

1 Vectores, matrices, sistemas de ecs. lineales e introducción a las aplicaciones lineales

1.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación gaussiana y reducción de

Gauss-Jordan

1.1 Ejercicios

1.2 Operaciones con vectores

1.2 Rango de una matriz

1.2 Estructura de las soluciones de un sistema

1.2 Ejercicios

1.3 Operaciones con matrices

1.3 Expresión matricial y vectorial de un SL

1.3 Ejercicios

1.4 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

1.4 Ejercicios

1.5 Tratando múltiples valores de \vec{b} en $A\vec{x} = \vec{b}$. La ecuación $AX = B$

1.6 Inversa de un endomorfismo e inversa de una matriz cuadrada

1.6 Ejercicios

1 Vectores, matrices, sistemas de ecs. lineales e introducción a las aplicaciones lineales

1.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación gaussiana y reducción de Gauss-Jordan

- **Ejercicio 1.1.1** (HVZ12 (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012, "Álgebra Lineal y Geometría". Pearson), ejemplo A, pg. 3). Sistema de ecuaciones lineales 2×2 (2 ecuaciones y 2 incógnitas) con solución única. Se dice que es compatible determinado.
- Marco general: Sistema de m ecuaciones lineales (SL) con n incógnitas, con coeficientes reales a_{ij} , y con términos independientes b_i también reales.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad [1]$$

- Sistemas equivalentes entre sí son los que tienen las mismas soluciones. Las siguientes transformaciones de un SL producen sistemas equivalentes a él:
 - i) Multiplicar ecuación por real no nulo.
 - ii) Intercambiar dos ecuaciones entre sí (es decir, cambiarlas de orden).
 - iii) Sumar a una ecuación un múltiplo de otra (reemplazamiento).

Estas transformaciones se denominan "operaciones elementales".

- La solución debe ser expresada vectorialmente: Vector solución $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Vector = matriz columna, con elementos reales.

Por ejemplo la solución del Ejercicio 1.1.1 es $\vec{x} = (1, 1)$, que matricialmente se expresa como $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = (1, 1)$, con dos entradas, es un elemento del conjunto \mathbb{R}^2 , o espacio euclídeo \mathbb{R}^2 .

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, con n entradas, es un elemento del espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

- Comprobación de la solución.

- **Ejercicio 1.1.2** (HVZ12, ejemplo B, pgs. 3-5). SL 3×3 (3 ecuaciones y tres incógnitas) con solución única.
- Matriz de coeficientes, vector de términos independientes y matriz ampliada de un SL.
 - Expresiones de los tamaños de las matrices: Matriz $m \times n$, o matriz de orden n , para rectangulares o cuadradas respectivamente.
 - Matriz de coeficientes A .
 - Matriz ampliada $[A | \vec{b}]$ o A^* .
- Resolución del Ejercicio 1.1.2 considerando sólo la matriz ampliada y las operaciones elementales sobre ella.

• **Ejercicio 1.1.3** (HVZ12, ejemplo C, pgs. 5-6).
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -7 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

SL 3×4 (3 ecuaciones y 4 incógnitas) con infinitas soluciones y un parámetro libre. Se dice que es compatible indeterminado, con un grado de indeterminación en este caso.

Resolución considerando sólo la matriz ampliada y las operaciones elementales sobre ella.

- Solución (conjunto de todas las soluciones) en forma vectorial paramétrica. Elección de los parámetros libres.
- Soluciones particulares.

- Elemento cabecera de una fila = primer elemento distinto de cero de cada fila.
- Peldaños, pivotes y columnas pivotales en una matriz escalonada. El número de cualquiera de ellos en una matriz escalonada es obviamente el mismo.
- Matriz escalonada reducida: pivotes 1 y ceros por encima de los pivotes.
- Formas escalonadas y forma escalonada reducida de una matriz.
- La forma escalonada reducida de una matriz es única.
- Reducción de Gauss-Jordan (G-J): transformación mediante operaciones elementales de la matriz ampliada hasta llegar a su forma escalonada reducida. Con esta última matriz obtenemos el SL más sencillo posible equivalente al original.

Resolución de SL mediante eliminación gaussiana: $A^* \rightarrow \dots \rightarrow A_{\text{esc}}^*$.

Resolución de SL mediante la reducción G-J: $A^* \rightarrow \dots \rightarrow A_{\text{esc.red}}^*$.

- Símbolo \sim para expresar que las matrices ampliadas sucesivas corresponden a SLs equivalentes. Por ejemplo $A^* \sim \dots \sim A_{\text{esc}}^* \sim \dots \sim A_{\text{esc.red}}^*$.

- **Ejercicio 1.1.4** (HVZ12, ejemplo D, pg. 7). SL 3×3 (3 ecuaciones y 3 incógnitas) que no tiene solución. Se dice que es incompatible.

No hace falta llegar hasta la forma escalonada reducida de la matriz ampliada, ya que a partir de la forma escalonada de ésta se inferirá la ausencia de solución, al existir pivote en la última columna.

- **Teorema 1.1.1** Teorema de Rouché-Frobenius.

