

Tutorías presenciales (T.P.)

Ruth Carballo Fidalgo (UC). Marzo-abril-mayo 2021.

Contents

1	Semana 1 de marzo	2
2	Semana 8 de marzo	3
3	Semana 22 de marzo	4
4	Semana 12 de abril	5
5	Semana 19 de abril	6
6	Semana 3 de mayo	7
7	Semana 10 de mayo	9
8	Semana 17 de mayo	13
9	Semana 24 de mayo	15

1 Semana 1 de marzo

En esta tutoría se asignaron estos ejercicios (uno por alumno):

- **Nuevo. No está en las diapositivas.** Resuelto en clase después de la T.P.

Considerado el sistema lineal: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$	
(0.50 pts) Escribe la solución general en forma <u>vectorial paramétrica</u> , es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo \vec{v}_i vectores numéricos específicos de \mathbb{R}^5 y α_i parámetros libres.	(0.50 pts) Escribe dos soluciones del correspondiente sistema homogéneo que sean linealmente independientes entre sí.
$\vec{x} =$	$\vec{x}_1 =$ $\vec{x}_2 =$

Justificación:

- **1.2.2 apartados a) y b)** . Resuelto en clase antes de la T.P.

Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ con: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ a \\ a \end{bmatrix}$, con

a parámetro, y el vector $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ b \end{bmatrix}$, con b parámetro.

- Obtén el rango del conjunto S en función del parámetro a .
- Determina los valores de a y b para que \vec{v}_4 sea combinación lineal de los vectores de S .

- **1.2.4.** Considera el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz ampliada:

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & b_1 \\ 4 & 7 & -4 & b_2 \\ -6 & -3 & 1 & b_3 \end{array} \right]$$

- ¿ Es el sistema lineal compatible para todo \vec{b} ?. Razona la respuesta.
- En caso de que la respuesta sea negativa, encuentra una ecuación que incluya a b_1 , b_2 y b_3 , y que permita que el sistema sea compatible.

SOLUCIÓN: $5b_1 - 4b_2 - b_3 = 0$

- **1.2.5.** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 5t = 1 \\ 3x + 3y + 3t = 3 \\ 3x + 4y + z - 4t = 2 \end{cases}, \text{ halla:}$$

- a) La solución general en forma vectorial paramétrica.
- b) La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.
- c) La solución general en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

SOLUCIÓN:

- a) $\vec{x} = (2, -1, 0, 0) + z(1, -1, 1, 0) + t(-8, 7, 0, 1)$, con z y t parámetros libres.
- b) $\vec{x} = (19, -16, 1, -2)$
- c) $\vec{x} = z(1, -1, 1, 0) + t(-8, 7, 0, 1)$, con z y t parámetros libres.

2 Semana 8 de marzo

Un ejercicio de uno de los cuatro modelos siguientes. [Son nuevos, no están en las diapositivas.](#)

1. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$, determina mediante el procedimiento de

Gauss-Jordan la solución de los siguientes sistemas lineales. La matriz es de rango 3 y por tanto los sistemas son compatibles determinados.

a) $A\vec{x} = \vec{e}_1$

La solución \vec{x}_1 es:

b) $A\vec{x} = \vec{e}_2$

La solución \vec{x}_2 es:

c) $A\vec{x} = \vec{e}_3$

La solución \vec{x}_3 es:

Justifica las respuestas.

Efectúa el producto de la matriz A por cada solución, para comprobar que es correcta. ($A\vec{x}_i$ deberá ser igual a \vec{e}_i).

2. El mismo ejercicio pero con la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

3. Con matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

4. Con matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

3 Semana 22 de marzo

Los ejercicios utilizados en esta tutoría fueron uno de los siguientes (uno por alumno). Todos están en las diapositivas.

- (25 de marzo). Obtén el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ en función del parámetro

a . Para ello utiliza el método de orlar menores.

(HVZ12, ejerc. 2, pg. 104) .

- (26 de marzo). Estudia el tipo de solución en función del parámetro a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2 x_1 + 3 x_2 + a x_3 = 3 \end{cases}$$

(Ejercicio adicional 2.3)

- (26 de marzo). Obtén los valores de a y b para que la siguiente matriz sea invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$$

Haz uso del determinante simplificándolo previamente (sacando factor común y realizando operaciones de reemplazamiento, $F_i = F_i + \alpha F_j$) .

