

Tema 6. Autovalores, autovectores y diagonalización

1	Valores y vectores propios	2
2	Obtención de los valores propios. Ecuación característica	3
3	Subespacio propio. Dimensión. Obtención	5
4	El producto y la suma de las raíces del polinomio característico	9
5	Matrices semejantes	9
6	La suma directa de los subespacios propios	9
7	Existencia o no de base de \mathbb{R}^n formada por autovectores de f	10
8	Diagonalización	10
9	Potencia de una matriz diagonalizable	13
10	Endomorfismos geoméricamente sencillos y diagonalizables	14

Consideraremos en este capítulo únicamente endomorfismos

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, siendo \mathbb{R}^n espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

1 Valores y vectores propios

Definición 1. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es **autovalor o valor propio** del endomorfismo f en \mathbb{R}^n si existe $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Definición 2. Sea f un endomorfismo en \mathbb{R}^n con autovalor λ . Los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ se denominan **autovectores o vectores propios** de f correspondientes al autovalor λ .

λ puede ser 0.

Si $\vec{x} = \vec{0} \quad \forall \lambda$ se cumple que $f(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$, por eso para aceptar λ como autovalor debe existir $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Teniendo en cuenta que a f le corresponde una matriz estándar asociada A , nos referiremos indistintamente a los autovalores de f o de A y a los autovectores de f o de A .

Ejemplo 1. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, sobre \mathbb{R} , cuya matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$. Determina si los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2)$ son vectores propios de A . En caso afirmativo da el valor del autovalor asociado.

Sol:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\vec{u} es vector propio porque $A\vec{u} = 1\vec{u}$
el autovalor asociado es $\lambda = 1$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

\vec{v} es vector propio porque $A\vec{v} = -2\vec{v}$
el autovalor asociado es $\lambda = -2$

Ejemplo 2. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, cuya matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Determina si los vectores $\vec{u} = (6, -5)$ y $\vec{v} = (3, -2)$ son vectores propios de A .

Sol:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix}$$

\vec{u} es vector propio porque $A\vec{u} = -4\vec{u}$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

\vec{v} no es vector propio porque no existe s tal que $A\vec{v} = s\vec{v}$, o lo que es lo mismo, $(-9, 11)$ no es múltiplo de $(3, -2)$.

Ejemplo 3. Consideremos el endomorfismo identidad $id: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Sabemos que su matriz asociada es la identidad.

$$id(\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$$

La aplicación tiene un único valor propio, que es 1. Todos los vectores de \mathbb{R}^n son autovectores correspondientes a ese autovalor.

Ejemplo 4. Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ cuya matriz asociada es la matriz kI_n con $k \in \mathbb{R}$.

$$f(\vec{x}) = kI\vec{x} = k\vec{x}$$

La aplicación tiene un único valor propio, que es λ . Todos los vectores de \mathbb{R}^n son autovectores correspondientes a ese autovalor.

2 Obtención de los valores propios. Ecuación característica

Teorema 1. Sea el endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ y A_n su matriz asociada respecto de la base estándar. $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de $f \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I) < n$.

Demostración: λ valor propio si $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x}$, siendo I la matriz identidad de orden n , o lo que es lo mismo, si $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Por tanto λ es valor propio \Leftrightarrow el SL $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ es indeterminado $\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I) < n \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$ \square

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se denomina **ecuación característica** de f , o de A . Desarrollando la ecuación se obtiene que $|A - \lambda I|$ es un polinomio de grado n en λ , y por tanto los valores de λ para los que se verifica la ecuación característica son las raíces de este polinomio.

Al polinomio $|A - \lambda I|$ se le denomina polinomio característico de f o (de A), y se denota como $p(\lambda)$.

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales tiene exactamente n raíces reales o complejas (contando multiplicidades). Denotamos la multiplicidad de la raíz λ como p_λ .

El polinomio $(1 - \lambda)^5$ tiene 5 raíces, todas iguales a 1. Decimos que tiene raíz 1 con multiplicidad 5.

El polinomio $\lambda^2 + 1$ tiene dos raíces complejas, $+i$ y $-i$. (Las raíces complejas siempre forman pares conjugados).

El polinomio $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$ tiene dos raíces complejas, i y $-i$ y dos raíces reales 1 y -1 , ambas simples. Se podría escribir cómo $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$.

El polinomio $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2(\lambda + 6)^3(\lambda - i)(\lambda + i)$ tiene las siguientes raíces distintas: -1 de multiplicidad 1, 1 de multiplicidad 2, -6 de multiplicidad 3, i de multiplicidad 1, y $-i$ de multiplicidad 1.

El polinomio característico de A , $p(\lambda)$, de grado n , tendrá n raíces. **Las raíces reales del polinomio son los autovalores** del endomorfismo f , también designados como autovalores de A . Suponiendo s raíces distintas, incluyendo reales y complejas:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{p_{\lambda_1}} (\lambda_2 - \lambda)^{p_{\lambda_2}} \dots (\lambda_s - \lambda)^{p_{\lambda_s}}$$

$$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_s} = n$$

Si r es el número de raíces reales y distintas, $r \leq s$, entonces tenemos r autovalores distintos, y:

$$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_r} = n \Leftrightarrow \text{todas las raíces son reales}$$

$$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_r} < n \Leftrightarrow \text{existen raíces complejas}$$

Si $p(\lambda)$ tiene las n raíces reales y distintas (por tanto todas de multiplicidad algebraica 1), entonces el endomorfismo tiene n autovalores distintos, y la ec. característica es:

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

Resumen: Los valores propios son las raíces reales del polinomio $|A - \lambda I|$, o lo que es lo mismo, las soluciones reales de la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$.

Ejemplo 5. ¿Es 5 un valor propio de $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$?

Sol:

5 es autovalor de $A \Leftrightarrow 5$ es solución de la ecuación $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |A - 5I| = 0$

$$|A - 5I| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -30, \text{ por tanto } 5 \text{ no es autovalor.}$$

Ejemplo 6. a) Averigua si $\lambda = 4$ es autovalor de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) Determina el valor de c para que $\lambda = 4$ sea autovalor de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & c \end{bmatrix}$

Sol:

$$a) |A - 4I| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \Rightarrow \lambda = 4 \text{ no es autovalor.}$$

$$b) |A - 4I| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & c - 4 \end{vmatrix} = -3c + 12 - 8 = -3c + 4 = 0 \Rightarrow c = 4/3.$$

Ejemplo 7. Encuentra la ecuación característica de $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por ser A triangular, $A - \lambda I$ también es triangular, y la ec. característica:

$$(5 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

Los autovalores son entonces los elementos de la diagonal principal de A .

Ejemplo 8. El polinomio característico de una matriz 6×6 es $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$. Encuentra los valores propios y su multiplicidad algebraica.

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda - 12)\lambda^4$$

Tenemos la raíz $\lambda = 0$ con multiplicidad 4 y las raíces de $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. Estas últimas son $\lambda = -2$ y $\lambda = 6$, ambas simples.

3 Subespacio propio. Dimensión. Obtención

Teorema 2. Sea el endomorfismo f de \mathbb{R}^n y sea λ autovalor de f . El conjunto de todos los vectores propios correspondientes a λ , denotado V_λ , es subespacio de \mathbb{R}^n .

Demostración: En efecto, considerando la matriz estándar A asociada a f , tenemos:

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul}(A - \lambda I). \quad \square$$

El subespacio $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}\}$ se denomina **subespacio propio correspondiente al autovalor** λ_i . Se denota como V_{λ_i} .

$$V_{\lambda_i} = \text{Nul}(A - \lambda_i I)$$

Observaciones:

1) $\dim V_\lambda \geq 1$ ya que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ tiene soluciones de \vec{x} no nulas.

2) Quedó demostrado que V_λ es subespacio, por ser el conjunto de soluciones de un SLH. Presentamos no obstante la demostración de que V_λ cumple los dos axiomas de los subespacios.