$A_{m \times n}$ es la matriz de coeficientes.

A^* es la matriz ampliada.

p = número de peldaños/pivotes de cualquier forma escalonada de A .

p^* = número de peldaños/pivotes de cualquier forma escalonada de A^* .

Clasificación del SL respecto del tipo de solución.

- Sistema compatible determinado si y solo si $p^* = p = n$
 - Sistema compatible indeterminado si y solo si $p^* = p < n$
 - Sistema incompatible si y solo si $p^* = p + 1$
- Observación: Si $p = m$ el SL es compatible.
- Aplicación del Teorema RF a los ejercicios 1.1.2, 1.1.3 y 1.1.4.
 - Un SL se dice homogéneo (SLH) si $\vec{b} = \vec{0}$.

Los SLH son siempre compatibles. Como mínimo tienen una solución que es $\vec{x} = \vec{0}$, denominada solución trivial.

Observación: La eliminación gaussiana (sin llegar hasta la forma escalonada reducida), ya permite clasificar el SL como SCD, SCI o SI, puesto que peldaños/columnas pivotaes quedan ya fijados. También permite obtener la solución, si bien de forma menos directa que cuando se ha llegado a la forma escalonada reducida.

1.1 Ejercicios

- **1.1.5** Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados ¹, utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo \vec{v}_i vectores numéricos específicos de \mathbb{R}^5 y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ produce una solución válida del sistema).

$$I : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = 3 \end{cases}$$

$$II : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases}$$

- **1.1.6** Igual al ejercicio 1.1.3 pero tomando como vector de términos independientes $\vec{b} = (0, 0, 0)$.
- **1.1.7** Obtén la solución del SL de HVZ12, ejemplo E, pg. 11.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
- Cualquiera de los ejercicios desde el 1 hasta el 4, pgs. 12-13, de HVZ12.

¹El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

1.2 Operaciones con vectores

Operaciones con vectores, combinación lineal y dependencia lineal

- Los vectores se expresan matricialmente como columnas.
- Toda matriz $m \times n$ se puede considerar concatenación de n vectores columna, cada uno con m entradas o componentes, o concatenación de m "vectores fila" de n componentes.

$$A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n]$$

Por ejemplo, para $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$ y $\vec{a}_2 = (4, 5, 6)$, vectores de \mathbb{R}^3 ,

la matriz $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2]$ es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

- Formalmente un vector fila es la matriz traspuesta de un vector columna.
 - \vec{a} es una matriz columna
 - \vec{a}^t es una matriz fila o vector fila
- Traspuesta de una matriz:
Dada $A_{m \times n}$ se define matriz traspuesta de A , y se denota A^t , a aquella cuya fila i -ésima es la columna i -ésima de A .

- Son obvias las siguientes operaciones con vectores:

- Establecer la igualdad de dos vectores.
- Suma de vectores.
- Multiplicación de un vector por un real (también llamado escalar).

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad , \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ si y solo si } a_i = b_i \text{ para todo } i \text{ desde } 1 \text{ hasta } n$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$c \vec{a} = (c a_1, c a_2, \dots, c a_n)$$

- Dos de las operaciones elementales realizadas en la eliminación gaussiana son sumas de vectores fila y multiplicación de un vector fila por un real.
- Propiedades de la suma de vectores, de la multiplicación de un vector por un escalar y distributivas.

- Asociativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$.
- Conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
- Existencia de elemento neutro: $\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^n / \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$.
- Existencia de elemento simétrico u opuesto: $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad \exists -\vec{a} \in \mathbb{R}^n / \vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$
 $-\vec{a}$ es el denominado opuesto de \vec{a} . $-\vec{a}$ tiene como elementos los opuestos de los elementos de \vec{a} .
- $1 \vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$. 1 es el elemento neutro del producto en \mathbb{R} .
- Pseudoasociativa: $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$
- Distributiva respecto a la suma de vectores
 $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- Distributiva respecto a la suma de escalares:
 $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Obtención del opuesto de un vector con la multiplicación por -1 $(-1) \vec{a} = -\vec{a}$

- Diferencia de vectores. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

- Conjunto de vectores y combinación lineal:

\vec{b} es combinación lineal (c.l.) del conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_p tales que

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_p \vec{a}_p = \vec{b} \quad [2]$$

Los c_i reciben el nombre de coeficientes o pesos de la combinación lineal.

$\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores (basta con tomar todos los escalares 0, y ya tenemos la combinación lineal $\vec{0}$).

- **Ejercicio 1.2.1** Considera $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$. ¿Es $(1, 2, 0)$ c.l. de los vectores de S ? ¿Es $(0, 0, 5)$ c.l. de los vectores de S ?

- Dependencia lineal:

- Un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ es linealmente dependiente (l.d.) si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_p , no todos cero, tales que $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_p \vec{a}_p = \vec{0}$ [3]

La ecuación anterior, con c_i que no son todos cero, se denomina relación de dependencia lineal.

- Un conjunto de vectores es linealmente independiente (l.i.) si no es linealmente dependiente.

