A toda matriz real cuadrada A_n le asociamos un real denominado **determinante de** A, det$A$ o $|A|$ simbolizado así :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Su valor nos dirá si la matriz es singular o no.
Los determinantes nos permitirán además determinar inversas y resolver sistemas lineales (método de Cramer).

Presentamos varias definiciones y propiedades de las matrices cuadradas antes de empezar con los determinantes:

- En una matriz cuadrada se denomina diagonal principal al conjunto ordenado de reales $\{a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}\}$[1]
- Una matriz cuadrada A es:
  - triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
  - triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
  - triangular si es triangular superior o triangular inferior.
  - diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
  - estrictamente triangular superior si es triangular superior y los elementos de la diagonal principal son todos distintos de cero.
- Toda matriz A cuadrada y escalonada es triangular superior.

[1] Se toma la definición de LLM, pg. 94.

Reglas mnemotécnicas para los determinantes de orden 2 y de orden 3.

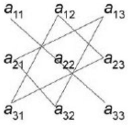
Para un <u>determinante de orden 2</u> se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} \bullet & \\ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \circ \\ \circ & \end{vmatrix}$$

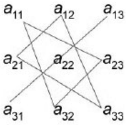
Para un <u>determinante de orden 3</u>:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

La regla de Sarrus simplifica la obtención del determinante de orden 3.



+



−

Definición del determinante de A mediante inducción:

- si $n = 1$ $\quad |A| = a_{11}$
- si $n > 1$

  elegida una fila i $\quad |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ $\quad$ ó elegida una columna j $\quad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

A_{ij} es el denominado **cofactor** de a_{ij} y se define cómo: $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, siendo M_{ij} la matriz $n-1 \times n-1$ que resulta de quitar de A la fila i y la columna j.

Al determinante de M_{ij} se le denomina **menor** de a_{ij}.

Vemos que para calcular un determinante de orden 2, n=2, tenemos que obtener dos cofactores de orden 1, es decir, dos determinantes de orden 1. La definición inductiva se basa en que el determinante de orden n se calcula a partir de n determinantes de orden $n-1$.

Ejercicio 2.1. Calcula el siguiente determinante por cofactores de la primera columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -51$$

En este caso hubiera sido más conveniente elegir la primera fila, puesto que dos de sus cuatro elementos son ceros, ahorrándonos el cálculo de dos cofactores.

- $|A^t|=|A|$
- El determinante de las matrices triangulares y diagonales es el producto de los elementos de la diagonal principal. De esta propiedad se deduce de forma inmediata que el determinante de la matriz identidad es 1. $|I| = 1$.
- Si los elementos de una línea[2] son todos cero, el determinante es cero.
- Si dos líneas paralelas son proporcionales el determinante es cero. Obviamente si son iguales son proporcionales, y por tanto el determinante es 0.
- Si los elementos de una línea son combinación lineal de líneas paralelas, el determinante es cero.
- Si a los elementos de una línea se le suman los correspondientes a otra paralela multiplicados por un real, el determinante no varía.

  Esta propiedad es muy útil para simplicar el cálculo de determinantes

  Significa que la operación elemental de reemplazamiento, $F_i = F_i + \alpha F_j$, no altera el determinante.
- Si todos los elementos de una línea tienen un factor común, el determinante puede obtenerse como el producto de ese factor común por el determinante que resulta de eliminar ese factor común en la correspondiente línea.
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- Si se intercambian entre sí dos líneas paralelas el determinante cambia de signo.

[2] Por "línea" nos referiremos en toda la sección a filas o a columnas

- Dadas A_n, B_n, $|A\ B| = |A|\ |B|$

  Se generaliza a cualquier número de matrices.

- Si A es invertible, entonces $|A| \neq 0$ y $$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

  Se deduce de la igualdad siguiente: $|A||A^{-1}| = |I| = 1$

Aplicando las propiedades anteriormente expuestas podemos simplificar enormemente el cálculo de determinantes.