(HVZ12, ejerc. 7c, pg. 95).

SOLUCIONES: En el mosaico de Moodle de “Determinantes”, fichero “soluciones de algunos ejercicios”. https://personales.unican.es/carballor/20_21_G423/0_Teo_prob/T2_sols_de_algunos_ejercicios_wm.pdf

4 Semana 12 de abril

Los ejercicios utilizados en esta tutoría fueron [nuevos, no están en las diapositivas](#).

J 15/04 Los dos ejercicios siguientes de “Linear Algebra with Applications” edición 9. S.J. Leon. Pearson. 2015.

– **Ejercicio 13 pg. 145**

Dados los vectores $\vec{x}_1 = (-1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (3, 4, 2)$, $\vec{x} = (2, 6, 6)$ e $\vec{y} = (-9, -2, 5)$,

a) ¿Pertenece \vec{x} al subespacio generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$?

b) ¿Pertenece \vec{y} al subespacio generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$?

Justifica las respuestas.

(Pista RC: Es lo mismo que preguntar si el vector es combinación lineal del conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.)

– **Ejercicio 10 pg. 162**

Los vectores $\vec{x}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{x}_2 = (2, 5, 4)$, $\vec{x}_3 = (1, 3, 2)$, $\vec{x}_4 = (2, 7, 4)$, $\vec{x}_5 = (1, 1, 0)$ generan \mathbb{R}^3 . Reduce el conjunto para formar una base de \mathbb{R}^3

V 16/04 Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los \vec{v}_i los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H . Razona la respuesta.

b) A partir de la base obtenida, calcula la ecuación o ecuaciones implícitas de H .

c) Escribe un vector que no pertenezca a H . Razona la respuesta.

d) Escribe las coordenadas estándar del vector \vec{v} , sabiendo que sus coordenadas respecto de la base B son $(4, 2, 1)$, o lo que es lo mismo $[\vec{v}]_B = (4, 2, 1)$.

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base B' de H distinta de la base anterior B .

V 16/04 Otro modelo del mismo ejercicio

Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los \vec{v}_i los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H . Razona la respuesta.

b) A partir de la base obtenida, calcula la ecuación o ecuaciones implícitas de H .

c) Escribe un vector que no pertenezca a H . Razona la respuesta.

d) Escribe las coordenadas estándar del vector \vec{v} , sabiendo que sus coordenadas respecto de la base B son $(2, 4, -1)$, o lo que es lo mismo $[\vec{v}]_B = (2, 4, -1)$.

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base B' de H distinta de la base anterior B .

5 Semana 19 de abril

J 22/04 Obtén la matriz estándar de la siguiente transformación lineal en \mathbb{R}^2 :

* simetría ortogonal respecto de la recta $y = \frac{1}{4}x$

Otros modelos del mismo ejercicio

- recta $y = 4x$
- recta $y = 2x$
- recta $y = 3x$
- recta $y = \frac{1}{2}x$

J 23/04 Obtén la matriz estándar de la siguiente transformación lineal en \mathbb{R}^2 :

* proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{4}x$

Otros modelos del mismo ejercicio

- recta $y = 4x$
- recta $y = 2x$
- recta $y = 3x$
- recta $y = \frac{1}{2}x$

Soluciones La solución de un problema similar de simetría ortogonal se encuentra en la página 3 de la clase del día 22 de abril. https://personales.unican.es/carballor/20_21_G423/Clase_22_04_2slides.pdf

Para la proyección ortogonal $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, y $A = PFP^{-1}$ con la misma matriz P .

6 Semana 3 de mayo

Aplicaciones lineales

J 06/05 Sin permitir material docente. 3.4, 3.4 y 3.2 puntos.

5.2. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1, 1, 1) \quad (0, 1, 0) \mapsto (2, 0, -3) \quad (0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 4)$$

- Halla la matriz estándar asociada a f .
- Halla la imagen de $\vec{a} = (2, -3, 5)$
- Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2, -5, 4)$

Con datos diferentes en los vectores \vec{a} y \vec{b} .