- **Ejercicio 1.2.2** Determina si el conjunto S del ejercicio anterior es l.d. o l.i.

- **Teorema 1.2.1** Teorema fundamental de la dependencia lineal: Un conjunto es l.d. si y solo si al menos un vector es c.l. del resto. En efecto, a partir de la relación de dependencia lineal [2] siempre se puede despejar un vector como c.l. del resto.
- **Ejercicio 1.2.3** (HVZ12, ejemplo A, pg. 15). Estudia si los vectores $\vec{a}_1 = (2, 1)$ y $\vec{a}_2 = (1, 1)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes.
- **Ejercicio 1.2.4** Estudia si los vectores $\vec{a}_1 = (1, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 5)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes (HVZ12, ejemplo B, pg. 14). Extrae un subconjunto linealmente independiente máximo (con el máximo número de vectores l.i. posible) y expresa los restantes como combinación lineal de ese subconjunto.
- **Ejercicio 1.2.5** Considerado el conjunto $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0)\}$. ¿Es A l.d.? En caso afirmativo obtén una relación de dependencia lineal.
- Conclusiones para un conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$
 - El conjunto es l.i. si y solo si todas las columnas de la forma escalonada² de $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$ son pivotaes.
 - De un conjunto l.d. se puede obtener un subconjunto máximo de vectores l.i. entre sí eliminando los que correspondan a columnas no pivotaes en la forma escalonada.
 - Cada vector eliminado se puede expresar como combinación lineal del subconjunto máximo l.i.
 - Dos vectores son l.i. si y solo si uno no es múltiplo del otro.

²Cualquier forma escalonada

1.2 Rango de una matriz

- Rango de un conjunto de vectores y rango de una matriz:

El rango de un conjunto de vectores es el número máximo de vectores l.i. entre sí con los que cuenta el conjunto. Aunque existan distintas elecciones de estos vectores l.i. el número de ellos es siempre el mismo.

El rango de una matriz se define como el rango de sus columnas.

$$A = [\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_n] \quad \Rightarrow \quad \text{rg}A = \text{rg}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

Observaciones:

- No hace falta completar la reducción de G-J para determinar el subconjunto l.i. o el rango, pues basta con llegar a una forma escalonada de la matriz para reconocer las columnas pivotaes. El rango es el número de ellas, y el subconjunto l.i. máximo que se escoge sistemáticamente es el formado por las columnas de A correspondientes a las columnas pivotaes en la forma escalonada.
- $\text{rg}A_{m \times n}$ es como máximo el menor de los valores de m y n , ya que en sus formas escalonadas no puede haber más de m peldaños ni más de n columnas pivotaes.
- **Ejercicio 1.2.6** (HVZ12, ejemplo C, pgs. 17-18)
- Se puede reescribir el Teor. de Rouché-Frobenius en términos de los rangos de $A_{m \times n}$ y A^* .
 - Sistema compatible determinado si y solo si $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) = n$
 - Sistema compatible indeterminado si y solo si $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) < n$
 - Sistema incompatible si y solo si $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) + 1$
- Una propiedad importante de los rangos es la siguiente: $\text{rg}A = \text{rg}A^t$

1.2 Estructura de las soluciones de un sistema

- **Teorema 1.2.2** La estructura de las soluciones de un SLH indeterminado tiene la forma:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k, \quad [4]$$

siendo \vec{v}_i vectores linealmente independientes, y k el número de parámetros libres.

$k = n - \text{rg}A$, siendo A la matriz de coeficientes.

Análisis con el correspondiente homogéneo del **Ejerc. 1.1.3**.

- **Teorema 1.2.3** Relación entre la solución de un SL no homogéneo compatible indeterminado y la de su correspondiente homogéneo.

$$\vec{x}_{\text{NH}} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k, \quad [5]$$

siendo \vec{p} una solución particular del SLNH y $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$ la solución del correspondiente homogéneo.

$k = n - \text{rg}A$, siendo A la matriz de coeficientes.

Análisis con **Ejerc. 1.1.3**.

1.2 Ejercicios

- 1.2.7 Análisis de los teoremas 1.2.2 y 1.2.3 con el ejercicio 1.1.5.

- 1.2.8 Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ con: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \\ a \end{bmatrix}$, con a parámetro,

y el vector $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ b \end{bmatrix}$, con b parámetro.

- a) Obtén el rango del conjunto S en función del parámetro a .
- b) Determina los valores de a y b para que \vec{v}_4 sea combinación lineal de los vectores de S .
- c) Escoge un par de valores (a, b) que verifiquen el apartado b) y obtén para ese caso los coeficientes de la combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ que producen \vec{v}_4 .

- 1.2.9 Considera el sistema lineal de matriz ampliada $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 2 & a & | & 5 \\ 1 & 1 & a & | & a \end{bmatrix}$

a) Mediante eliminación gaussiana obtén la matriz ampliada B^* de un sistema lineal equivalente, de forma que B^* cumpla:

$$b_{21}^* = 0, b_{31}^* = 0, b_{41}^* = 0, b_{32}^* = 0, b_{42}^* = 0 \text{ y } b_{43}^* = 0,$$

b) Estudia, en función del parámetro a , el rango de la matriz de coeficientes A y el rango de la matriz ampliada A^* , basándote en el apartado anterior. Clasifica el sistema en base a esos rangos, cubriendo toda la información indicada en la tabla.

