

## Tema 8. Espacio Euclídeo Canónico $\mathbb{R}^n$

1	Bases ortogonales y ortonormales	2
2	Subespacios ortogonales	5
3	Complemento ortogonal	6
4	Descomposición ortogonal y proyección ortogonal	10
5	Proyección ortogonal conocida una base ortogonal	13
6	Base ortogonal mediante Gram-Schmidt	16
7	Ejercicios resueltos	17
8	Matriz de proyección ortogonal	21
9	Ejercicios	23

Consideramos el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  con el producto escalar canónico.

## 1 Bases ortogonales y ortonormales

Un conjunto de vectores  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice que es un **conjunto ortogonal** si cada par de vectores distintos del conjunto es ortogonal, es decir, si  $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \forall i \neq j$ .

Un conjunto de vectores  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**TEOREMA.** Si  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $S$  es un conjunto linealmente independiente y por tanto es una base del subespacio generado por  $S$ .

Una **base ortogonal** de un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  es una base de  $W$  que es además conjunto ortogonal.

Una **base ortonormal** de un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ , es una base de  $W$  que es además conjunto ortonormal.

**TEOREMA.** De cualquier subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  se puede obtener una base ortogonal, y mediante normalización de ésta, una base ortonormal. La excepción es obviamente el subespacio cero.

**TEOREMA.** La base canónica de  $\mathbb{R}^n$  es base ortonormal.

**Ejemplo 1.** Muestra que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  es un conjunto ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ , siendo

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Consideremos los tres posibles pares de vectores distintos, a saber  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$  y  $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ .

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3(-1) + 1(2) + 1(1) = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 3(-1/2) + 1(-2) + 1(7/2) = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1(-1/2) + 2(-2) + 1(7/2) = 0$$

Cada par de vectores distintos es ortogonal, por tanto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  es un conjunto ortogonal.

**Ejemplo 2.** Muestra que  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , siendo:

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \frac{(9 + 1 + 1)}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = \frac{(1 + 4 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \frac{(1 + 16 + 49)}{66} = \frac{66}{66} = 1$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{(-3 + 2 + 1)}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \frac{(-3 - 4 + 7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \frac{(1 - 8 + 7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

El conjunto  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  es un conjunto ortonormal, luego es linealmente independiente, y por tanto forma una base de  $\mathbb{R}^3$  (son 3 vectores). Por ser un conjunto ortonormal es una base ortonormal.

Cuando los vectores de un conjunto ortogonal se “normalizan” para tener longitud unidad, el nuevo conjunto sigue siendo ortogonal, y por tanto, al tener longitud unidad, forma un conjunto ortonormal.

Estos son de hecho los vectores ortogonales del ejemplo anterior, normalizados.

**TEOREMA.** Una matriz cuadrada  $A_n$  tiene columnas ortonormales si y solo si  $A^t A = I$ .

**Demostración:** Podemos escribir  $A = [ \vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n ]$  quedando por tanto  $A^t =$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1^t \\ \vec{a}_2^t \\ \vdots \\ \vec{a}_n^t \end{bmatrix}$$

$$\text{Desarrollando } A^t A \text{ obtenemos } A^t A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^t \\ \vec{a}_2^t \\ \vdots \\ \vec{a}_n^t \end{bmatrix} [ \vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n ] = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^t \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_1^t \vec{a}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{a}_n^t \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n^t \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

La última expresión es igual a  $I$  si y solo si  $\vec{a}_i^t \vec{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\vec{a}_i^t \vec{a}_j$  es el producto escalar de  $\vec{a}_i$  y  $\vec{a}_j$ , por tanto  $A^t A = I$  si y sólo si las columnas de  $A$  son vectores unitarios ortogonales entre sí.  $\square$

**TEOREMA.** Una matriz cuadrada  $A_n$  tiene columnas ortonormales si y solo si  $A^t A = AA^t = I$ .

**Demostración:** “ $\Rightarrow$ ” Por tener columnas ortonormales  $A^t A = I$  (teorema anterior)

Por tener columnas ortonormales  $A$  tiene rango  $n$  y por tanto es invertible (o simplemente por verificar  $A^t A = I$ ).

Premultiplicando  $A^t A = I$  por  $A$  por la izquierda y por  $A^{-1}$  por la derecha queda:  $AA^t = I$

“ $\Leftarrow$ ”  $A^t A = I$  implica que las columnas de  $A$  son ortonormales (teorema anterior).  $\square$

Se dice que una matriz  $A_n$  dada es **matriz ortogonal** si cumple que  $AA^t = A^t A = I$ , o lo que es lo mismo, si su inversa coincide con su traspuesta, o lo que es lo mismo, si sus columnas son base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $A$  es ortogonal también lo es  $A^t$ , por tanto las filas de  $A$  también son base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .

Es importante recordar que la base debe ser ortonormal (el nombre “matriz ortogonal” puede inducirnos a pensar, erróneamente, que bastaría con que los vectores fueran ortogonales entre sí).

Las matrices ortogonales tienen determinante 1 o  $-1$ .

$$AA^t = I \Rightarrow |A||A^t| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1$$

## 2 Subespacios ortogonales

Se dice que  $\vec{z}$  es **ortogonal a un subespacio**  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  si  $\vec{z}$  es ortogonal a todo vector  $\vec{w} \in W$ .

**TEOREMA.**  $\vec{z}$  es ortogonal al subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $\vec{z}$  es ortogonal a una base de  $W$ .

Se dice que el subespacio  $H$  es ortogonal a  $W$  si  $\forall \vec{z} \in H$ ,  $\vec{z}$  es ortogonal a  $W$ .

**TEOREMA.**  $H$  es ortogonal al subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si los vectores de una base de  $H$  son ortogonales a los de una base de  $W$ .

Si  $H$  es ortogonal a  $W$ ,  $W$  es a su vez ortogonal a  $H$  (por la simetría del producto escalar), y se dice de  $W$  y  $H$  que son **subespacios de  $\mathbb{R}^n$  ortogonales** entre sí.

**Ejemplo 3.** Considera en  $\mathbb{R}^3$  las rectas  $r = \langle (1, a, 2) \rangle$  y  $s = \langle (1, -2, 0) \rangle$ . Determina el o los valores de  $a$  tales que  $r$  y  $s$  sean subespacios ortogonales.

*Sol:* Las bases de  $r$  y  $s$  son respectivamente  $\{(1, a, 2)\}$  y  $\{(1, -2, 0)\}$ .