Ejercicio 2.2. Calcula el valor del siguiente determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Desarrollaremos por cofactores de la 1^{a} columna. Pero previamente realizaremos las operaciones elementales necesarias para hacer ceros todos los elementos de esta columna excepto el primero. La fila 1 es la fila auxiliar, utilizada para transformar los elementos de las filas 3 y 5.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \begin{array}{l} F_3 = F_3 + (-1) * F_1 \\ F_5 = F_5 + (-1) * F_1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1+(-1) & 1+(-2) & 0+(-1) & 2+(-2) & 0+(-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1+(-1) & 2+(-2) & 2+(-1) & 1+(-2) & 1+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ Desarrollando}$$

el determinante por los cofactores de la 1^{a} columna:

$$|A| = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el nuevo determinante de orden 4 por cofactores de la 1^{a} columna.

$$|A| = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1+2-1+2) = 2$$

2.4 Inversa a partir de la traspuesta de la matriz de cofactores

Dada $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, se define **matriz de cofactores de** A, $\text{cof}(A)$, como aquella cuyo elemento (i, j) es el cofactor A_{ij}.

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

En Álgebra tiene mucho interés la traspuesta de la matriz de cofactores de A, ya que a partir de ella se puede calcular la inversa de A.

Propiedad: $(\operatorname{cof}(A))^t = \operatorname{cof}(A^t)$

Se cumplen los siguientes resultados: $\begin{cases} A\ (\operatorname{cof}(A))^t = |A|\ I \\ (\operatorname{cof}(A))^t\ A = |A|\ I \end{cases}$

Si $|A| \neq 0$, podemos pasar $|A|$ al primer miembro, dividiendo, y obtenemos:

$$A \quad \frac{(\operatorname{cof}(A))^t}{|A|} = I \tag{1}$$

$$\frac{(\operatorname{cof}(A))^t}{|A|} \quad A = I \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) deducimos: $$A^{-1} = \frac{(\operatorname{cof}(A))^t}{|A|} \tag{3}$$

La ecuación (3) nos da un procedimiento para calcular la inversa de una matriz.

RESUMEN: En esta sección encontramos que si $|A| \neq 0$, entonces A es invertible, con $A^{-1} = (\mathrm{cof}(A))^t/|A|$. En la sección anterior vimos que si A es invertible, entonces $|A| \neq 0$. Por tanto concluimos:

$\boxed{A \text{ invertible} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$

OBSERVACIÓN: Teniendo en cuenta la propiedad $\mathrm{cof}(A^t) = (\mathrm{cof}(A))^t$ la ecuación (3) se puede reescribir así:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{cof}(A^t)}{|A|}$$

Ejercicio 2.3. Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ a partir de su matriz de cofactores.

Sol.

En primer lugar hay que calcular el determinante de A, confirmando que no es cero. Se obtiene $|A| = -10$ aplicando el método de Sarrus.

Seguidamente obtenemos la matriz de cofactores. La matriz cuyos elementos son los menores de los a_{ij} es:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de cofactores de A tenemos que multiplicar los elementos $|M_{ij}|$ por el factor $(-1)^{i+j}$, o lo que es lo mismo, tenemos que cambiar de signo los elementos en los que la suma del índice de fila y el índice de columna sea impar.

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -6 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Seguidamente obtenemos la traspuesta: $(\mathrm{cof}(A))^t = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Para obtener la inversa sólo queda dividir por el determinante.

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Comprueba el resultado siempre que calcules una inversa, confirmando que $AA^{-1} = I$.

<u>OBSERVACIÓN:</u> Si todos los elementos de una matriz son enteros y su determinante es 1 o -1, entonces los elementos de la inversa son también todos enteros.

2.5 Relación entre el determinante de A y el de una forma escalonada de A

Analizamos aquí cómo varía el determinante de una matriz al efectuar operaciones elementales sobre sus filas, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes

- Intercambio de filas: cambia el signo del determinante
- Reemplazar una fila por ella más un múltiplo de otra: no hace variar el determinante
- El escalamiento de una fila por un factor no nulo: escala el determinante por el mismo factor

Por tanto, si U es una forma escalonada de A, entonces $\boxed{|U| = |A| \times (-1)^s \times \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_p}$ siendo s el número de intercambios de filas y α_i (todos distintos de 0) los factores de los escalamientos realizados sobre las filas de A.

La expresión anterior implica: $\boxed{|U| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0}$

Continuando con las matrices A y U de la sección anterior, analicemos $|U|$.

Por ser U cuadrada y escalonada es triangular superior, y por tanto $|U|$ es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$|U| = u_{11} \times u_{22} \times \ldots \times u_{nn}$

Deducimos:

- $A \,\text{invertible} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |U| \neq 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \; u_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A_{\text{red}} = I_n$.

En este caso las formas escalonadas de A son triangulares superiores estrictamente.

En el Tema 1 también se dedujo el resultado de que A invertible si y solo si rg$A$=n.

Estas afirmaciones también se pueden escribir en esta forma:

- $A \,\text{no invertible} \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow |U| = 0 \Leftrightarrow \exists u_{ii} = 0 \Leftrightarrow \text{rg}A \; < \; n \Leftrightarrow A_{\text{red}}$ no es la identidad.

En este caso las formas escalonadas de A son triangulares superiores no estrictamente.

Ejercicio 2.4. Determina si las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Sol:

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = -2$ El determinante es distinto de cero por tanto A es invertible

  También se podría haber razonado que A es invertible ya que rg A $= 3$ (vemos que en la forma escalonada quedan 3 pivotes)

- $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ B no es invertible ya que su determinante es cero.

  Del resultado rg B=2 (en la forma escalonada quedan 2 pivotes) también se podría haber concluido que B no es invertible.

Ejercicio 2.5. Determina el valor de c para que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ sea invertible.

<u>Sol:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - 2*F_1]{F_2 = F_2 - 2*F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & c-4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + (c-4)*F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2(c-4) \end{bmatrix} = A_{\text{esc}}$$

Nótese que la operación $F_3 = F_3 + (c-4)F_2$ puede realizarse cualquiera que sea el valor de c.

No se podría efectuar $F_2 = (c-4)F_2$, porque en los escalamientos el factor no puede ser cero, y se tendría ese valor para $c = 4$.

De la matriz A_{esc} obtenida se concluye:

- Si $c = 4$ rg$A$=2 por tanto A no es invertible.
- Si $c \neq 4$ rg$A$=3 por tanto A es invertible.

Resultado: La matriz es invertible si y sólo si $c \neq 4$

Otro método: Mediante el determinante de A. Este determinante lo podemos obtener con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, ya que las operaciones de reemplazamiento no han variado el valor del determinante.
$|A| = 1((c-4)(-2) - 0) = -2(c-4)$ por tanto A invertible si y solo si $c \neq 4$.
La matriz es invertible si y sólo si $c \neq 4$

2.7 Método de Cramer

Consideremos el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ con A invertible de orden n y siendo por tanto compatible determinado.

Dados A y $\vec{b}$ denotamos $\quad A_i = [\ \vec{a}_1 \ \ \dots \ \ \underset{\text{col. } i}{\vec{b}} \ \ \dots \ \ \vec{a}_n\ ]$

A_i es la matriz que tiene en la columna i el vector $\vec{b}$ y las demás columnas como en A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \text{col. } i \end{array}$$

La solución única $\vec{x}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ puede obtenerse como: $\quad x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

Ejercicio 2.6. Resuelve el SL $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\; 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$ mediante el método de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{58}{2} = 29 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{32}{2} = 16 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

$\vec{x} = (29, 16, 3)$

2.8 Rango de una matriz como el orden del mayor menor no nulo

Dada una matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, se define **menor de orden** p de A, con $p \leq m$ y $p \leq n$, al determinante de la submatriz de orden p que resulta de eliminar $m-p$ filas y $n-p$ de columnas de A.