Usa una fila de la tabla para cada par de valores posible de los rangos ($\text{rg}A$, $\text{rg}A^*$). Asegúrate de que no existe solapamiento en los valores de a entre filas distintas de la tabla. Si das más de una condición para el parámetro a utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Valores de a	rango A	rango A^*	Tipo de sistema en cuanto a solución

- 1.2.10 Considera el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz ampliada:

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & b_1 \\ 4 & 7 & -4 & b_2 \\ -6 & -3 & 1 & b_3 \end{array} \right]$$

- ¿ Es el sistema lineal compatible para todo \vec{b} ?. Razona la respuesta.
- En caso de que la respuesta sea negativa, encuentra una ecuación que incluya a b_1 , b_2 y b_3 , y que permita que el sistema sea compatible.

- 1.2.11 Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 5t = 1 \\ 3x + 3y + 3t = 3 \\ 3x + 4y + z - 4t = 2 \end{cases}$$
, halla:

- La solución general en forma vectorial paramétrica.
- La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.
- La solución general en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

- 1.2.12 Calcula a para que sea compatible el siguiente sistema y resuélvelo.
$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 5 \\ 2x - y = 8 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

- 1.2.13 Considera el siguiente sistema constituido por 4 masas puntuales:

Punto	Masa
$\vec{v}_1 = (5, -4, 3)$	$m_1 = 2 \text{ g}$
$\vec{v}_2 = (4, 3, -2)$	$m_2 = 5 \text{ g}$
$\vec{v}_3 = (-4, -3, -1)$	$m_3 = 2 \text{ g}$
$\vec{v}_4 = (-9, 8, 6)$	$m_4 = 1 \text{ g}$

- Calcula el centro geométrico del sistema. $\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k}{k}$
- Calcula el centro de masa, \vec{v}_{cdm} , del sistema, sabiendo que:

$$\vec{v}_{\text{cdm}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_k \vec{v}_k}{m_1 + \dots + m_k}$$

Comenta para cada apartado cual ha sido el conjunto de vectores empleado para la combinación lineal y cuales han sido los coeficientes o pesos utilizados.

Enunciado tomado de LLM16 (Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications").
Ejercicio 29. pg. 33.

- Cualquiera de los ejercicios desde el 1 hasta el 5, pgs. 24-25, de HVZ12.

1.3 Operaciones con matrices

- Igualdad de matrices $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$.
- Suma de matrices $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$. Propiedades:
 - Asociativa: $\forall A, B, C \in M_{m \times n}, A + (B + C) = (A + B) + C$
 $M_{m \times n}$ es el conjunto de todas las matrices reales $m \times n$.
 - Conmutativa: $\forall A, B \in M_{m \times n}, A + B = B + A$
 - Elemento neutro: $\exists 0 \in M_{m \times n} / \forall A \in M_{m \times n} A + 0 = A$
0 es la matriz cero. Todos sus elementos son cero.
 - Existencia de elemento opuesto:
 $\forall A \in M_{m \times n} \exists -A \in M_{m \times n} / A + (-A) = 0$
 $-A$ es la denominada matriz opuesta. La matriz opuesta de A es la que tiene como elementos los opuestos de los elementos de A . El elemento opuesto de $a \in \mathbb{R}$ es $-a \in \mathbb{R}$
- Producto de una matriz por un real. Propiedades:
 - $1A = A \quad \forall A \in M_{m \times n}$.
 - Pseudoasociativa: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad \forall A \in M_{m \times n} \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Observación: Se puede obtener la c.l. de matrices.
- Distributivas:
 - Distributiva respecto a la suma de matrices:
 $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall A, B \in M_{m \times n}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
 - Distributiva respecto a la suma de escalares:
 $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall A \in M_{m \times n} \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Diferencia de matrices: $A - B = A + (-B)$

- Producto escalar de dos vectores \vec{a} y \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^t \vec{b} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- Producto de matrices $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$. $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ [6]

- **Ejercicio 1.3.1** HVZ12, ejemplo I, pg. 36. Estudiar si los productos AB y BA son posibles, y en caso

afirmativo determinarlos. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $A[\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n] = [A\vec{b}_1 \dots A\vec{b}_n]$

- Propiedades algebraicas:

- Asociativa: $\forall A, B, C \in M \quad A(B C) = (A B) C$
 M es el conjunto de matrices, y A, B y C han de ser multiplicables en ese orden.
- Distributiva respecto a la suma de matrices:
 $\forall A, B, C \in M \quad A(B + C) = A B + A C \quad (A + B) C = A C + B C$
- Pseudoasociativa: $\forall A, B \in M$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha A) B = A (\alpha B) = \alpha(A B)$

- Matriz identidad: $A_{m \times n} I_n = A_{m \times n} \quad I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$

- El producto de matrices no es necesariamente conmutativo

- Traspuesta del producto:

$(AB)^t = B^t A^t$, siempre que se pueda realizar el producto AB . Se extiende al producto de cualquier número de matrices: por ejemplo $(ABC)^t = C^t B^t A^t$

- El producto matriz-vector es un vector. $A\vec{v} = \vec{w}$.