- El producto por un escalar es cerrado, pues $\vec{x} \in V_\lambda \Rightarrow \alpha \vec{x} \in V_\lambda$

$$f(\alpha \vec{x}) = \lambda \alpha \vec{x}, \text{ entonces } f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) = \alpha \lambda \vec{x} = \lambda \alpha \vec{x}, \text{ por tanto } \alpha \vec{x} \in V_\lambda$$

- La suma es cerrada: $\vec{x}, \vec{x}' \in V_\lambda \Rightarrow \vec{x} + \vec{x}' \in V_\lambda$

$$f(\vec{x} + \vec{x}') = f(\vec{x}) + f(\vec{x}') = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{x}' = \lambda(\vec{x} + \vec{x}')$$

Como consecuencia de que la suma sea cerrada y el producto por un escalar también, se tiene que toda combinación lineal de autovectores de un valor propio λ es también autovector de ese autovalor.

Se podría haber presentado la demostración usando $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ para expresar $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Dimensión del subespacio propio

V_λ es el conjunto de soluciones del SLH $[A - \lambda I \mid \vec{0}]$, por tanto:

$\dim V_\lambda = n^\circ$ de parámetros libres = n° de columnas no pivotaes de la matriz $[A - \lambda I]$

$$\boxed{\dim V_\lambda = n - \text{rango}(A - \lambda I)}$$

Por ser λ autovalor $\text{rg}(A - \lambda I) < n$ por tanto: $\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq n}$

$\dim V_\lambda = n$ cuando $\text{rg}(A - \lambda I) = 0$, es decir si $A - \lambda I$ es la matriz cero, o lo que es lo mismo, $A = \lambda I$. En este caso $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, y por tanto $V_\lambda = \mathbb{R}^n$

Teorema 3. $\dim V_\lambda$ es menor o igual que la multiplicidad algebraica del autovalor λ .

$$\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq p_\lambda \leq n}$$

Se define **multiplicidad geométrica** de un autovalor λ como la dimensión de V_λ .

Obtención de los subespacios propios

En primer lugar se calculan los valores propios, es decir, las raíces reales de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$.

A continuación:

- Se determina $V_{\lambda_i} = \text{Nul}(A - \lambda_i I)$ para cada valor propio λ_i , que es lo mismo que determinar la solución de cada sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ (un sistema para cada autovalor). La resolución del sistema nos permitirá obtener una base y la dimensión del subespacio propio.

Ejemplo 9. Encuentra los autovalores y base de los subespacios propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12$$

$|A - \lambda I|$ tiene las raíces reales, y por tanto valores propios, $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -3$.

• Subespacio propio para λ_1

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 4x \\ 3x - 2y = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \quad [1] \Rightarrow x = 2y$$

$\vec{v}_1 = (2, 1)$ es una base de V_4 . V_4 tiene dimensión 1.

Comprobación: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Procedimiento más directo:

Los autovectores son las soluciones de $A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x}$, es decir, del sistema homogéneo $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

La matriz de coeficientes $(A - \lambda I)$ para este ejemplo y $\lambda = 4$ es:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

que es precisamente la del SL [1] de arriba.

Los autovectores se obtienen resolviendo el SL $\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 3 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$
 $\Rightarrow (2, 1)$ es autovector y base.

• De la misma forma se puede calcular un vector propio asociado a λ_2 .

Los autovectores se obtienen resolviendo en este caso el SL $\begin{bmatrix} 6 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$, por tanto $\vec{v}_2 = (-1, 3)$ es base del subespacio propio V_{-3} , de dimensión 2.