- Tipo 1: $\vec{a} = (2, 5, -3)$, $\vec{b} = (2, 4, -5)$
- Tipo 2: $\vec{a} = (2, -5, 3)$, $\vec{b} = (2, -4, 5)$

5.3. Sea f un endomorfismo en \mathbb{R}^3 tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 2)$. Determina una base de $\text{Ker} f$ en función del parámetro c .

Con el siguiente dato diferente en Tipo 2: $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 1)$.

5.4 Dada la aplicación lineal f con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determina

- Una base y la dimensión de $\text{Im} f$.
- Una base y la dimensión de $\text{Ker} f$.

El apartado b) se sustituye por el siguiente: b) Ecuaciones implícitas de $\text{Im} f$

Modelo 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

Solución Ejercicio 5.2.

$$a) A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 31 \end{bmatrix} \quad \boxed{f(\vec{a}) = (-4, 2, 31)}$$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para obtener el antecedente del vector \vec{b} hay que resolver el SL con esta matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 4 & 4 \end{array} \right]$$

$$x_1 = -5$$

$$2x_2 = 2 - x_1 \Rightarrow 2x_2 = 2 + 5 \Rightarrow x_2 = 7/2$$

$$4x_3 = 4 - x_1 + 3x_2 \Rightarrow 4x_3 = 9 + 21/2 = (18 + 21)/2 \Rightarrow x_3 = 39/8$$

La solución del sistema es $(-5, 7/2, 39/8)$

$$\boxed{\vec{b} \text{ tiene un único antecedente, que es el vector } (-5, 7/2, 39/8)}$$

Solución Ejercicio 5.3.

$$\text{Ker } f \text{ se obtiene resolviendo el SL homogéneo de matriz de coeficientes: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c+3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid \vec{0}] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c+3 & 0 \\ 0 & 0 & 2-3c-9 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c+3 & 0 \\ 0 & 0 & -3c-7 & 0 \end{array} \right]$$

$$\bullet \boxed{c \neq -7/3} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{ \vec{0} \} \quad \boxed{\text{Ker } f \text{ es únicamente el vector } \vec{0}, \text{ por lo que no existe base}}$$

$$\bullet \boxed{c = -7/3}: A^* \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \boxed{B = \{(2/3, -2/3, 1)\}}$$

Comentario:

- Si $c \neq -7/3$ el único vector \vec{x} tal que $f(\vec{x}) = \vec{0}$ es el propio vector $\vec{0}$.
- Si $c = -7/3$ hay infinitos vectores \vec{x} cuya imagen es el vector $\vec{0}$, y estos son todos los vectores de la recta de \mathbb{R}^3 $r : \langle (2/3, -2/3, 1) \rangle$

7 Semana 10 de mayo

Autovalores, autovectores y diagonalización

Los ejercicios utilizados en esta tutoría fueron [nuevos](#), no están en los apuntes.

Ejercicio 1

a) Encuentra los autovalores de la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.	
b) Determina una base B de \mathbb{R}^2 formada por autovectores de A .	$B =$
c) Determina la matriz asociada a f respecto de la base B del apartado anterior.	
d) Justifica (en las JUSTIFICACIONES) que existe una recta de vectores que permanecen fijos, es decir, $f(\vec{v}) = \vec{v}$ para todos los vectores de la recta, y obtén la ecuación implícita de esa recta.	Ec. implícita:

Ejercicio 2

Considera la aplicación lineal f de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 tal que: $\vec{a} = (1, 0, 0)$ y $\vec{b} = (0, 1, 2)$ se transforman en 3 veces ellos mismos $\vec{c} = (1, 1, 1)$ se transforma en su opuesto.	
a) Obtén las matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$, siendo A la matriz estándar de la aplicación lineal.	$P =$ $D =$
b) Obtén $f(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, 2, 3)$	
c) Comprueba que $AP = PD$	$AP =$ $PD =$
d) Si te sobra tiempo al final calcula A	$A =$

Ejercicio 3

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{bmatrix}$, halla los valores de a y b para que A <u>no sea diagonalizable</u> .	
--	--

Ejercicio 4. Escribe verdadero (V) o falso (F). Hay cinco afirmaciones verdaderas y cinco falsas. No puedes escribir más de cinco verdaderas ni más de cinco falsas.