El producto escalar de los dos vectores es  $1 - 2a$ , por tanto las rectas son ortogonales si y solo si  $a = 1/2$ .

La recta  $r$  es la siguiente:  $\langle (1, 1/2, 2) \rangle$ .

**TEOREMA.** La suma de dos subespacios  $H$  y  $W$  ortogonales entre sí es suma directa.

En efecto todo par de vectores  $\vec{z}, \vec{w}$  no nulos, cada uno perteneciente a un subespacio, es un conjunto linealmente independiente, por ser los vectores ortogonales entre sí, y ello garantiza que la suma es directa.

---

En relación con el **Tema 6** “Autovalores, autovectores y diagonalización” se tiene el siguiente resultado:

**TEOREMA.**  $A$  es simétrica  $\Leftrightarrow$  es diagonalizable y todos sus subespacios propios son ortogonales entre sí.

Las matrices estándar  $A$  de las simetrías ortogonales en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$  respecto de rectas o planos, son simétricas porque estos endomorfismos son diagonalizables y los subespacios propios son ortogonales entre sí. Lo mismo sucede con las matrices estándar  $A$  de las proyecciones ortogonales en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  sobre rectas o planos.

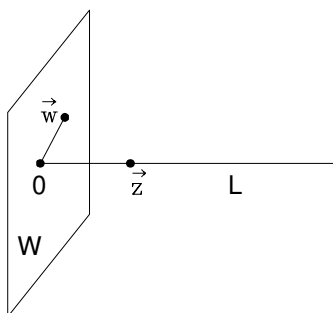
---

### 3 Complemento ortogonal

El conjunto de todos los vectores  $\vec{z}$  que son ortogonales a  $W$  se denomina **complemento ortogonal** de  $W$  y se denota como  $W^\perp$ .

$$W^\perp = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n / \vec{z} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in W\}$$

**Ejemplo 4.** Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  el subespacio  $W$  identificado con un plano que contiene el origen y el subespacio  $L$  identificado con la recta que pasa por el origen y perpendicular al plano anterior. Se tiene entonces que  $\forall \vec{z} \in L$  y  $\forall \vec{w} \in W$ ,  $\vec{z} \cdot \vec{w} = 0$ . Ver la figura. En efecto,  $L$  está formado por **todos** los vectores que son ortogonales a los  $\vec{w}$  de  $W$  y recíprocamente  $W$  está formado por **todos** los vectores ortogonales a los  $\vec{z}$  de  $L$ . Es decir,  $L = W^\perp$  y  $W = L^\perp$



Tomemos por ejemplo el caso de  $W = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ .

Los vectores ortogonales a  $W$  serán los  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ortogonales a la base de  $W$ , es decir, tales que:

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Por tanto } W^\perp = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

**TEOREMA.** Se cumplen los siguientes resultados sobre  $W^\perp$ , siendo  $W$  un subespacio del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ .

1.  $W^\perp$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$
2.  $(W^\perp)^\perp = W$
3.  $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$

OBSERVACIÓN:

Todo subespacio  $W \subset \mathbb{R}^n$  (salvo el  $\{\vec{0}\}$  y el propio  $\mathbb{R}^n$ ) admite infinitos subespacios complementarios, pero solo uno de ellos es complemento ortogonal.

Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$  cualquier recta pasando por el origen y no incluida en el plano  $XY$  es subespacio complementario del subespacio formado por el plano  $XY$ , pero el complemento ortogonal del plano  $XY$  es un subespacio único, que es la recta que define el eje  $Z$ .

Nótese en el ejemplo anterior que para obtener los vectores ortogonales a  $(a, b, c)$  en  $\mathbb{R}^3$  hay que resolver la ec.  $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$ , es decir, la ec. lineal homogénea  $ax + by + cz = 0$ .

Si  $ax + by + cz = 0$  es la forma implícita de un subespacio bidimensional  $F$  de  $\mathbb{R}^3$ , dicha forma expresa que los vectores  $(x, y, z)$  de  $F$  y los vectores  $\langle (a, b, c) \rangle^1$  son ortogonales entre sí, y que por tanto  $F$  y  $\langle (a, b, c) \rangle$  son complementos ortogonales.  $F^\perp = \langle (a, b, c) \rangle$ .

### Complemento ortogonal de un subespacio $W$ dado en implícitas: $A\vec{x} = \vec{0}$

De forma más general, para un subespacio  $W$  de dimensión  $d$  de  $\mathbb{R}^n$ , su forma implícita  $A_{n-d, n} \vec{x} = \vec{0}$  expresa que los  $\vec{x} \in W$  — que son las soluciones y por tanto  $\text{Nul}A$  — son ortogonales a las filas de  $A$ .

La base de  $W$  la forman las  $d$  soluciones independientes del SLH, o lo que es lo mismo la base de  $\text{Nul}A$ .

La base de  $W^\perp$  la forman las filas de  $A$ .

Por ejemplo, para el subespacio  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 0\}$

$B = \{(-3, 2)\}$  es base de  $W$ , porque  $(-3, 2)$  es solución de la ecuación implícita.

$C = \{(2, 3)\}$  es base de  $W^\perp$ .

Es importante darse cuenta de que el “vector que aparece” en la ecuación, en este caso  $(2, 3)$ , es precisamente el ortogonal, y por tanto no pertenece al subespacio que define la ecuación.

### Complemento ortogonal de un subespacio $W$ con base $B$ conocida

Si partimos de un subespacio  $W$  de dimensión  $d$  del cual conocemos una base  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$ , tomando  $P_B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_d]$  se tiene que la base de  $W^\perp$  son las soluciones independientes del SLH  $P_B^t \vec{x} = \vec{0}$ , o lo que es lo mismo la base de  $\text{Nul}(P_B^t)$ .

Por ejemplo partiendo de  $W = \langle (1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0) \rangle$ ,  $W^\perp$  son las soluciones del SLH

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} .$$

$$P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W^\perp = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) .$$

La matriz tiene rango 2, por tanto el SL tiene dos parámetros libres y la base de  $W^\perp$  tendrá dos vectores. Un ejemplo de base de  $W^\perp$  es  $C = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .

*Nótese que la base obtenida, puesta por filas, produce la matriz de coeficientes de la forma implícita de  $W$ .*

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_3 = 0, x_4 = 0\}$$

<sup>1</sup>Si  $(a, b, c)$  cumple la ecuación también la cumple todo múltiplo de  $(a, b, c)$

**Ejemplo 5.** Sea  $B = \{(3, 2, 2, 4), (1, 0, 0, 2), (1, -1, -1, 1)\}$  una base de  $F$ , subespacio de  $\mathbb{R}^4$ . Halla una base del complemento ortogonal de  $F$ .