- Otras propiedades de la trasposición de matrices:
 $(A^t)^t = A$ $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ $(A + B)^t = A^t + B^t$

- Producto matriz vector calculado como c.l.:

$$[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \vec{a}_1 + \dots + v_n \vec{a}_n \quad [7]$$

En $A\vec{v} = \vec{w}$, \vec{w} resulta ser la c.l. de las columnas de A tomando como coeficientes las entradas de \vec{v} . El coeficiente que acompaña a la columna i de A es la entrada i de \vec{v} .

Ejercicio 1.3.2

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A & \vec{v} & & \vec{w} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times -1 \\ 0 \times 1 + 0 \times 2 + 6 \times -1 \\ 1 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times -1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↑
Desarrollamos el producto
con la regla [6]

↑ Desglosamos en sumandos
y sacamos factor común

Queda demostrada la interpretación
del producto matriz-vector como c.l.

- Dada una matriz A_n y un número natural k , entonces A^k , leído como A a la potencia k , es el producto de A por sí misma k veces.

Se define $A^0 = I$

1.3 Expresión matricial y vectorial de un SL

Representación del SL mediante la ec. matricial $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad [1]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A \qquad \vec{x} \qquad \qquad \qquad \vec{b}$

Desarrollando el producto, y teniendo en cuenta ec. [1].

$$\vec{x}_{n \times 1} \text{ es solución del SL [1]} \Leftrightarrow \vec{x}_{n \times 1} \text{ es solución de la ecuación matricial } \boxed{A\vec{x} = \vec{b}} \quad [8].$$

Representación del SL mediante una ec. vectorial

Partimos de la igualdad:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

descomponiendo el vector de la izquierda en n sumandos, y sacando como factor común las x_1, x_2, \dots, x_n , obtenemos:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ por tanto}$$

$$\boxed{x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}}, \quad [2] \quad \text{siendo } \vec{a}_1 \dots \vec{a}_n \text{ las columnas de } A.$$

\vec{x} es solución del SL $\Leftrightarrow \vec{x}$ es solución de la ecuación vectorial $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$.

Expresado de otra forma, la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si \vec{b} es una combinación lineal de las columnas de A . Cada conjunto de coeficientes de la combinación lineal es una solución posible del SL.

La ecuación se ha designado como [2] porque ya había sido utilizada, expresando en ella que \vec{b} es combinación lineal de los vectores $\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\}$ si existen coeficientes (c_1, \dots, c_n) , aquí denotados como $(x_1 \dots x_n)$, para los que se cumple la igualdad.

Es obvio el paso de la ec. [8] a la [2] y viceversa, teniendo en cuenta el desarrollo del producto matriz-vector como combinación lineal.

Repaso del producto matriz-vector

Sea $A_{m \times n}$ con columnas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, y sea \vec{x} un vector de n entradas, $\vec{x}_{n \times 1} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces el producto $A\vec{x}$, es la suma de las columnas de A , pesando cada una de ellas ordenadamente con cada entrada de \vec{x} .

$$A\vec{x} = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

Expresado de otra forma, el producto $A\vec{x}$ es la combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes o pesos las entradas de \vec{x} .

- **Ejercicio 1.3.3** Dado el SL de ecuaciones: $\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$, obtén la correspondiente ecuación matricial y la correspondiente ecuación vectorial.
- **Teorema 1.3.1** En un SLH indeterminado, se cumple:
 - la suma de soluciones es solución
 - el producto de una solución por un escalar es solución
 - como consecuencia de los dos resultados anteriores, la combinación lineal de soluciones es solución

1.3 Ejercicios

- **1.3.4** Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$. a) Encuentra a simple vista una solución particular de $A\vec{x} = \vec{0}$ que

no sea la solución $\vec{0}$, teniendo en cuenta que solución es el par de coeficientes (α, β) tal que la combinación $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$ es igual a $(0, 0, 0)$, siendo \vec{a}_1 y \vec{a}_2 las columnas de A .

b) Encuentra la solución general basándote en el resultado anterior y justifica la respuesta.

- **1.3.5** a) Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{b} = (3, 5, 8, 12).$$

b) Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo (la misma A y $\vec{b} = \vec{0}$).

- 1.3.6 Considera el sistema lineal cuya matriz aumentada tiene la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$
 - (a) ¿ Para que valores de a y b tiene el sistema lineal infinitas soluciones ?
 - (b) ¿ Para qué valores de a y b es el sistema lineal incompatible?

Enunciado tomado de S.J Leon "Linear Algebra with Applications". Novena edición. Pearson 2015. pag. 41

- 1.3.7 Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:

$\vec{v} = (17 \text{ mg de vitamina C , } 54 \text{ mg de calcio, } 31 \text{ mg de magnesio})$

- Ejercicios de HVZ12: 14 y 15 (pg. 39).