El núcleo de una aplicación lineal en \mathbb{R}^n es subespacio propio de la aplicación lineal solo si la aplicación lineal es diagonalizable.	
Si una matriz tiene determinante 0, entonces tiene el autovalor 0.	
Toda matriz diagonalizable es invertible.	
Los subespacios propios de A en \mathbb{R}^3 pueden tener como intersección únicamente el vector $\vec{0}$, o su intersección puede ser una recta.	
Si se da la factorización $A = PDP^{-1}$, con D diagonal, entonces la traza de A y la traza de D son iguales.	
Si se da la factorización $A = PDP^{-1}$, con D diagonal, entonces el determinante de A es igual al producto de los autovalores de A .	
La suma de subespacios propios es suma directa.	
La suma de los subespacios propios de A de orden n es siempre \mathbb{R}^n .	
Una matriz es diagonalizable si y solo si su polinomio característico carece de raíces complejas.	
Para las aplicaciones lineales en \mathbb{R}^n , la dimensión de la imagen es n menos la dimensión del núcleo.	

SOLUCIÓN EJERCICIO 1

a) Por ser la matriz triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal, por tanto $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$, ambos con multiplicidad 1.

b)

$$\bullet V_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / A\vec{x} = \vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / (A - I)\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad 2x + y = 0 \quad V_1 = \langle (1, -2) \rangle$$

$$\bullet V_3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / A\vec{x} = 3\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / (A - 3I)\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \quad y = 0 \quad V_3 = \langle (1, 0) \rangle$$

Un ejemplo de base de \mathbb{R}^2 formada por autovectores de f es $B = \{(1, -2), (1, 0)\}$

c) La matriz asociada a f respecto de esta base es: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) La recta de vectores fijos es el subespacio V_1 , porque los vectores tienen asociado el autovalor 1, y por tanto $f(\vec{v}) = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in V_1$. La ecuación implícita de la recta es $y = -2x$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2

De acuerdo con el enunciado \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son autovectores con autovalores asociados 3, 3, -1, respectivamente, por tanto:

$$\text{a) } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } f(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) + f(\vec{c}) = 3\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = (3, 0, 0) + (0, 3, 6) + (-1, -1, -1) = (2, 2, 5)$$

$$\text{c) } PD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, AP ha de ser una matriz cuyas columnas son, por ese orden, las imágenes de los vectores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , es decir, $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 6)$ y $(-1, -1, -1)$, que coinciden con las columnas obtenidas en PD .

$$\text{d) } A = PDP^{-1}$$

Calculamos la inversa de P mediante el método de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right] \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \end{bmatrix} = A$$

Con esta matriz A se puede resolver el apartado b) obteniendo la imagen de $\vec{v} = (2, 2, 3)$ como Av .

En el apartado c) se podría realizar la comprobación $AP = PD$ con la matriz A aquí obtenida.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3

En primer lugar calculamos los autovalores. Como la matriz es triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal, por tanto $\lambda = 2$ con multiplicidad 2 y $\lambda = -2$ con multiplicidad 1.

La matriz será no diagonalizable si y sólo si $\dim V_2 = 1$

$$V_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / A\vec{x} = 2\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / (A - 2I)\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -4 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim V_2 = 1 \Leftrightarrow \text{el rango de } A - 2I \text{ es } 2 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ y } b \neq 0$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4

Las afirmaciones son:

- **Falsa.** El núcleo de una aplicación lineal es subespacio propio de autovalor 0, porque los vectores del núcleo tienen imagen $\vec{0} = 0$ veces ellos mismos. Lo es independientemente de que f sea o no diagonalizable.
- **Verdadera.** Determinante cero implica que el núcleo tiene al menos dimensión 1, y por tanto $\lambda = 0$ es autovalor.
- **Falsa.** Las matrices diagonalizables con autovalor 0 no son invertibles.
- **Falsa.** El único vector que puede pertenecer a dos subespacios propios es el vector cero. Por ejemplo, si los autovalores son 2 y 4,