Sol:

Los vectores ortogonales a los dados serán los  $(x, y, z, t)$  que cumplan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (3, 2, 2, 4) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \\ (1, 0, 0, 2) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \\ (1, -1, -1, 1) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{forma impl. de } F^\perp: \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 4t = 0 \\ x + 2t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Las 3 ecuaciones anteriores forman un SLH por lo que ya estamos viendo que  $F^\perp$  es un subespacio vectorial. Para obtener la base de  $F^\perp$  hay que resolver el sistema.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tenemos 3 ecuaciones, rango 3, y 4 incógnitas. Por tanto tenemos  $4 - 3 = 1$  parámetro libre. Tomando  $z$  como parámetro libre deducimos:

$$\begin{aligned} -4t &= 0 \Rightarrow \boxed{t=0} \\ y + z + t &= 0 \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow \boxed{y=-z} \\ x &= -2t \Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

El vector solución es de la forma  $(x, y, z, t) = (0, -z, z, 0) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los tres dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es:  $\{(0, 1, -1, 0)\}$

Nótese que  $0x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 = 0$ , o lo que es lo mismo,  $x_2 - x_3 = 0$  es la ecuación implícita de  $F$ .

**Ejemplo 6.** Se consideran en  $\mathbb{R}^3$  los subespacios  $W_1 = \langle (1, 1, 0), (0, 3, 6) \rangle$ ,  $W_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$  y  $W_3 = \langle (7, 8, 5), (6, 3, 1), (1, 3, 6) \rangle$ .

Halla una base de cada uno de los subespacios ortogonales correspondientes,  $W_1^\perp$ ,  $W_2^\perp$ ,  $W_3^\perp$ .

Sol:

a)  $W_1^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \text{ es ortogonal a } (1, 1, 0) \text{ y a } (0, 3, 6)\}$

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (1, 1, 0) &= x + y = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 3, 6) &= 3y + 6z = 0 \end{aligned}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas.  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right]$

El sistema se encuentra ya en la forma escalonada. Tomamos  $z$  como parámetro libre.

$$\begin{aligned} 3y + 6z &= 0 \Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z \\ x + y &= 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x = 2z \end{aligned}$$

El vector solución es de la forma  $(x, y, z) = (2z, -2z, z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los dos dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es  $\{(2, -2, 1)\}$

$W_1^\perp$  se expresaría como  $W_1^\perp = \langle (2, -2, 1) \rangle$

NOTA: Se puede obtener  $W_1^\perp = \langle \vec{n} \rangle$ , siendo  $\vec{n} = (1, 1, 0) \times (0, 3, 6)$  (**producto vectorial**).

b)  $W_2^\perp = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z)$  es ortogonal a  $(1, 2, 1)$

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = x + 2y + z = 0$$

La última ecuación es la ecuación implícita de  $W_2^\perp$

Tenemos una sola ecuación y tres incógnitas, por tanto dos parámetros libres. Dejando como parámetros libres  $y$  y  $z$  tendremos

$$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x = -2y - z \quad y = y, \quad z = z$$

El vector solución en forma paramétrica es  $(x, y, z) = (-2y - z, y, z) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales al dado es un subespacio vectorial de dimensión 2.

Una posible base es:  $\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ .

$$W_2^\perp = \langle (-2, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$$

c)  $W_3^\perp = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z)$  es ortogonal a  $(7, 8, 5)$ ,  $(6, 3, 1)$  y  $(1, 3, 6)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & | & 0 \\ 6 & 3 & 1 & | & 0 \\ 7 & 8 & 5 & | & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 100$$

$\det A \neq 0$ , por tanto tenemos un sistema de Cramer, con solución única, y como el sistema es homogéneo, la solución única es la trivial.

Por tanto  $W_3^\perp = \{(0, 0, 0)\}$ .

$W_3$  representa todo el espacio  $\mathbb{R}^3$ , por lo que era de esperar que  $W_3^\perp = \{\vec{0}\}$ .

Habíamos visto anteriormente como  $\vec{0}$  es ortogonal a todos los vectores.

**Ejemplo 7.** Se considera el subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $2x + y - z = 0$ . Determina una base de  $W^\perp$ .

Sol:

Podemos interpretar la ecuación  $2x + y - z = 0$  como la expresión del producto escalar de dos vectores, igualado a cero, siendo los vectores  $(2, 1, -1)$  y  $(x, y, z)$ . Los vectores  $(x, y, z)$  contenidos en el plano que representa el subespacio vectorial  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  son los vectores ortogonales al vector  $(2, 1, -1)$ , y obviamente a los múltiplos de éste.

En efecto si  $(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0$ , entonces  $\lambda(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0$

Por tanto  $W^\perp = \langle (2, 1, -1) \rangle$ , y una posible base  $B = \{(2, 1, -1)\}$

**Ejemplo 8.** Se considera el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$  y el subespacio  $W$  dado por la forma implícita siguiente: 
$$\begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} .$$
 Determina una base de  $W^\perp$ .

Sol:

$$W = \{(x, y, z) / \begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \}$$

Las ecuaciones implícitas expresan que los vectores  $(x, y, z)$  de  $W$  son a la vez ortogonales al vector  $(1, 4, 8)$  y al vector  $(1, -1, 1)$ , por tanto una base de  $W^\perp$  es  $\{(1, 4, 8), (1, -1, 1)\}$ .

## 4 Descomposición ortogonal y proyección ortogonal

El resultado  $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$ , significa que cada  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  se puede escribir de forma única como suma de un vector  $\hat{\vec{y}} \in W$  y un vector  $\vec{z} \in W^\perp$

$$\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z} \quad \text{con } \hat{\vec{y}} \in W \text{ y } \vec{z} \in W^\perp$$

$\hat{\vec{y}}$  es la **proyección ortogonal de  $\vec{y}$  sobre  $W$** , que denotamos también como  $\text{proy}_W \vec{y}$

También se puede dar esta definición equivalente: La proyección ortogonal de  $\vec{y}$  sobre  $W$  es el vector  $\hat{\vec{y}} \in W$  tal que  $\vec{y} - \hat{\vec{y}} \in W^\perp$

¿ Cómo obtener  $\text{proy}_W \vec{y}$  ?