1.4 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

Aplicaciones o transformaciones

- Definición de aplicación f de un conjunto S en un conjunto T como una regla que asigna a cada elemento S un elemento, y solo uno, de T .

Ejemplos:

Aplicación de \mathbb{R} en \mathbb{R} $y = 3x$

Aplicación de \mathbb{N} en \mathbb{N} $y = n^2$

(son los ejemplos A.1 y A.2 de HVZ12, pgs. 25-26)

- En $f(v) = w$, se dice de w que es la imagen de v , y se dice de v que es el original o antecedente de w .
- Imagen de f , $\text{Im}f = \{f(v) / v \in S\}$. $\text{Im}f \subseteq T$
- Aplicación sobreyectiva o suprayectiva: $\text{Im}f = T$
- Aplicación inyectiva: Cada elemento de $\text{Im}f$ tiene como máximo un antecedente.
- Aplicación biyectiva: sobreyectiva e inyectiva a la vez.
- Ejercicio 1.4.1** Rellena la tabla.

	sobreyectiva	inyectiva	biyectiva
$3x$ $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$			
n^2 $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$			
x^2 $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$			
x^2 $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$			

- Dadas f de S en T y g de T en U se define la composición de f y g , cómo:

$$g \circ f(v) = g(f(v))$$

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ S & \mapsto & T & \mapsto & U \\ v & & f(v) & & g(f(v)) \end{array}$$

- La composición de aplicaciones es asociativa.
- La composición de aplicaciones no necesariamente es conmutativa.

Ejercicio 1.4.2 Composición de dos aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . (HVZ12, Ejemplo B, pg. 27).

Aplicaciones Lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

- Por ser \mathbb{R}^n el conjunto inicial y \mathbb{R}^m el conjunto final, f asigna a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$.
 $\vec{y} = f(\vec{x})$

- Definición 1 de aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m :

f de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m es aplicación lineal si existe $A_{m \times n}$ tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

A se denomina matriz estándar asociada a la aplicación lineal.

La imagen de un vector mediante una aplicación lineal (a.l.) se obtiene de forma muy sencilla, simplemente se premultiplica el vector por la matriz asociada.

- **Ejercicio 1.4.3** Considera la aplicación lineal f con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

a) Calcula la imagen de $\vec{x} = (1, 5)$.

b) Calcula el antecedente de $\vec{y} = (-1, 18)$, si existe.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Otra forma de expresar f es esta: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$

- Ecuaciones de una aplicación lineal.

En el ejemplo anterior son:
$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

- Si $m = n$ la aplicación lineal recibe el nombre de endomorfismo.
- **Ejercicio 1.4.4** Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de \mathbb{R}^5 en \mathbb{R}^3 que asigne a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:

$$\begin{cases} y_1 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \text{ es la suma de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$

Ejercicios que introducen **matriz de simetría** y **matriz de proyección**:

- Ejercicio 1.4.5. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que asigne a un vector \vec{x} su reflejado o simétrico respecto del eje X .
- Ejercicio 1.4.6. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que asigne a un vector \vec{x} su proyección sobre el eje X .
- Ejercicio 1.4.7. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 que asigne a un vector \vec{x} su simétrico respecto del plano XY .
- Ejercicio 1.4.8. En \mathbb{R}^3 , determina la matriz estándar A de la aplicación lineal que asigne a cada vector \vec{x} su proyección ortogonal sobre el plano XY .

- Definición 2 de aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m . f de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m es a. l. si cumple:

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Las definiciones 1 y 2 son equivalentes: o f cumple las dos definiciones o no cumple ninguna.
- Comprueba gráficamente con el Ejemplo 1.4.5 utilizando $\vec{a} = (2, 0)$ y $\vec{b} = (1, 2)$, que el reflejado de la suma es igual a la suma de los reflejados.

- Propiedades de las aplicaciones lineales:

$$\bullet f(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\bullet f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

- Definición/construcción de la matriz estándar A de la aplicación lineal f . Ejemplo con conjunto de partida \mathbb{R}^3 , extensible a \mathbb{R}^n .

$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, siendo \vec{e}_i el vector que tiene todas las entradas 0 excepto la de la posición i que vale 1.

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3)$$

↑
Por ser f a.l.

$$\vec{y} = x_1 f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\vec{y} = \underbrace{[f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3)]}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{x}$$

$$A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3)]$$

Para una a.l. de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m :

$$\vec{y}_{m \times 1} = \underbrace{[f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)]}_{A_{m \times n}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Análisis de A para los cuatro últimos ejercicios.
- Se denomina rango de una a.l. de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m al rango de su matriz estándar asociada.
- El endomorfismo f en \mathbb{R}^n tal que $f(\vec{x}) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se denomina endomorfismo identidad y se denota id .
 $id(\vec{x}) = \vec{x}$
 La matriz estándar asociada al endomorfismo $id(\vec{x})$ en \mathbb{R}^n es la matriz identidad de orden n , I_n .

