Tutorías presenciales (T.P.)

Ruth Carballo Fidalgo (UC). 2021-2022.

Contents

1 Semana 14 de febrero **2**

2 Semana 28 de febrero **3**

3 Semana 7 de marzo **4**

4 Semana 21 de marzo **5**

5 Semana 4 de abril **6**

6 Semana 25 de abril **7**

7 Semana 2 de mayo **8**

8 Semana 9 de mayo **10**

9 Semana 16 de mayo **11**

1 Semana 14 de febrero

- **No está en los apuntes**.

<table>
<tr><td colspan="2">Considerado el sistema lineal: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \qquad + x_5 = 3 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>(0.50 pts) Escribe la solución general en forma <u>vectorial paramétrica</u>, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^5$ y α_i parámetros libres.</td><td>(0.50 pts) Escribe dos soluciones del correspondiente sistema homogéneo que sean linealmente independientes entre sí.</td></tr>
<tr><td>$\vec{x} =$</td><td>$\vec{x_1} =$ $\qquad$ $\vec{x_2} =$</td></tr>
</table>

Justificación:

- **1.2.8 apartados a) y b)** .

Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ con: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \\ a \end{bmatrix}$, con a parámetro, y el vector $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ b \end{bmatrix}$, con b parámetro.

a) Obtén el rango del conjunto S en función del parámetro a.

b) Determina los valores de a y b para que $\vec{v}_4$ sea combinación lineal de los vectores de S.

2 Semana 28 de febrero

- Calcula la inversa de A mediante el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} =$

Comprueba el resultado:

- Otros modelos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resultados en orden:

$A^{-1} =$

```
 2     1    -1
 1    -1    -1
-1     0     1
```

$A^{-1} =$

```
 1     1    -1
 2    -1    -1
-1     0     1
```

$A^{-1} =$

```
 4     1    -3
-1    -1     1
 1     0    -1
```

$A^{-1} =$

```
-1     1     2
-1    -1     1
 1     0    -1
```

3 Semana 7 de marzo

Nombre:

Puntuación sobre 5: 1 + 1 + 1 + 2

Escribe los resultados en esta página y presenta todas las justificaciones en la página de atrás, añadiendo las hojas que necesites.

1. (Leon 2015, pg. 116). Find all possible choices of c that would make the following matrix singular: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$. *Pista: Puedes simplificar el determinante con una operación de reemplazamiento en la fila 2 y otra en la fila 3. Singular significa "no invertible".*

   Resultado:

2. (Leon 2015, pg. 116). Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Use the elimination method to evaluate $\det(A)$. *Pista: Ya que el determinante de una matriz cuadrada escalonada es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, basta obviamente con llegar a una forma escalonada cualquiera para realizar, sin dificultad, la evaluación pedida.*

   Resultado:

3. (Leon 2015, pg. 124). Given $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ determine the $(2, 3)$ entry of A^{-1} by computing a quotient of two determinants. *Pista: Se refiere a calcular la entrada de (i, j) de la inversa a partir del cociente entre el cofactor que corresponda y el determinante de A. En efecto, salvo por el factor multiplicativo (-1) o (1), el cofactor es un determinante.*

   Resultado:

Ejercicio 2.16 (HVZ12, ejerc. 7c, pg. 95). Obtén los valores de a y b para que la siguiente matriz sea invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$$

Haz uso del determinante simplificándolo previamente (realizando operaciones de reemplazamiento, $F_i = F_i + \alpha F_j$, y sacando factor común).

Resultado:

4 Semana 21 de marzo

Una de estas dos versiones:

- Ejerc. 3.21 Escribe el vector $\vec{v} = (5, 6)$ como suma de dos vectores, uno sobre la recta $\{(x, y) \,/\, y = 2x\}$ y otro sobre la recta $\{(x, y) \,/\, y = x/2\}$ (*Tomado de Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications". Quinta edición. 2016. Pearson pg. 90*).

- Los dos ejercicios siguientes de son del libro "Linear Algebra with Applications" edición 9. S.J. Leon. Pearson. 2015. (O tienen los datos ligeramente modificados).

  - **Ejercicio 13 pg. 145**
    Dados los vectores $\vec{x}_1 = (-1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (3, 4, 2)$, $\vec{x} = (2, 6, 6)$ e $\vec{y} = (-9, -2, 5)$,

    a) ¿Pertenece $\vec{x}$ al subespacio generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$? .....

    b) ¿Pertenece $\vec{y}$ al subespacio generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$? ......