Ya que  $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$  podemos obtener una base de  $\mathbb{R}^n$   $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d, \vec{b}_{d+1}, \dots, \vec{b}_n\}$ , con  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d\}$  base de  $W$  y  $\{\vec{b}_{d+1}, \dots, \vec{b}_n\}$  base de  $W^\perp$ .

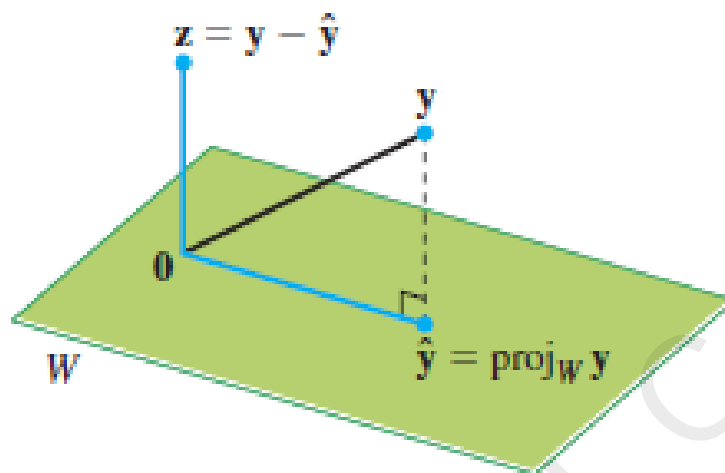
$$\text{Entonces } \vec{y} = \underbrace{c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_d \vec{b}_d}_{\text{proy}_W \vec{y} \in W} + \underbrace{c_{d+1} \vec{b}_{d+1} + \dots + c_n \vec{b}_n}_{\vec{z} \in W^\perp}$$

con  $\text{proy}_W \vec{y} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_d \vec{b}_d \in W$  y

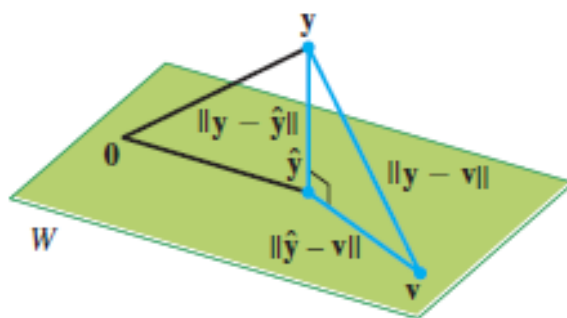
$$\vec{z} = c_{d+1} \vec{b}_{d+1} + \dots + c_n \vec{b}_n \in W^\perp$$

Una vez obtenidas las coordenadas  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , que son únicas (las coordenadas respecto de una base dada son únicas), podremos determinar el vector único  $\text{proy}_W \vec{y} \in W$  y el vector único  $\vec{z} \in W^\perp$  tales que  $\vec{y} = \text{proy}_W \vec{y} + \vec{z}$ .

Esquemas en el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$  (Linear Algebra and its Applications, Lay, Quinta edición. p. 350). Proyección ortogonal del vector  $\vec{y}$  sobre el subespacio  $\langle W \rangle$  de dimensión 2:



**FIGURE 2** The orthogonal projection of  $y$  onto  $W$ .



**FIGURE 4** The orthogonal projection of  $y$  onto  $W$  is the closest point in  $W$  to  $y$ .

Por otra parte,  $\hat{y}$  tiene la propiedad de ser el vector de  $W$  más cercano a  $\vec{y}$

$$\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| < \|\vec{y} - \vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in W \quad \text{con } \vec{v} \neq \hat{y}$$

Decimos entonces que dado  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , la **mejor aproximación** de  $\vec{y}$  que puedo obtener mediante un vector de  $W$ , subespacio de  $\mathbb{R}^n$ , es  $\text{proy}_W \vec{y}$

¿ En qué sentido es mejor aproximación?. En el sentido de menor distancia.

La **distancia** de  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  al **subespacio**  $W$  se define como la distancia desde  $\vec{y}$  al punto más cercano de  $W$ . Dicho de otra forma, la distancia de  $\vec{y}$  a  $W$  es igual a  $\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| = \|\vec{z}\|$

#### OBSERVACIONES

- $\vec{z} = \text{proy}_{W^\perp} \vec{y}$ , es decir,  $\vec{z}$  es la proyección ortogonal de  $\vec{y}$  sobre  $W^\perp$ .
- $\|\text{proy}_W \vec{y}\|$  es la distancia de  $\vec{y}$  a  $W^\perp$ .
- Si  $\vec{y} \in W$ , entonces  $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{y}$
- Si  $\vec{y} \in W^\perp$ , entonces  $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{0}$

En temas anteriores hemos estudiado proyecciones ortogonales en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ , determinando a partir de las características de la transformación cuál era la matriz asociada referida a la “base natural” de la transformación, o base de autovectores de la transformación, y cual era la matriz estándar asociada, obtenida mediante los cambios de base. Con procedimientos similares pudimos obtener la matriz asociada a la simetría ortogonal. A partir de las matrices resultaba sencillo obtener la proyección ortogonal o el simétrico de cualquier vector.

En este tema estudiamos la proyección ortogonal a partir de la descomposición ortogonal y extendemos el concepto de proyección ortogonal al espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ .

## 5 Proyección ortogonal conocida una base ortogonal

**TEOREMA.** Sea  $W$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d\}$  una base ortogonal de  $W$  e  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$proy_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_d}{\vec{b}_d \cdot \vec{b}_d} \vec{b}_d \quad [1a]$$

$$proy_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_p}{\vec{b}_p \cdot \vec{b}_p} \vec{b}_p$$

Cada sumando corresponde a la proyección ortogonal sobre un subespacio unidimensional  $\langle \vec{b}_i \rangle$ . Por tanto la proyección ortogonal de  $\vec{y}$  sobre  $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d \rangle$ , siendo  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d\}$  una base ortogonal, es igual a la suma de las  $d$  proyecciones ortogonales sobre subespacios unidimensionales, mutuamente ortogonales, en las direcciones de  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d$ .