- Ejercicio 1.4.9 (HVZ12, ejemplo E, pg. 31). Obtén la imagen del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, mediante la aplicación lineal f de matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
- Matriz estándar asociada a la composición de aplicaciones lineales f y g

$$\begin{array}{ccccc}
 & A & & B & \\
 & f & & g & \\
 \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^m & \longmapsto & \mathbb{R}^p \\
 \\
 \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) & \longmapsto & g(f(\vec{x})) \\
 \\
 \vec{x} & \longmapsto & A\vec{x} & \longmapsto & B A\vec{x}
 \end{array}$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^p$$

$$g(f(\vec{x})) = B_{p \times m} A_{m \times n} \vec{x}$$

la matriz asociada a $g \circ f$ es $(B A)_{p \times n}$

Nótese como la aplicación o matriz que aparece más a la izquierda es la segunda en actuar.

- Justificación de que la imagen de una recta mediante una aplicación lineal es una recta

Para simplificar tomamos la recta en \mathbb{R}^2 . La forma vectorial paramétrica de sus puntos es $\vec{x} = \vec{p} + \alpha \vec{v}$, siendo \vec{v} el vector director, α parámetro libre, y \vec{p} un vector distinto de cero si la recta no pasa por el origen.

$$A\vec{x} = A(\vec{p} + \alpha \vec{v}) = A\vec{p} + A\alpha \vec{v} = A\vec{p} + \alpha A\vec{v}$$

Vemos que la imagen es la recta de vector director $A\vec{v}$, y su desplazamiento respecto del origen $(0, 0)$ vendrá dado por el vector $A\vec{p}$.

1.4 Ejercicios

- 1.4.10. Considera tres pruebas A,B,C con dos partes cada una con pesos 50%-50%, (ejercicios 1 y 2) 75%-25% (ejercicios 3 y 4) y 80%-20% (ejercicios 5 y 6). Obtén la matriz que multiplicada por las calificaciones $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ de los seis ejercicios produce como resultado las calificaciones $(\text{calif}_A, \text{calif}_B, \text{calif}_C)$ de las tres pruebas.
- 1.4.11. Halla la matriz de la simetría respecto del plano $x=y$ en \mathbb{R}^3 .

Ejercicio que introduce la **matriz de rotación**:

- 1.4.12. En \mathbb{R}^2 halla la matriz de un giro alrededor del origen de ángulo ϕ en sentido positivo.
- HVZ12. Algún/os apartado/s del Ejercicio 5 (pg. 38)
- HVZ12. Uno de los apartados del Ejercicio 6 (pg. 38)

1.5. Tratando múltiples valores de \vec{b} en $A\vec{x} = \vec{b}$. La ecuación $AX = B$.

Ejercicio 1.5.1 Si queremos estudiar/resolver un SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para dos valores \vec{b}_1 y \vec{b}_2 , es decir $A\vec{x} = \vec{b}_1$ es un SL y

$A\vec{x} = \vec{b}_2$ es el otro SL, podemos aplicar la eliminación gaussiana sobre una matriz ampliada con dos columnas a la derecha.

Al llegar a la forma escalonada de esta matriz, usamos la primera y segunda columna de la derecha para completar el estudio/resolución del primer y segundo sistema, respectivamente.

Lo aplicamos al siguiente ejemplo, que es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, compatible determinado. Lo resolvemos mediante la eliminación de Gauss-Jordan, llegando hasta la forma escalonada reducida.

$$\begin{array}{ccc|cc}
 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\
 1 & 4 & 4 & 7 & 7 \\
 1 & 7 & 8 & 8 & 9
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc|cc}
 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
 0 & 4 & 6 & 4 & 4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc|cc}
 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
 0 & 0 & -2 & -8 & -4
 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \qquad \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2$

$$\begin{array}{ccc|cc}
 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\
 0 & 0 & -2 & -8 & -4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc|cc}
 1 & 0 & 0 & 11 & 7 \\
 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\
 0 & 0 & -2 & -8 & -4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc|cc}
 1 & 0 & 0 & 11 & 7 \\
 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 4 & 2
 \end{array}$$

Hemos completado G-J.

$\text{rg}(A)$ =número de filas, por tanto compatible para cualquier \vec{b} .
Además el rango es igual al número de incóg., por tanto SCD.

Podemos leer las soluciones a la derecha.

Para el SL $A\vec{x} = \vec{b}_1$ la solución es $\vec{x}_1 = (11, -5, 4)$, por tanto $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$

Para el SL $A\vec{x} = \vec{b}_2$ la solución es $\vec{x}_2 = (7, -2, 2)$, por tanto $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$

Por otra parte sabemos que $A [\vec{x}_1 \ \vec{x}_2] = [A\vec{x}_1 \ A\vec{x}_2]$, como propiedad del producto de matrices.

y la última matriz es igual a $[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$

$$\text{Por tanto } A \underbrace{[\vec{x}_1 \ \vec{x}_2]}_X = \underbrace{[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2]}_B$$

Si tuviéramos que obtener la solución X de la ecuación $AX = B$, siendo B una matriz, aplicaríamos este mismo procedimiento de reducción de Gauss-Jordan, pero en la "matriz ampliada múltiple" $[A | B]$.

$$\text{Los datos serían } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ y la solución } X = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$[A | B] \sim \dots \sim [I | X] \quad X \text{ es la solución de } AX = B$$

Cada columna de X es la solución correspondiente a la misma columna en B .