Por ejemplo, considerada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, veamos algunos de sus menores:

El menor de orden 2 que toma las filas 1,2 y las columnas 1,4, es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

El menor de orden 2 que toma las filas 1,3 y las columnas 2,4, es: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$.

El número de menores de orden 2 en esta matriz es 18, ya que existen 3 elecciones para el par de filas (1^a y 2^a , 1^a y 3^a , 2^a y 3^a) y 6 para el par de columnas (1^a y 2^a , 1^a y 3^a, 1^a y 4^a , 2^a y 3^a , 2^a y 4^a , 3^a y 4^a).

El número de menores de orden 3 en esta matriz es 4, ya que existen 4 elecciones para la terna de columnas (1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4 ; 2,3,4).

Para una matriz de orden $m \times n$ el número de menores de orden p es:

$$\binom{m}{p} \times \binom{n}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

El primer factor corresponde al número de elecciones posibles de p filas y el segundo al número de elecciones posibles de p columnas.

Propiedad: Dada $A_{m\times n}$, rg$A$ es igual al orden del mayor menor no nulo de A.

Por ejemplo, si una matriz $A_{5\times 8}$ tiene rango 3, entonces existe al menos un menor de orden 3 que no es nulo, y todos los menores de orden superior (los de orden 4 y los de orden 5 en este ejemplo) son nulos.

En $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, el rango es 3, ya que las tres primeras columnas producen claramente un menor distinto de cero.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-6) = -7$ (desarrollado por cofactores de la tercera fila o de la tercera columna)

<u>Búsqueda del rango sirviéndose de los menores</u>

Básicamente extraído de J. de Burgos "Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana". 1999. Segunda edición. McGraw Hill. Página 96.

Para hallar el rango de A, se toma un menor $|M_2|$ de orden 2 no nulo y se le orla con una fila fija, la i, y con sucesivas columnas; si todos los menores de orden 3 que así se obtienen son nulos, entonces se prescinde de la fila i, y se repite el proceso con otra o con otras filas hasta: 1) encontrar un menor $|M_3|$ de orden 3 no nulo, en cuyo caso el rango es al menos 3; ó 2) descubrir que todos los menores de orden 3 son nulos, en cuyo caso el rango es 2. Si hay un menor $|M_3|$ no nulo, se le orla con una fila y con sucesivas columnas, siguiendo el mismo proceso que con $|M_2|$, lo que nos lleva o bien a que el rango es 3 (si todos los menores de orden 4 son nulos) o bien a que el rango es al menos 4 (en cuanto se encuentre un menor de orden 4 no nulo). Siguiendo así , se llega a un menor no nulo del mayor tamaño posible; este tamaño es el rango.

Ejercicio 2.7 Determina el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & a & a(a-1) \end{bmatrix}$ en función del parámetro a, basándote en sus menores.

Sol.:

Las dos primeras filas y las dos primeras columnas forman un menor $|M|$ de orden 2 no nulo, de valor 12. Por existir menor de orden 2 no nulo ya sabemos que el rango de A es igual o mayor que 2.

Orlando este menor vemos que solo tenemos una posibilidad de filas, que es la fila 3, y dos posibilidades de columna. Denotamos $|M_3^{(1)}|$ y $|M_3^{(2)}|$ a los menores obtenidos con las columnas tercera y cuarta respectivamente.

$$|M_3^{(1)}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \qquad |M_3^{(2)}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & a(a-1) \end{vmatrix}$$

Por cofactores de la tercera fila tenemos: $\quad |M_3^{(1)}| = 12a \qquad |M_3^{(2)}| = a(a-1)12$

$\mathrm{rg}A = 2 \Leftrightarrow |M_3^{(1)}| = 0$ **y** $|M_3^{(2)}| = 0$ Los dos menores de orden 3 han de ser nulos para que el rango sea 2.

$$\begin{cases} |M_3^{(1)}| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ |M_3^{(2)}| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = 1 \end{cases}$$

Por tanto $\boxed{\mathrm{rg}A = 2 \Leftrightarrow a = 0}$ ($a = 0$ anula los dos menores. $a = 1$ anula solo uno, por lo que no vale)

Analicemos ahora el resto de casos, es decir, el caso $a \neq 0$. Para ese caso $|M_3^{(1)}| \neq 0$, por tanto al tener un menor no nulo de orden 3 el rango es como mínimo 3. Como la matriz tiene 3 filas este es además el rango máximo, por tanto para $a \neq 0$ el rango es 3.

$$\boxed{\text{Conclusión: } \begin{cases} \text{rango A} = 2 \Leftrightarrow a = 0 \\ \text{rango A} = 3 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}}$$

Gracias al método de "orlar" no hemos tenido que estudiar los cuatro menores de orden 3, sino solo 2.

2.8 Considera $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

- Obtén una forma escalonada de A.
- A partir de ésta determina el rango y si es invertible o no, ambos en función del parámetro a, rellenando las afirmaciones siguientes.

  rg(A)=1 si y solo si: ....

  rg(A)=2 si y solo si: ....

  rg(A)=3 si y solo si: ....

  rg(A)=4 si y solo si: ....

  A invertible si y solo si: ....

  Indica "siempre" o "nunca" si procediese.
- Obtén el determinante de A y justifica el procedimiento empleado.

2.9 Estudia el tipo de solución en función del parámetro a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + a\,x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + a\,x_3 = 3 \end{cases}$$

2.10 Clasifica el siguiente sistema lineal en función del parámetro a.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & 2x_2 & + & a\,x_3 & = & a \\ 2x_1 & - & a\,x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si:

....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si:

....

El sistema es incompatible si y sólo si:

....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Comprueba que las respuestas presentadas son consistentes entre sí.

2.11 Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, y sabiendo que

$D = ABC = \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, calcula la matriz C. Si no existe, indícalo explícitamente.

2.12 Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 & 3 \\ 4 & 5.2 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 1 \\ 5.2 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & \frac{a}{3} \end{bmatrix}$ y $C = \frac{1}{3}\ A$

- Escribe la ecuación que relaciona $|A|$ y $|B|$ y justifica el resultado.

Ecuación:

Justificación:

- Escribe la ecuación que relaciona $|A|$ y $|C|$ y justifica el resultado.

Ecuación:

Justificación:

2.13 HVZ12, ejercicio 4c, pg. 59. Obtén el determinante de la matriz traspuesta de la matriz del enunciado. Realiza operaciones de reemplazamiento de filas para simplificarlo ($F_i = F_i + \alpha F_j$).

El determinante del enunciado es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

2.14 HVZ12, ejercicio 4d, pg. 59. Se pide el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.15 HVZ12, ejercicio 7b, pg. 95. Haz uso del concepto de determinante. El enunciado pide encontrar los valores de a para que la siguiente matriz sea invertible: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{bmatrix}$

2.16 HVZ12, ejercicio 7c, pg. 95. Haz uso del determinante simplificándolo previamente (sacando factor común y realizando operaciones de reemplazamiento, $F_i = F_i + \alpha F_j$) .

El enunciado pide encontrar los valores de a y b para que la siguiente matriz sea invertible: $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$

2.17 HVZ12, ejercicio 11, pg. 95. Haz uso del concepto de determinante.
El enunciado pide calcular los valores de m para que el siguiente sistema tenga soluciones no triviales:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

2.18 HVZ12. En la página 91, tienes un ejemplo (Ejemplo A) de obtención de la inversa de una matriz de orden 3 por cofactores.