- Si la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_d\}$  es ortonormal la expresión [1b] queda cómo:

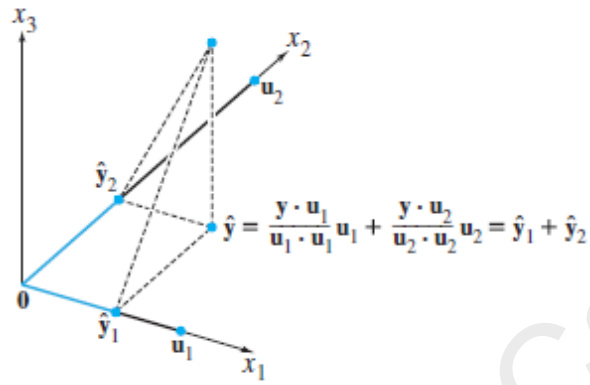
$$proy_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_d) \vec{u}_d \quad [1b]$$

Para cálculos a mano se recomienda utilizar la fórmula [1a] ya que en la [1b] aparecerán en general raíces cuadradas.

En la siguiente página, esquema en  $\mathbb{R}^3$  de la proyección sobre un subespacio  $W$  de dimensión 2 genérico del que conocemos una base ortogonal  $B$  genérica. (Lay, Linear Algebra and its Applications. Quinta edición, p. 351).

De acuerdo con la notación que usamos en esta sección, ha de tenerse en cuenta:

- La base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  de la figura ha de entenderse como una base ortogonal, no necesariamente ortonormal. En efecto en la fórmula de la figura aparecen explícitamente los productos escalares  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i$ , que no serían necesarios si la base fuera ortonormal. Para interpretar la figura de acuerdo con la notación usada en esta Sección, esta base ortogonal sería la base  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ .
- Los ejes coordenados  $x_i$  no representan los de las coordenadas estándar, sino las coordenadas relativas a una base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ , formada por los vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ , y un vector con dirección y sentido del producto vectorial  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ . Para interpretar la figura de acuerdo con la notación usada en esta Sección,  $x_1$  y  $x_2$  corresponderían a coordenadas  $c_1$  y  $c_2$ .



**FIGURE 3** The orthogonal projection of  $y$  is the sum of its projections onto one-dimensional subspaces that are mutually orthogonal.

**Ejemplo 9.** Considera en  $\mathbb{R}^2$  los vectores  $\vec{y} = (7, 6)$  y  $\vec{b} = (2, 1)$ . Encuentra la proyección ortogonal de  $\vec{y}$  sobre  $\langle \vec{b} \rangle$  y la distancia de  $\vec{y}$  a la recta  $\langle \vec{b} \rangle$ .

**Sol:**

- Puesto que se proyecta sobre un subespacio de dimensión 1, su base puede considerarse base ortogonal.

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{(7, 6) \cdot (2, 1)}{(2, 1) \cdot (2, 1)} (2, 1) = \frac{20}{5} (2, 1) = 4(2, 1) = (8, 4)$$

- La distancia de  $\vec{y}$  a  $\langle \vec{b} \rangle$  es igual a la norma de  $\vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = (7, 6) - (8, 4) = (-1, 2)$

$$d = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

*OBSERVACIÓN:* Este procedimiento es el más sencillo, pero  $\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y}$  se podría haber obtenido con otros métodos.

- Mediante el procedimiento visto en la Sección 8.4.:

Calculamos en primer lugar un vector  $\vec{z}_1$  ortogonal a  $\vec{b} = (2, 1)$ . Un ejemplo es  $\vec{z}_1 = (1, -2)$ .

Considerada la base  $B = \{\vec{b}, \vec{z}_1\}$ , con un vector en la dirección de  $\vec{b}$  y otro en la dirección ortogonal  $\vec{z}_1$ , se calculan las coordenadas de  $(7, 6)$  respecto a esta base, resultando ser  $(4, -1)$ , es decir:

$$(7, 6) = 4(2, 1) + -1(1, -2) = (8, 4) + (-1, 2)$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\in \langle \vec{b} \rangle} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\in \langle \vec{z}_1 \rangle}$$

Por tanto la proyección de  $(7, 6)$  sobre  $\langle (2, 1) \rangle$  es el vector  $\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = (8, 4)$

- A partir de la matriz asociada a la aplicación lineal vista en el Tema 5 (matriz de la proyección ortogonal en  $\mathbb{R}^2$ ), usando la base anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \dots$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = A \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

## 6 Base ortogonal mediante Gram-Schmidt

El proceso de Gram-Schmidt es un algoritmo que permite obtener una base ortogonal para cualquier subespacio de  $\mathbb{R}^n$  a partir de una base dada.

**TEOREMA.** Teorema de la Ortogonalización de Gram-Schmidt

Dada una base  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d\}$  de un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ , y definidos:

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= \vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 \\ &\vdots \\ \vec{b}_d &= \vec{a}_d - \frac{\vec{a}_d \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_d \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 - \dots - \frac{\vec{a}_d \cdot \vec{b}_{d-1}}{\vec{b}_{d-1} \cdot \vec{b}_{d-1}} \vec{b}_{d-1}\end{aligned}$$

Entonces  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$  es una base ortogonal de  $W$ . Además,

$$\langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k \rangle = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle, \text{ para } 1 \leq k \leq d$$

**Ejemplo 10.** Sea  $W = \langle (0, 1, 1), (1, 1, 2) \rangle$  un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ . Obtén una base ortogonal de este subespacio.

A partir de los vectores originales  $\vec{a}_1 = (0, 1, 1)$  y  $\vec{a}_2 = (1, 1, 2)$ , que forman la base  $B$ , vamos a construir la base  $B' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ , siendo  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  vectores de  $W$  ortogonales entre sí.

Tomamos  $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$  y a continuación construimos  $\vec{b}_2$ .

Consideremos el vector  $\text{proy}_{\langle \vec{b}_1 \rangle} \vec{a}_2$ ,

$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \text{proy}_{\langle \vec{b}_1 \rangle} \vec{a}_2$  es ortogonal a  $\vec{b}_1$  y pertenece a  $W$ , pues es combinación lineal de  $\vec{b}_1$  y  $\vec{a}_2$ .

Por tanto, una base ortogonal de  $W$  es:

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \text{proy}_{\langle \vec{b}_1 \rangle} \vec{a}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 \end{cases}$$

$$\vec{b}_1 = (0, 1, 1)$$

$$\vec{b}_2 = (1, 1, 2) - \frac{(1, 1, 2) \cdot (0, 1, 1)}{(0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)} (0, 1, 1) = (1, 1, 2) - 3/2(0, 1, 1) = (1, 1 - 3/2, 2 - 3/2) = (1, -1/2, 1/2)$$

Podemos tomar  $\vec{b}_2 = (2, -1, 1)$  para evitar fracciones.