Nótese que en este ejemplo A es de orden 3 y tiene rango 3, por tanto la forma escalonada reducida de A es la matriz identidad de orden 3, y el SL es compatible y determinado para cualquier vector \vec{b} .

1.6 Inversa de un endomorfismo e inversa de una matriz cuadrada

- Un endomorfismo f en \mathbb{R}^n se dice que es invertible si existe un endomorfismo g en \mathbb{R}^n tal que:
 $g \circ f = f \circ g = id$, y en tal caso se dice del endomorfismo g que es el inverso de f , y se le denota como f^{-1} . Además f^{-1} si existe, es único.

Por tanto si f es invertible, $f^{-1}(f(\vec{x})) = f(f^{-1}(\vec{x})) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- Una matriz A de orden n se dice que es invertible si existe una matriz B de orden n tal que: $AB = BA = I_n$
Si B existe es única, se denomina inversa de A y se denota como A^{-1} .
- Si f es un endomorfismo en \mathbb{R}^n y A su matriz estándar asociada, entonces f es invertible $\Leftrightarrow A$ es invertible.
En caso de que sean invertibles la matriz asociada a f^{-1} es A^{-1} , es decir, $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$.

$$\begin{aligned}f \circ f^{-1} &= f^{-1} \circ f = id \\ AA^{-1} &= A^{-1}A = I\end{aligned}$$

- **Ejercicio 1.6.1** (HVZ12, ejemplo C, pgs. 42-43). Obtención de la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ mediante el método de Gauss-Jordan.

Explicación para una matriz A de orden n .

1) En primer lugar se resuelve la ec. matricial $AB = I$, siendo B la matriz incógnita

$$A[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n]$$

Tenemos n sistemas $A\vec{b}_i = \vec{e}_i$, de forma que en cada sistema $[A | \vec{e}_i]$ el vector solución es \vec{b}_i . La matriz de coeficientes es la misma, por tanto las operaciones elementales que hay que realizar son las mismas en los n sistemas.

Escribimos la matriz ampliada del SL múltiple así: $[A \ | \ \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n]$

$$[A \ | \ I] \xrightarrow{\text{Reducción de G-J}} \dots \xrightarrow{\text{Reducción de G-J}} [I \ | \ B]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A_{\text{red}}}$

↑ matriz buscada A^{-1}

2) Efectuando el producto $A^{-1}A$ obtendremos también I y así se comprueba que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Justificación del apartado 2):

$$[A^{-1} \ | \ I] \xrightarrow{\text{efectuando las operaciones lineales inversas a las anteriores y en orden inverso.}} \dots \xrightarrow{\text{efectuando las operaciones lineales inversas a las anteriores y en orden inverso.}} [I \ | \ A]$$

- La inversa de A_n existe si y solo si el $\text{rg}A=n$, o lo que es lo mismo, existe inversa si y solo si la forma escalonada reducida de A , A_{red} , es la identidad.

En efecto, si en el sistema de matriz ampliada $[A \mid \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n]$ la matriz A tiene rango menor que n , entonces el SL queda incompatible para algún \vec{e}_i , y por tanto no existe la inversa.

- Dadas A y B cuadradas e invertibles del mismo orden, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Esta propiedad se extiende a cualquier número de matrices.
- Otra forma de resolución de $A_n\vec{x} = \vec{b}$ si $\text{rg}A=n$ es $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Vemos que si el rango de la matriz cuadrada A es completo, entonces el sistema es SCD independientemente del valor de \vec{b} .

Ejercicio 1.6.2. Resuelve el SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = (4, 6)$, utilizando la inversa de la matriz A .

- Se dice que una matriz cuadrada es singular si no es invertible. Si es invertible se dice que no es singular.
- **Condiciones equivalentes a la no singularidad** Dada A_n las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - A es no singular.
 - A tiene rango n .
 - $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado para cualquier \vec{b} .
 - La forma escalonada reducida de A es la identidad.

1.6 Ejercicios

- **Ejercicio 1.6.3** Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices, utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

- **Ejercicio 1.6.4** Resuelve el SL $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ utilizando la inversa de la matriz de coeficientes determinada en el ejercicio anterior.

- **Ejercicio 1.6.5** Mediante eliminación gaussiana determina el rango de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$ en función del parámetro k . ¿Para que valores de k es A invertible?

- Ejercicios de HVZ12:

- Ejemplo D, pg. 44. Obtén la inversa de la matriz mediante el método de Gauss-Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo E, pg. 44. Encuentra la inversa de la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2)$. *Pista: Utiliza la matriz estándar asociada.*

- Ejemplo G, pg. 47. Resuelve el SL $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Ejercicios 5, 6 y 7. Algún/os apartado/s, pg. 48.