    (*Pista RC: Es lo mismo que preguntar si el vector es combinación lineal del conjunto* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.)

    c) Añadido: Obtén la ec. implícita del subespacio generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ denotando las variables como x, y, z

    ....

  - **Ejercicio 10 pg. 162**
    Los vectores $\vec{x}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{x}_2 = (2, 5, 4)$, $\vec{x}_3 = (1, 3, 2)$, $\vec{x}_4 = (2, 7, 4)$, $\vec{x}_5 = (1, 1, 0)$ generan $\mathbb{R}^3$. Reduce el conjunto para formar una base de $\mathbb{R}^3$.

    ....

5 Semana 4 de abril

Uno de estos dos formatos

- **Sobre 6 puntos**

  - **EJERCICIO 4.4 (AMPLIADO)** Dada la aplicación lineal f con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determina

    a) Una base y la dimensión de Imf. *Es decir, base y dimensión de ColA* (1+0.25 puntos)

    b) Una base y la dimensión de Ker$f$. *Es decir, base y dimensión de NulA* (1+0.25 puntos)

    c) El núcleo de f te permite obtener las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de A. Si el núcleo no resulta ser el vector $(0, 0, 0, 0)$, escribe una relación de dependencia lineal entre dichas columnas, denotándolas como $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ y $\vec{a}_4$ (por ese orden en A). (1 puntos)

  - **EJERCICIO 4.5 (UN APARTADO)** Obtén la matriz estándar de la siguiente transformación lineal en $\mathbb{R}^2$:

    simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}x$ (2.5 puntos)

- **Sobre 10 puntos, desglosados como 3.4, 3.4 y 3.2 puntos**

  - **EJERCICIO 4.2**. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

    $(1, 0, 0) \longmapsto (1, 1, 1) \qquad (0, 1, 0) \longmapsto (2, 0, -3) \qquad (0, 0, 1) \longmapsto (0, 0, 4)$

    a) Halla la matriz estándar asociada a f.

    b) Halla la imagen de $\vec{a} = (2, 5, -3)$

    c) Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2, 4, -5)$

  - **EJERCICIO 4.3**. Sea f la aplicación lineal en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c+3, 2)$. a) Determina la matriz estándar asociada a f.

    b) Determina una base de Ker$f$ en función del parámetro c. *Kerf es Nul(A), siendo A la matriz estándar asociada.*

  - **EJERCICIO 4.4** Dada la aplicación lineal f con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determina:

    a) Una base y la dimensión de Imf. *Es decir, base y dimensión de ColA*

    b) Las ecuaciones implícitas de Imf. *Es decir, de ColA*

6 Semana 25 de abril

Autovalores, autovectores y diagonalización

Los ejercicios utilizados en esta tutoría fueron nuevos, no están en los apuntes.. Todos los apartados tienen la misma puntuación: 1.1 pts (el último ejercicio tiene un único apartado). Presenta todos los razonamientos, y todos los cálculos intermedios.

Ejercicio 12

a) Encuentra los autovalores de la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.	
b) Determina una base B de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de A.	$B =$
c) Determina la matriz asociada a f respecto de la base B del apartado anterior.	
d) Justifica (en las JUSTIFICACIONES) que existe una recta de vectores que permanecen fijos, es decir, $f(\vec{v}) = \vec{v}$ para todos los vectores de la recta, y obtén la ecuación implícita de esa recta.	Ec. implícita:
e) ¿Es la transformación sobreyectiva?. Razona la respuesta.	

Ejercicio 13

Considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que:
$\vec{a} = (1, 0, 0)$ y $\vec{b} = (0, 1, 2)$ se transforman en 3 veces ellos mismos
$\vec{c} = (1, 1, 1)$ se transforma en su opuesto.

a) Obtén las matrices P invertible y D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$, siendo A la matriz estándar de la aplicación lineal.	$P =$ $D =$
b) Calcula A	$A =$
c) Comprueba que $AP = PD$	$AP =$ $PD =$
d) Obtén $f(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.	

Ejercicio 14

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{bmatrix}$, halla los valores de a y b para que A <u>no sea diagonalizable</u>.	