Comprobamos que  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  forman una base ortogonal:  $(0, 1, 1) \cdot (2, -1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$

$$B' = \{(0, 1, 1), (2, -1, 1)\}$$

## 7 Ejercicios resueltos

**Ejemplo 11.** Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

a) Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:

$$\vec{v} = (17 \text{ mg de vitamina C}, 54 \text{ mg de calcio}, 31 \text{ mg de magnesio})$$

b) Determina el aporte más cercano al aporte exacto que se podría conseguir combinando los dos alimentos.

Sol.:

a) Para determinar si el aporte  $(17, 54, 31)$  se puede obtener combinando  $x$  unidades de alimento A con aporte  $(1, 5, 3)$  e  $y$  unidades de B con aporte  $(1, 2, 1)$  hay que resolver la siguiente ecuación:

$$x(1, 5, 3) + y(1, 2, 1) = (17, 54, 31)$$

$$\text{Por tanto el SL: } \begin{cases} x + y = 17 \\ 5x + 2y = 54 \\ 3x + y = 31 \end{cases}, \text{ con matriz ampliada } A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 5 & 2 & | & 54 \\ 3 & 1 & | & 31 \end{bmatrix}$$

$$A^* \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & -3 & | & -31 \\ 0 & -2 & | & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & -3 & | & -31 \\ 0 & 1 & | & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & 1 & | & 10 \\ 0 & -3 & | & -31 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

El SL es incompatible pues  $\text{rg}A=2$  y  $\text{rg}A^*=3$

Esto significa que  $\vec{v}$  no es combinación lineal de  $\vec{a} = (1, 5, 3)$  y  $\vec{b} = (1, 2, 1)$ , o dicho de otra forma, que  $\vec{v}$  no pertenece al plano  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ .

b) El vector más cercano a  $\vec{v} = (17, 54, 31)$  que se puede obtener combinando los alimentos A y B será la proyección ortogonal de  $\vec{v}$  sobre el subespacio generado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Por tanto tenemos que obtener:

$$\text{proy}_W \vec{v}, \text{ siendo } W = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

- Procedimiento según la sección 8.5:

Obtendremos en primer lugar la proyección ortogonal sobre  $W^\perp$ , por ser más sencillo aplicar la fórmula sobre un subespacio de dimensión 1. Además la base de  $W$  que conocemos no es ortogonal.

Tomamos  $W = \langle (1, 5, 3), (1, 2, 1) \rangle$ , y nos falta el vector  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in W^\perp$ .

$$\begin{aligned} (1, 5, 3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0 & \begin{cases} n_1 + 5n_2 + 3n_3 = 0 \\ n_1 + 2n_2 + n_3 = 0 \end{cases} & A^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & -3 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \\ (1, 2, 1) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0 & \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 0 \end{bmatrix} & \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10/3 + 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (1/3n_3, -2/3n_3, n_3) \end{aligned}$$

$W^\perp = \langle (1/3, -2/3, 1) \rangle$  o más simple  $W^\perp = \langle (1, -2, 3) \rangle$ ,  $\vec{n} = (1, -2, 3)$ .

Este vector también se podría haber obtenido mediante el producto vectorial.

La proyección de  $\vec{v}$  sobre la recta  $\langle \vec{n} \rangle = W^\perp$  es:

$$\text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{(17, 54, 31) \cdot (1, -2, 3)}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{(17 - 108 + 93)}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_W \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = (17, 54, 31) - \frac{1}{7}(1, -2, 3) = (118/7, 380/7, 214/7) = 2/7(59, 190, 107).$$

La expresión decimal es  $\text{proy}_W \vec{v} = (16.8571, 54.2857, 30.5714)$

- Procedimiento según la sección 8.4:

En el procedimiento anterior ya se presentó la obtención de la base de  $W^\perp$ ,  $\{\vec{n} = (1, -2, 3)\}$ .

Expresando  $(17, 54, 31)$  como combinación lineal de los vectores de la base  $B = \{(1, 5, 3), (1, 2, 1), (1, -2, 3)\}$  obtenemos:

$$(17, 54, 31) = \underbrace{\frac{48}{7}(1, 5, 3) + 10(1, 2, 1)}_{\text{proy}_W \vec{v}} + \underbrace{\frac{1}{7}(1, -2, 3)}_{\text{proy}_{W^\perp} \vec{v}},$$

sin más que resolver el SL  $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{n} \ | \ \vec{v}]$ , y tras encontrar que dicha solución es  $(48/7, 10, 1/7)$ .

$\text{proy}_W \vec{v} = 48/7(1, 5, 3) + 10(1, 2, 1) = (118/7, 380/7, 214/7)$  es el aporte más cercano posible.

Este procedimiento nos permite ver que el aporte más cercano posible se obtiene tomando  $48/7$  unidades del alimento tipo A y 10 unidades del alimento tipo B.

**Ejemplo 12.** a) Demuestra que no es posible expresar el vector  $\vec{v} = (15, 6, 4, -5)$  como combinación lineal de los vectores del conjunto  $S = \{(-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2)\}$ .

b) Obtén los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de  $S$  que dan el vector más cercano a  $\vec{v}$ .

Sol.:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

La suma de las ecuaciones 2 y 3 da incompatibilidad.

El vector de  $\langle S \rangle$  más cercano a  $\vec{v}$  es la proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\langle S \rangle$ . Obtendremos la proyección  $\hat{v}$  y las coordenadas (los coeficientes del enunciado) de esta respecto de la base  $S$ , utilizando dos métodos distintos.

- Aplicando la fórmula de proyección, cuando se conoce base ortogonal del subespacio (Sección 8.5)

Los dos vectores de  $S$  forman base de  $\langle S \rangle$ , pero esa base no es ortogonal. Aplicamos Gram-Schmidt:

$$\vec{b}_1 = (-1, 0, 0, 1),$$

$$\vec{b}_2 = (4, 1, -1, -2) - \frac{(4, 1, -1, -2) \cdot (-1, 0, 0, 1)}{2}(-1, 0, 0, 1) =$$

$$(4, 1, -1, -2) - \frac{-6}{2}(-1, 0, 0, 1) = (4, 1, -1, -2) + 3(-1, 0, 0, 1) = (1, 1, -1, 1)$$

Ya tenemos una base ortogonal en  $\langle S \rangle$ ,  $B' = \{(-1, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 1)\}$ , y podemos aplicar la fórmula de la sección 8.5.