Ejemplo 10. Obtén los autovalores y base de cada subespacio propio para la matriz $A =$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

- Autovalores

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{Fila 3} = \text{Fila 3} - \text{Fila 2}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 + \lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Fila 1} = \text{Fila 1} - \text{Fila 2}$$

$$= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 + \lambda & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hemos sacado fuera $(1 - \lambda)^2$ y el determinante que queda está ya muy simplificado y lo podemos resolver mediante Sarrus.

$$= (1 - \lambda)^2((-2 - \lambda) + 0 + 0 + 1 + 1) = (1 - \lambda)^2(-\lambda)$$

Autovalores: $\lambda_1 = 0$ simple $\lambda_2 = 1$ doble.
--

- Base de cada subespacio propio. $V_\lambda = \text{Null}(A - \lambda_i)$

– Base de V_0

$$[A - 0I | \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad x = z, y = z, z = z$$

Base de $V_0 = \{(1, 1, 1)\}$	Nótese que V_0 es siempre $\text{Null}A$.
-------------------------------	--

– Base de V_1

$$[A - 1I | \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad x = 3y - z, y = y, z = z$$

Base de $V_1 = \{(3, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

- Comprobaciones: Denotando como $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ a los autovectores obtenidos, en su orden, efectuando $A[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ deberíamos obtener $[\vec{0} \vec{b} \vec{c}]$, teniendo en cuenta que los autovalores asociados son 0, 1 y 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots$$

4 El producto y la suma de las raíces del polinomio característico

Teorema 4. *El determinante de la matriz A_n es igual al producto de las raíces del polinomio característico de A .*

Si todas las raíces son reales, el determinante de A es igual al producto de sus autovalores, es decir $\det A = \lambda_1^{p_{\lambda_1}} \times \lambda_2^{p_{\lambda_2}} \times \dots \times \lambda_r^{p_{\lambda_r}}$, siendo λ_i los r autovalores distintos y p_{λ_i} sus respectivas multiplicidades.

Teorema 5. *La traza de la matriz A_n es igual a la suma de las raíces de su polinomio característico.*

Si todas las raíces son reales, la traza de A es igual a la suma de sus autovalores, es decir, $\text{tr} A = \sum_{i=1}^r p_{\lambda_i} \lambda_i$, siendo λ_i los r autovalores distintos y p_{λ_i} sus respectivas multiplicidades.

Ambos resultados son muy útiles para el cálculo y la comprobación de autovalores.

5 Matrices semejantes

Teorema 6. *Si dos matrices A_n y F_n son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos autovalores y con la misma multiplicidad.*

Demostración: A y F semejantes $\Leftrightarrow \exists P / A = PFP^{-1}$

$$A - \lambda I = PFP^{-1} - \lambda I = PFP^{-1} - P\lambda I P^{-1} = P(F - \lambda I)P^{-1}$$

$$|A - \lambda I| = |P||F - \lambda I||P^{-1}| = |F - \lambda I|, \text{ por tanto } |A - \lambda I| = |F - \lambda I| \quad \square$$

6 La suma directa de los subespacios propios

Teorema 7. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son autovalores distintos de A , con autovectores correspondientes $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$, entonces el conjunto $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ es linealmente independiente.*

De este resultado se deduce sin mucha dificultad que la unión de las bases de los subespacios propios es conjunto linealmente independiente y por tanto base del subespacio suma.

$$B_1 \cup B_2 \dots \cup B_r = \text{Base de } (V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}), \text{ siendo } B_i \text{ la base de } V_{\lambda_i}.$$

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = \dim (V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r})$$

Por tanto la suma de subespacios propios es suma directa:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} \subseteq \mathbb{R}^n$$

La intersección de los subespacios propios es el vector $\vec{0}$.

7 Existencia o no de base de \mathbb{R}^n formada por autovectores de f

Teorema 8. Existe base de \mathbb{R}^n formada por autovectores de A , o lo que es lo mismo, $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow p(\lambda)$ tiene n raíces reales contando multiplicidades (o lo que es lo mismo, no hay raíces complejas) y $\dim V_{\lambda_i} = p_{\lambda_i}$

Demostración: Existe base de \mathbb{R}^n formada por autovectores si y sólo si $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = n$

Sabemos que $\dim V_{\lambda_i} \leq p_{\lambda_i} \quad i = 1, \dots, r$, por tanto:

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} \leq p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_r} \leq n$$

Para obtener la dimensión máxima, n , se debe cumplir $\dim V_{\lambda_i} = p_{\lambda_i} \quad \forall i = 1, \dots, r$ (para que el primer “menor o igual” sea un “igual”) y que todas las raíces sean reales (para que el segundo “menor o igual” sea un “igual”). \square

Teorema 9. Si A_n tiene n autovalores distintos, entonces existe base de \mathbb{R}^n formada por autovectores de A .