$$f(\vec{0}) = \vec{0} = 2\vec{0}$$

$$f(\vec{0}) = \vec{0} = 4\vec{0}$$
 Para el resto de vectores la imagen no puede ser a la vez 2 veces el mismo y 4 veces el mismo. Solo lo cumple el vector $\vec{0}$.
- La factorización dada expresa que A y D son semejantes entre sí. Entre semejantes es invariante traza, determinante y rango. Aquí se dice que la traza es igual, por tanto es **verdadera**.
- **Verdadera.** La factorización dada expresa que A y D son semejantes entre sí. Entre semejantes es invariante traza, determinante y rango. Aquí se dice que el determinante de A es igual al producto de los autovalores. En efecto el determinante de A es igual al determinante de D , y por ser D diagonal el determinante es el producto de los elementos de la diagonal y éstos son los autovalores.
- La suma de subespacios propios es directa. **Verdadera.**
- **Falsa.** La suma de los subespacios propios no es \mathbb{R}^n si no hay n autovectores l.i. Eso ocurre cuando hay raíces complejas del polinomio característico o cuando hay subespacios con dimensión menor que la multiplicidad del autovalor.
- **Falsa.** La condición de que el polinomio característico carezca de raíces complejas es condición necesaria para la diagonalización, pero no suficiente. Se debe cumplir además que si hay autovalores múltiples, sus subespacios propios tengan dimensión igual a la multiplicidad del autovalor.

- **Verdadera** En una aplicación lineal, la dimensión del espacio inicial es igual a la suma de la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen. En las aplicaciones en R^n el espacio inicial tiene dimensión n (también el final), por tanto la dimensión de la imagen es n menos la dimensión del núcleo.

8 Semana 17 de mayo

Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

Jueves 20 de mayo

Presenta para los resultados el valor numérico con precisión de dos decimales o la expresión exacta más simplificada posible.

Para los resultados marcados con asterisco solo se admite la solución numérica.

EJERCICIO. Para el triángulo de vértices $A = (1, 1, 0)$, $B = (5, 3, 0)$ y $C = (-3, 4, 0)$, rellena los resultados pedidos en la siguiente tabla.

	Resultado	Puntuación máxima
Coseno del ángulo interior en vértice A		1
Ángulo interior en vértice A , en grados (*)		1
Coseno del ángulo interior en el vértice B		1
Ángulo interior en vértice B , en grados (*)		1
Área del triángulo		2
Coordenadas del centro geométrico del triángulo		1
Perímetro del triángulo		1.5
Coordenadas del vértice D del paralelogramo de vértices consecutivos CAB		1.5

Viernes 21 de mayo

Presenta para los resultados el valor numérico con precisión de dos decimales o la expresión exacta más simplificada posible.

Para el resultado marcado con asterisco solo se admite la solución numérica.

EJERCICIO 1. Considerado el triángulo en E_2 de vértices $A = (1, 1)$, $B = (13, 2)$ y $C = (9, 4)$, se pide:

- (a) (2 pts) La expresión exacta del coseno del ángulo interior en el vértice C , en la forma más simplificada posible.
- (b*) (1 pts) El ángulo interior en el vértice C , en grados y con dos decimales.
- (c) (2 pts) El área.
- (d) (1 pts) La expresión exacta del centro geométrico.

EJERCICIO 2. En E_3 ,

- a) (1 pts) obtén las coordenadas del punto medio M del segmento PQ , con $P = (1, 2, 3)$ y $Q = (4, 5, 7)$.
- b) (3 pts) obtén la ecuación implícita del plano que pasa por el punto M y es perpendicular al segmento PQ .

R. Carballo U. Cantabria

9 Semana 24 de mayo

Espacio Euclídeo Canónico \mathbb{R}^n

Jueves 27 de mayo

EJERCICIO 2 de los apuntes. Considerado en \mathbb{R}^4 el subespacio vectorial $W = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, -1) \rangle$ y el vector $\vec{v} = (1, 0, 0, 13)$, se pide:

- Una base de W^\perp .
- El vector $\vec{v}_1 \in W$ más cercano a \vec{v} .
- El vector $\vec{v}_2 \in W^\perp$ más cercano a \vec{v} .
- La distancia de \vec{v} a W (la expresión más simplificada posible).

Viernes 28 de mayo

EJERCICIO 1 de los apuntes. Se considera el subespacio $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z - t = 0\}$

- Calcula una base ortonormal de H .
- Calcula una base ortonormal de H^\perp .
- Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (1, 0, 1, 1)$ sobre H .
- Calcula la distancia de \vec{v} a H .