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\langle S \rangle} \vec{v} &= \frac{(15, 6, 4, -5) \cdot (-1, 0, 0, 1)}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(15, 6, 4, -5) \cdot (1, 1, -1, 1)}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= -10 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obtenemos ahora los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de  $\langle S \rangle$ , que llamaremos  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$ , que dan el vector más cercano a  $\vec{v}$ . Para ello hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -7 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\boxed{\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 3 \end{cases}}$$

- Método de descomposición ortogonal de  $\vec{v}$  usando suma de subespacios ortogonales (Sección 8.4)

Para obtener una base del complemento ortogonal de  $\langle S \rangle = \langle (-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, 2) \rangle$  tenemos que resolver el SL homogéneo con matriz de coeficientes  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

La solución general en forma paramétrica, tomando como parámetros  $z$  y  $t$  es:  $(t, z - 2t, z, t)$

Y la base más sencilla de  $\langle S \rangle^\perp$  es  $B = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ .

Puede resultar más claro modificar la forma paramétrica a  $(x, z - 2x, z, x)$ , teniendo en cuenta que  $t = x$ .

Resolviendo el sistema:  $\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Base original de } \langle S \rangle} \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}}_{\text{Base de } \langle S \rangle^\perp}$ , obtenemos la solución  $(-1, 3, 7, 2)$ .

Base original de  $\langle S \rangle$     Base de  $\langle S \rangle^\perp$

Los coeficientes buscados son  $-1$  y  $3$ , ya que

$$\text{proy}_{\langle S \rangle} \vec{v} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ es el vector de } \langle S \rangle \text{ más cercano a } \vec{v}$$

$$\text{proy}_{\langle S \rangle} \vec{v} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

## 8 Matriz de proyección ortogonal

### Método 1

La proyección ortogonal de  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  sobre  $W$  es un endomorfismo en  $\mathbb{R}^n$ , con matriz estándar asociada  $A_{\text{proy}}$  tal que

$$A_{\text{proy}}\vec{v} = \hat{\vec{v}} \quad A_{\text{proy}} \text{ es cuadrada de orden } n.$$

Conocida una base  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$  de  $W$ , puede obtenerse  $A_{\text{proy}}$  mediante la siguiente expresión<sup>2</sup>:

$$A_{\text{proy}} = P_B(P_B^t P_B)^{-1} P_B^t \quad [2a]$$

Es obvio que la matriz  $P_B^t P_B$  es simétrica<sup>3</sup>. Esta matriz es invertible debido a la condición de que las columnas de  $P_B$  sean linealmente independientes<sup>2</sup>.

Desarrollamos seguidamente el producto  $P_B^t P_B$ :

$$P_B^t P_B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_d \end{bmatrix}_{d \times n} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_d \end{bmatrix}_{n \times d} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_d \\ \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_d \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vec{b}_d \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_d \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_d \cdot \vec{b}_d \end{bmatrix}$$

(también podríamos deducir de aquí que como el producto escalar es simétrico la matriz  $P_B^t P_B$  es simétrica.)

En el desarrollo de  $P_B^t P_B$  vemos de forma inmediata que si la base  $B$  es ortogonal  $P_B^t P_B$  es una matriz diagonal, y que si la base es ortonormal  $P_B^t P_B = I_d$ .

En este último caso la matriz de proyección queda:  $A_{\text{proy}} = P_B P_B^t \quad [2b]$ .

Se puede demostrar fácilmente, utilizando la expresión [1], que la matriz es simétrica e idempotente.

La ventaja de las expresiones obtenidas es que solo requieren calcular una base  $B$  de  $W$ .

<sup>2</sup>No presentamos su deducción

<sup>3</sup> $(M^t M)^t = M^t (M^t)^t = M^t M$

## Método 2: Obtención de $A_{\text{proy}}$ a partir de su semejante diagonal

Este procedimiento se usó en el Tema 5 al estudiar la proyección ortogonal sobre una recta en  $\mathbb{R}^2$  y sobre un plano en  $\mathbb{R}^3$ . Aquí lo extendemos a subespacios de  $\mathbb{R}^n$  de cualquier dimensión.

En primer lugar obtenemos, a partir de la base  $B$  del subespacio considerado  $W$ , una base  $C$  de  $W^\perp$ , resolviendo el SL  $P_B^t \vec{x} = \vec{0}$ , o lo que es lo mismo, obteniendo una base de  $\text{Nul}(P_B^t)$ .

Así tenemos ya las bases de los dos subespacios propios ortogonales entre sí :

$\text{Col}(P_B)$  es el subespacio propio de autovalor 1,  $V_1$ .

$V_1$  es  $W$ : los vectores de  $W$  que se transforman como  $f(\vec{v}) = \vec{v}$ .

$\text{Col}(P_C)$  es el subespacio propio de autovalor 0,  $V_0$ .

$V_0$  es  $W^\perp$ . Los vectores de  $W^\perp$  se transforman como  $f(\vec{v}) = \vec{0}$

La matriz cuadrada  $P = [P_B \ P_C] = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_d \ \vec{b}_{d+1} \ \vec{b}_{d+2} \ \dots \ \vec{b}_n]$ , tiene como columnas una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por los autovectores de la proyección ortogonal.

$$\text{Por tanto } A_{\text{proy}} = PDP^{-1} = P \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{D} P^{-1}$$

Al ser los subespacios propios ortogonales, podemos obtener una matriz  $P$  cuyas columnas sean base ortonormal, si calculamos una base ortonormal  $P_B$  y una base ortonormal  $P_C$  y las unimos. Esa matriz  $Q$  es matriz ortogonal, con  $Q^{-1} = Q^t$ , por tanto la matriz  $A_{\text{proy}}$  se obtiene como:

$$A_{\text{proy}} = QDQ^t.$$

Este procedimiento requiere más cálculos, porque hace falta determinar la base del complemento ortogonal de  $W$ .

**Ejemplo 13.** Obtén la matriz de la proyección ortogonal en  $\mathbb{R}^3$  sobre el plano  $W$  de ecuación implícita  $x + y + z = 0$ .

Sol.:

$B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$  es base de  $W$ , pero no es base ortogonal. Vamos a buscar una base ortonormal de  $W$  para poder utilizar la sencilla expresión [2b],  $A_{\text{proy}} = P_B P_B^t$ .