Justificaciones:

7 Semana 2 de mayo

Autovalores, autovectores y diagonalización

Ejercicio 15 (6 modelos de matriz, aleatoriamente asignada una de ellas a cada alumno)

$$A = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/6 \\ -1/6 & 5/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 7/3 & -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. **Tabla de autovalores y base de subespacios propios (4 puntos):**

Autovalor (rellena una fila para cada autovalor distinto, usando las que necesites)	Base del subespacio propio (vector o vectores entre paréntesis y separados por coma si hay más de uno)
$\lambda =$	$B =$
$\lambda =$	$B =$
$\lambda =$	$B =$

2. **Interpretación geométrica cualitativa y cuantitativa:**

   Escribe X en la primera columna de la respuesta correcta (**1 punto**).

   En la segunda escribe el factor de expansión ($k > 1$) o de contracción ($0 < k < 1$) en caso de que la aplicación lineal sea de ese tipo. En la tercera escribe la matriz B. (**2 puntos**)

	Simetría ortogonal respecto del plano de base B	$B =$
	Proyección ortogonal sobre el plano de base B	$B =$
	Expansión de factor $k =$ según la recta de base B	$B =$
	Expansión de factor $k =$ en el plano de base B	$B =$
	Contracción de factor $k =$ en el plano de base B	$B =$

3. **Escribe si es verdadero (V) o falso (F) en la primera columna** (**0.75 correcto**, $-$**0.15** incorrecto, para cada apartado)

	La aplicación lineal dada es inyectiva, porque cada vector del subespacio imagen tiene un único antecedente.
	La aplicación lineal dada es sobreyectiva, porque todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tienen antecedente(s)

4. **Escribe (V) en la primera columna de la respuesta verdadera**. **Si seleccionas la segunda opción debes escribir la base** B **donde se indica**
(**1.5 correcto**, $-$**0.30** incorrecto)

	Nul(A) o núcleo de la aplicación lineal o Ker$f$ es el subespacio $\{(0,0,0)\}$
	Nul(A) o núcleo de la aplicación lineal o Ker$f$ tiene dimensión mayor o igual que uno, y una base es $B =$

Justificaciones:

8 Semana 9 de mayo

Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

Presenta para los resultados el valor numérico con precisión de cuatro decimales o la expresión exacta más simplificada posible.

EJERCICIO. Para el triángulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (-3, -1, 0)$, rellena los resultados pedidos en la siguiente tabla.

	Resultado	Puntuación máxima
Coseno del ángulo interior en vértice A		0.75
Coseno del ángulo interior en el vértice B		0.75
Escribe si el ángulo en A es agudo u obtuso		0.5
Escribe si el ángulo en B es agudo u obtuso		0.5
Vector bisector interior en vértice A		1.5
Área del triángulo		2
Coordenadas del centro geométrico del triángulo		1
Perímetro del triángulo		1.5
Coordenadas del vértice D del paralelogramo de vértices **consecutivos** CAB		1.5

JUSTIFICACIONES: razonamientos, cálculos intermedios y si lo resuelves con MATLAB, también instrucciones

Se entregaron modelos con distintos valores de los vértices, incluyendo la mayoría de las preguntas dadas aquí.

9 Semana 16 de mayo

Espacio Euclídeo Canónico $\mathbb{R}^n$

Tres modelos de ejercicio respecto de las preguntas, incluyendo siempre entre cinco y seis.
Tres modelos de ejercicio respecto de los datos de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{v}$.

Considerado en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial $W = < \vec{a} = (1, 0, -1, 0), \vec{b} = (1, 1, 0, -1) >$ y el vector $\vec{v} = (1, 0, 0, 13)$, se pide:

Una base ortogonal de W, utilizando el método de Gram-Schmidt	Base=
Una base del complemento ortogonal de W, es decir, una base de $W^{\perp}$	Base=
La solución de mínimos cuadrados del sistema lineal de matriz ampliada $[\,\vec{a}\ \vec{b}\,\vert\,\vec{v}\,]$	sol =
Los coeficientes α, β de la combinación lineal de los vectores $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ que producen el vector $\vec{v}_1$	$\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$
El vector $\vec{v_1} \in W$ más cercano a $\vec{v}$	$\vec{v}_1 =$
El vector $\vec{v_2} \in W^{\perp}$ más cercano a $\vec{v}$	$\vec{v}_2 =$
La distancia de $\vec{v}$ a W en la forma más simplificada posible	dist=
Obtén las normas al cuadrado de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}$, y a partir de los resultados explica si se cumple o no el Teorema de Pitágoras:	

Presenta en JUSTIFICACIONES todos los razonamientos, resultados intermedios, y resultados finales. Copia los resultados finales en la tabla. En caso de usar MATLAB escribe además las instrucciones ejecutadas.

JUSTIFICACIONES: