$$[\vec{x}]_B = (2, 1, 1, 1)$$

Compruébalo.

**Ejerc. 3.8 a)** Considerando en  $\mathbb{R}^2$  la base  $B = \{(5, 1), (2, 3)\}$  y el vector  $\vec{v}$  de coordenadas  $(4, 3)$  respecto de la base  $B$ , determina las coordenadas de  $\vec{v}$  respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .

El vector  $\vec{v}$  se obtiene así:  $4 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}$

o, escribiendo la combinación lineal como producto matriz-vector:  $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}$

$$P_B = [ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 ] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \boxed{P_B \ [\vec{v}]_B = \vec{v}} \quad [ I ]$$

b) Considerando en  $\mathbb{R}^2$  la base  $B = \{(5, 1), (2, 3)\}$  y  $\vec{v} = (26, 13)$ , determina las coordenadas de  $\vec{v}$  respecto de la base  $B$ .

Hay que obtener  $(c_1, c_2)$  tales que  $c_1(5, 1) + c_2(2, 3) = (26, 13)$ . O lo que es lo mismo, hay que resolver el SL de matriz ampliada  $[ P_B \ | \ \vec{v} ]$  [ II ].

Resolviendo  $\begin{bmatrix} 5 & 2 & | & 26 \\ 1 & 3 & | & 13 \end{bmatrix}$  obtendremos como solución, obviamente,  $[\vec{v}]_B = (4, 3)$

Teniendo en cuenta que  $P_B$  es invertible, la solución del sistema también se puede obtener así:

$$\boxed{[\vec{v}]_B = P_B^{-1} \vec{v}} \quad [ III ]$$

Esta ecuación también se puede obtener de [ I ] sin más que premultiplicar ambos miembros por  $P_B^{-1}$ .

- La ecuación [ I ] nos da la transformación desde  $[\vec{v}]_B$  a  $\vec{v}$ , es decir, de coord. en base  $B$  a coord. estándar.
- La ecuación [ III ] da la transformación desde  $\vec{v}$  hasta  $[\vec{v}]_B$ , es decir, de coord. estándar a coord. relativas a base  $B$ . En la práctica requiere menos operaciones resolver el sistema (método [ II ]) que calcular la inversa y después premultiplicar por ella (la obtención de la inversa es la que requiere en general más operaciones).