Aplicamos Gram-Schmidt tomando  $\vec{b}_1 = (1, -1, 0)$

$$(1, 0, -1) - \frac{(1, 0, -1) \cdot (1, -1, 0)}{2} (1, -1, 0) = (1, 0, -1) - \frac{1}{2} (1, -1, 0) = (1/2, 1/2, -1)$$

Tomamos  $\vec{b}_2 = (1, 1, -2)$

La base  $B' = \{(1, -1, 0)/\sqrt{2}, (1, 1, -2)/\sqrt{6}\}$  es base ortonormal de  $W$ .

$$A_{\text{proy}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Solución mediante “diagonalización ortogonal”:

$$A_{\text{proy}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

## 9 Ejercicios

**Ejercicio 1.** Se considera el subespacio  $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z - t = 0\}$

- Calcula una base ortonormal de  $H$ .
- Calcula una base ortonormal de  $H^\perp$ .
- Calcula la proyección ortogonal del vector  $\vec{v} = (1, 0, 1, 1)$  sobre  $H$ .
- Calcula la distancia de  $\vec{v}$  a  $H$ .

**Ejercicio 2.** Considerado en  $\mathbb{R}^4$  el subespacio vectorial  $W = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, -1) \rangle$  y el vector  $\vec{v} = (1, 0, 0, 13)$ , se pide:

- Una base de  $W^\perp$ .
- El vector  $\vec{v}_1 \in W$  más cercano a  $\vec{v}$ .
- El vector  $\vec{v}_2 \in W^\perp$  más cercano a  $\vec{v}$ .
- La distancia de  $\vec{v}$  a  $W$  (la expresión más simplificada posible).

**Ejercicio 3.** Obtén la solución de mínimos cuadrados del SL  $A\vec{x} = \vec{b}$ , con  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

y  $\vec{b} = (8, 7, 3, -4)$ .

La solución pedida es la del sistema compatible  $A\vec{x} = \hat{\vec{b}}$ , siendo  $\hat{\vec{b}}$  la proyección ortogonal de  $\vec{b}$  sobre las columnas de  $A$ .

Por tanto  $A\vec{x} = A(A^tA)^{-1}A^t\vec{b}$

$A(\vec{x} - (A^tA)^{-1}A^t\vec{b}) = \vec{0}$ , sacando factor común  $A$ .

$\vec{x} - (A^tA)^{-1}A^t\vec{b} = \vec{0}$  pues las columnas de  $A$  son l.i., y por tanto no existen soluciones distintas de la trivial.

$\vec{x} = (A^tA)^{-1}A^t\vec{b}$

Por tanto resolviendo el SL de matriz ampliada  $[A^tA | A^t\vec{b}]$  obtenemos la solución de mínimos cuadrados.

**Ejercicio 4.** Diagonaliza ortogonalmente la matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , es decir, obtén  $Q$  y

$D$  tales que  $A = QDQ^t$ . Realiza la comprobación.

**Ejercicio 5.** Considera  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{b}_1 = (-2, 2, 1)$  y  $\vec{b}_2 = (1, 1, 0)$ . Comprueba que  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  son autovectores de  $A$  y diagonaliza ortogonalmente  $A$ .

**Ejercicio 6.** a) Obtén la matriz de proyección sobre el subespacio  $W$  generado por las

columnas de la matriz  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ , utilizando la expresión  $A_{\text{proy}} = UU^t$  siendo  $U$

una base ortonormal de  $W$ . b) Obtén la proyección ortogonal sobre  $W$  del vector  $\vec{b} = (8, 7, 3, -4)$ , usando la matriz anterior. (Este ejercicio tiene relación con el Ejercicio 3).

### Solución del Ejercicio 5

- Comprobación de que  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  son autovectores de  $A$ :

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 20 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{b}_1 = (-2, 2, 1)$  se transforma en un múltiplo de el mismo, por tanto es autovector. Su autovalor asociado es  $\lambda = 10$ .

$\vec{b}_2 = (1, 1, 0)$  se transforma en el mismo mismo, por tanto es autovector. Su autovalor asociado es  $\lambda = 1$ .

- Nos piden la diagonalización ortogonal, es decir, matrices  $D$  diagonal y  $P$  ortogonal tales que  $A = PDP^t$ . De antemano sabemos que  $A$  es ortogonalmente diagonalizable, ya que es una matriz simétrica.

–  $D$ :

Como solo nos falta un autovalor por determinar utilizamos que la traza de  $A$  es igual a la suma de los autovalores.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Traza de } A = 12 \\ \text{Suma de autovalores} = 10 + 1 + \lambda \end{array} \right\} \text{ Por tanto } \lambda = 1$$

Los autovals. son 10,1,1. Por tanto los autovals. distintos:  $\begin{cases} \lambda = 10 & \text{simple} \\ \lambda = 1 & \text{doble} \end{cases}$

–  $P$ : matriz de autovectores ortonormales para que  $P^{-1} = P^t$ .

Los subespacios propios son  $V_1$  y  $V_{10}$ .

$V_1$  tiene dimensión 2 por ser  $A$  diagonalizable.

La suma de  $V_1$  y  $V_{10}$  es  $\mathbb{R}^3$  por ser  $A$  diagonalizable.

$V_1$  y  $V_{10}$  son ortogonales entre sí por ser  $A$  simétrica ( $V_1 \perp V_{10}$ ).

\*  $V_{10}$  aporta un autovector.

Tenemos directamente del enunciado.  $\vec{b}_1 = (-2, 2, 1)$ .

\* De  $V_1$  conocemos un autovector del enunciado,  $\vec{b}_2 = (1, 1, 0)$ . Se comprueba fácilmente que efectivamente es ortogonal a  $\vec{b}_1$ .

Nos queda encontrar otro autovector de  $V_1$ ,  $\vec{b}_3$ , que sea ortogonal a  $\vec{b}_2$ .

El conjunto  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  será base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ .

El método más sencillo es obtener  $\vec{b}_3$  como el producto vectorial de  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$ .

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (-1, 1, -4)$$

Seguidamente dividimos cada vector por su norma.

$$P = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Otro método de obtener  $\vec{b}_3 = (a, b, c)$  es exigiendo que sea ortogonal a  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$ , usando el producto escalar:

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) &= a + b = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 2, 1) &= -2a + 2b + c = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) &= a + b = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 2, 1) &= -2a + 2b + c = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} b &= -a \\ c &= 2a - 2b = 2a + 2a = 4a \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{b}_3 = (1, -1, 4)$

R. Carballo U. Cantabria