En efecto, si el polinomio característico de grado n tiene n autovalores distintos, significa que las multiplicidades son todas igual a uno. Por tanto los n subespacios V_{λ_i} tienen dimensión 1, y tendremos n autovectores linealmente independientes.

Nótese que este teorema nos da una condición suficiente para que exista base de autovectores, pero no es una condición necesaria.

8 Diagonalización

Consideramos un endomorfismo f con matriz estándar A , r autovalores distintos, y para el que se puede obtener una base de \mathbb{R}^n formada por autovectores.

Sea B una base de \mathbb{R}^n formada por autovectores.

$$B = \{ \vec{b}_1^1, \dots, \vec{b}_{p_{\lambda_1}}^1, \vec{b}_1^2, \dots, \vec{b}_{p_{\lambda_2}}^2, \dots, \vec{b}_1^r, \dots, \vec{b}_{p_{\lambda_r}}^r \}$$

Cada superíndice i corresponde al autovalor λ_i p_{λ_i} es la multiplicidad de ese autovalor

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{b}_1^1) = \lambda_1 \vec{b}_1^1 \\ \vdots \\ f(\vec{b}_{p_{\lambda_1}}^1) = \lambda_1 \vec{b}_{p_{\lambda_1}}^1 \\ \vdots \\ f(\vec{b}_1^r) = \lambda_r \vec{b}_1^r \\ \vdots \\ f(\vec{b}_{p_{\lambda_r}}^r) = \lambda_r \vec{b}_{p_{\lambda_r}}^r \end{array} \right. \Rightarrow F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix}$$

$\leftarrow p_{\lambda_1} \rightarrow \qquad \qquad \qquad \leftarrow p_{\lambda_r} \rightarrow$

Observamos que la matriz F , que es la relativa a la base B , es diagonal, y que el elemento de la diagonal principal de la columna i es el autovalor correspondiente al autovector de la posición i en la base.

Denotamos a la matriz F como D , por ser diagonal.

Recordamos la expresión de construcción de F : $F = [[f(\vec{b}_1)]_B \dots [f(\vec{b}_{p_{\lambda_r}})]_B]$.

Recíprocamente, si supiéramos de f que respecto de una base $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$ tiene asociada una matriz diagonal E , entonces concluiríamos que esa base estaría formada autovectores y que los elementos de la diagonal de E serían los correspondientes autovalores, ya que $f(\vec{c}_i) = e_{ii}\vec{c}_i$.

Definición 3. Una matriz A (o el endomorfismo f del que A es matriz estándar) se dice **diagonalizable** si tiene una matriz semejante diagonal, es decir, si existen base B y matriz D diagonal tales que $A = P_B D P_B^{-1}$

Teorema de la diagonalización. A_n es diagonalizable si y sólo si tiene n autovectores linealmente independientes, es decir, si y sólo si existe una base de \mathbb{R}^n formada por autovectores de A . En la factorización $A = P D P^{-1}$ con P invertible y D diagonal, las columnas de P son n autovectores de A linealmente independientes, y los elementos de D son los autovalores correspondientes y en el mismo orden.

RESUMEN sobre diagonalización

Dada A_n existen P invertible y D diagonal tales que $A = P D P^{-1}$ si y sólo si A tiene n valores propios reales (incluidas multiplicidades) y $\dim V_{\lambda_i}$ es igual a la multiplicidad de λ_i .

Los elementos de D son los autovalores. Las columnas de P son una base de autovectores, en el mismo orden que sus correspondientes autovalores en D .

A es la matriz estándar de f . D es la matriz de f para trabajar con coordenadas relativas a la base de autovectores dada en P .

La base de autovectores se construye uniendo las bases de los subespacios propios, siendo la dimensión de cada uno de éstos igual a la multiplicidad del autovalor.

Las dos condiciones de diagonalización:

1. $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{p_{\lambda_1}} (\lambda_2 - \lambda)^{p_{\lambda_2}} \dots (\lambda_r - \lambda)^{p_{\lambda_r}}$, con λ_i raíces reales y distintas (esto significa que $\sum_{i=1}^r p_{\lambda_i} = n$)
2. $\dim V_{\lambda_i} = p_{\lambda_i}$

Esquema para las matrices asociadas A y D :

$$\begin{array}{ccc}
 f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{y} \\
 P^{-1} & \downarrow & A & \uparrow P & B: \text{base de autovectores} \\
 & [\vec{x}]_B & \longrightarrow & [\vec{y}]_B & \text{elementos de } D: \text{autovalores en el mismo orden} \\
 & & D & &
 \end{array}$$

$A = P D P^{-1}$ P es la matriz de paso de coordenadas en B a coordenadas estándar.

$D = P^{-1} A P$ P^{-1} es la matriz de paso de coordenadas estándar a coordenadas en B .

Comprobaciones en los ejercicios:

$$AP = PD \text{ es una comprobación más sencilla de efectuar que } PDP^{-1} = A.$$

Ejemplo 11. Estudia si son diagonalizables las siguientes matrices. En caso afirmativo obtén P invertible y D diagonal tales que $X = PDP^{-1}$, siendo X la matriz dada.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Las dos son triangulares. Tienen los mismos autovalores: 2, 4, 2.

A:

Autovectores para $\lambda=2$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Resolviendo el SL tenemos que $\dim V(2) = 1$. Base $\{(0,0,1)\}$

Al ser dimension menor que la multiplicidad, la matriz no es diagonalizable.

B:

Autovectores para $\lambda=2$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

Resolviendo el SL tenemos que $\dim V(2) = 2$. Base $\{(2,1,0), (0,0,1)\}$

Al ser dimension = multiplicidad tenemos que la matriz es diagonalizable.

Ya sabemos que $V(4)$ tendra dimension 1.

D tiene elementos 2, 2, 4

Base de $V(4)$:

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{array} \quad \{(0,1,3)\} \text{ es base de } V(4)$$

Por tanto

$$P: \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \quad D: \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}$$

9 Potencia de una matriz diagonalizable

Si A es diagonalizable, con $A = PDP^{-1}$, entonces $A^k = PD^kP^{-1}$.

$$\text{En efecto } A^k = \overbrace{PDP^{-1} PDP^{-1} \dots PDP^{-1}}^{k \text{ veces}} = PD^kP^{-1}$$

D^k es matriz diagonal de elementos d_{ii}^k

Ejemplo 12. Factoriza la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ en la forma $A = PDP^{-1}$, con D diagonal, y calcula A^5 .

• Autovalores:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) + 2 + 2 - (3 - \lambda) - 2(2 - \lambda) - 2(2 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0 \end{aligned}$$

Calculamos las raíces aplicando el método de Ruffini:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -7 \quad 11 \quad -5 \\ 1) \quad \quad \quad 1 \quad -6 \quad 5 \\ \hline \quad 1 \quad -6 \quad 5 \quad 0 \\ 1) \quad \quad \quad 1 \quad -5 \\ \hline \quad \quad 1 \quad -5 \quad 0 \\ 5) \quad \quad \quad 5 \\ \hline \quad \quad \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0$$

Los autovalores son $\lambda = 1$ (multiplicidad 2) y $\lambda = 5$ (multiplicidad 1)

• Base de autovectores:

Calculamos V_1 obteniendo $V_1 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, con $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 0)$, confirmando que su dimensión es 2, y que por tanto A es diagonalizable.

Calculamos V_5 obteniendo $V_5 = \langle \vec{v}_3 \rangle$, con $\vec{v}_3 = (1, 2, 1)$.

Tomamos $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ como base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de A . Las matrices P y D para este orden son:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{con } A = PDP^{-1}$$

(Compruébese que $AP = PD$)

• A^5

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
A^5 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3125 \\ 0 & -1 & 6250 \\ -1 & 0 & 3125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 782 & 781 & 781 \\ 1562 & 1563 & 1562 \\ 781 & 781 & 782 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

10 Endomorfismos geoméricamente sencillos y diagonalizables

Las siguientes transformaciones geométricas en \mathbb{R}^2 son endomorfismos diagonalizables:

- Transformación escalamiento uniforme de razón k .

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^2

- Transformación escalamiento no uniforme de factores k_1 y k_2 distintos.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^2 de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, señalando \vec{a} la dirección del escalamiento de factor k_1 y \vec{b} la dirección del escalamiento de factor k_2 .

- Simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^2 de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo \vec{a} un vector de la recta y \vec{b} un vector ortogonal a \vec{a} .

- Proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^2 de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo \vec{a} un vector de la recta y \vec{b} un vector ortogonal a \vec{a} .

- Simetría respecto del origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^2 . Es la misma transformación que el giro de 180 grados alrededor del origen.

Las siguientes transformaciones geométricas en \mathbb{R}^3 son endomorfismos diagonalizables:

- Transformación escalamiento uniforme de razón k .

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^3

- Transformación escalamiento no uniforme de factores k_1, k_2, k_3 (al menos uno distinto del resto).

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^3 de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, correspondiendo cada dirección al escalamiento asociado k_1, k_2 o k_3 .

- Simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^3 de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y \vec{c} un vector ortogonal al plano.

- Proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^3 de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y \vec{c} un vector ortogonal al plano.

- Simetría respecto del origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de \mathbb{R}^3 .

11 Ejercicios

1. Obtén los autovalores y las bases de los subespacios propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

HVZ12, ejemplo E, pg. 214

2. Demuestra que una matriz de la forma $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ no es diagonalizable.

3. Para $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, señala la afirmación correcta:

- a) $\lambda = 6$ es autovalor y la dimensión del subespacio propio asociado V_6 es 1.
b) $\lambda = 6$ es autovalor y la dimensión del subespacio propio asociado V_6 es 2.
c) $\lambda = 6$ no es autovalor

Determina todos los autovalores y multiplicidades de A .

4. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ usa la factorización $A = PDP^{-1}$, con D diagonal, para obtener A^6 .

5. Determina si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ es diagonalizable para algún valor de c , y cuál o cuáles son estos valores en caso afirmativo.

6. Considerado el endomorfismo f de \mathbb{R}^2 tal que:

$(1, 2)$ es autovector con autovalor asociado 3

$(0, 1)$ es autovector con autovalor asociado 4.

a) Obtén $f(1, 7)$. *Pista: Escribe el vector $(1, 7)$ como combinación lineal de los autovectores dados, y toma ese resultado como punto de partida.*

b) Obtén la matriz estándar de f .

7. Obtén los autovalores y las bases de los subespacios propios de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Determina si existe una base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de esta aplicación lineal. En caso afirmativo escribe la base y la matriz de la aplicación referida a esa base.

HVZ12, ejercicios 1 y 2, matriz h, pgs. 220-221

8. Determina si las siguientes matrices tienen semejante diagonal, y en caso afirmativo determina la matriz P tal que $PDP^{-1} = A$

a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

HVZ12, ejercicio 5 a) y b) pg. 221

9. Determina para que valores de a y b es diagonalizable la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<p>Considerada en \mathbb{R}^2 la aplicación lineal f con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$, se pide:</p>	
Los autovalores	
Una base de cada subespacio propio indicando el autovalor asociado	$\lambda =$ Base = $\lambda =$ Base =
Matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$	$P =$ $D =$
Interpretación geométrica cualitativa y cuantitativa	

11. Obtén los subespacios propios, si existen, de la transformación lineal de matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$