## 5. Aplicaciones lineales $f$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$

Aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$
$\qquad \vec{x} \longmapsto \vec{y} = A\vec{x}$

- **Trabajando en base estándar**

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) \quad \overset{\text{A.L.}}{\Rightarrow} \quad \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix} = x_1 f(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}) + x_2 f(\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}) + \ldots + x_n f(\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \ldots\ f(\vec{e}_n)\,]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}}_{\vec{x}}$$

$$\boxed{A = [\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \ldots\ f(\vec{e}_n)\,] \qquad A\vec{x} = \vec{y}}$$

$\vec{x}$ está en coordenadas estándar
$\vec{y}$ está en coordenadas estándar
$A$ es la matriz estándar de $f$



- **Trabajando en base $B$**

$$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n) \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \ldots + c_n f(\vec{b}_n)$$

Premultiplicando los dos miembros por $P_B^{-1}$, cambiamos $\vec{y}$ y los $f(\vec{b}_i)$ de coordenadas estándar a coordenadas relativas a la base $B$.

$$\Rightarrow [\vec{y}]_B = c_1 [f(\vec{b}_1)]_B + c_2 [f(\vec{b}_2)]_B + \ldots + c_n [f(\vec{b}_n)]_B$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}c_1'\\c_2'\\\vdots\\c_n'\end{bmatrix}}_{[\vec{y}]_B = [f(\vec{x})]_B} = \underbrace{[\,[f(\vec{b}_1)]_B\ [f(\vec{b}_2)]_B\ \ldots\ [f(\vec{b}_n)]_B\,]}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}}_{[\vec{x}]_B}$$

$$\boxed{\begin{gathered} F = [\ [f(\vec{b}_1)]_B\ [f(\vec{b}_2)]_B\ \ldots\ [f(\vec{b}_n)]_B\ ] \\ F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \end{gathered}}$$

Tomamos del vector de partida sus coordenadas relativas a la base $B$: $[\vec{x}]_B$ La transformación produce las coordenadas de la imagen relativas a la base $B$: $[\vec{y}]_B$
$F$ es la matriz de $f$ relativa a la base $B$, es decir, a coordenadas del original y transformado, relativas a base $B$.
$\vec{x} = c_1\,\vec{b}_1 + c_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c_n\,\vec{b}_n$
$\vec{y} = f(\vec{x}) = c_1'\,\vec{b}_1 + c_2'\,\vec{b}_2 + \ldots + c_n'\,\vec{b}_n$

- **Relaciones entre $A$ y $F$, dada base $B$**
  - $A = PFP^{-1}$, siendo $P = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_n]$
  - $A$ y $F$ tienen el mismo determinante. Deducción obvia desde el resultado anterior.
  - $A$ y $F$ tienen la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal).
  - $A$ y $F$ tienen el mismo rango.

Las matrices cuadradas asociadas a la misma aplicación lineal se dice que son semejantes. Se dice de la traza y el determinante que son "invariantes" de las matrices semejantes.

- **Justificación de 1:**

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \qquad P = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_n\ ] \qquad \vec{x} = P\,[\vec{x}]_B \qquad \vec{y} = P\,[\vec{y}]_B$

La ec. $F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ la podemos reescribir como: $F\,P^{-1}\,\vec{x} = P^{-1}\,\vec{y}$

Premultiplicando por la izda. por $P$: $P\,F\,P^{-1}\,\vec{x} = \vec{y}\ A\vec{x} = \vec{y}$, por lo que igualando las dos últimas ecuaciones: $\boxed{A = P\,F\,P^{-1}}$

**Justificación gráfica para interpretar $A = P\,F\,P^{-1}$ como composición de aplicaciones lineales:**

Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a $f$ y a los cambios de base.

$$\begin{tikzcd} f: & \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^n \\ & \vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\ & {[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed] \arrow[r, bend right=60, "F"'] & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

$A = P\,F\,P^{-1}$

$$\begin{tikzcd} f: & \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\ & {[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed] \arrow[r, bend left=60, "F"] & {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

$F = P^{-1}\,A\,P$





En el esquema de la izquierda podemos ver $A$ como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha $F$ como composición de tres aplicaciones lineales.
Fijándonos en la izquierda vemos que $A$ se puede entender como la composición de tres pasos:
1) pasar de $\vec{x}$ a $[\vec{x}]_B$, con $P^{-1}$.
2) aplicar la función en base $B$, con la matriz $F$
3) pasar el resultado a base estándar, con $P$.
$A = P\,F\,P^{-1}$

Ruth Carballo. U. Cantabria

- **Im $f$** El subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las imágenes.

  $\text{Im}f = \{f(\vec{x}) \,/\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_2 f(\vec{e}_1) \,/\, x_i \in \mathbb{R}\}$

  Por comodidad trabajamos con la base canónica.

  Cada imagen es una combinación lineal. Las imágenes de todos los $\vec{x}$ son todas las combinaciones lineales.

  $\text{Im}f = < f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n) > = \text{Col}A.$

  La base de $\text{Im}f$ se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto $\{\ f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2), \ldots,\ f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, quedándonos con los vectores correspondientes a las columnas pivotales de $A$.

  dim $\text{Im}f$ = el número de estos vectores que son l.i. = rg$A$.

- **Núcleo de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$** Se denota $\text{Ker}f$. Es el conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \ / \ \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

  Trabajando de nuevo en base canónica, $\text{Ker } f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \ / \ \ f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul}A$

- **Dimensiones de Im$f$ y Ker$f$**

  Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, con matriz asociada $A$. Teniendo en cuenta que Im$f$=Col$A$ y que Ker$f$=Nul$A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

$$\boxed{\textbf{dim } \mathbb{R}^n = \textbf{dim Ker}f + \textbf{dim Im}f}$$

$$\boxed{n = \textbf{dim Nul}A + \textbf{dim Col}A = \textbf{dim Nul}A + \textbf{rg } A}$$

Recordamos que el resultado muestra simplemente que el número de columnas de $A$ es igual al nº de no pivotales, que es igual al nº de parámetros libres y dimensión del núcleo, más el nº de pivotales, que es igual al rg$A$ y dimensión de la imagen.





## Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla: Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En $\mathbb{R}^2$ giro de ángulo $\alpha$ alrededor del origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$ con orientación positiva (determinante positivo de la matriz que tiene por columnas los vectores base).

  Por tanto también en la base estándar, ya que es base ortonormal y de orientación positiva.

  $0 < \alpha < \pi \quad \text{o} \quad -\pi < \alpha < 0$

  Giro de ángulo 0 = Matriz $I$. Esta misma matriz para cualquier base.

  Giro de ángulo $\pi$ = Simetría respecto del origen. Matriz $-I$. Esta misma matriz para cualquier base.

- En $\mathbb{R}^2$ simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^2$ proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- <u>En $\mathbb{R}^2$ contracción de factor $k$ o dilatación de factor $k$</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $k\,I$ respecto de cualquier base. También se denomina escalamiento uniforme.

  Contracción: $0 < k < 1$
  Dilatación: $k > 1$

  Para $k = 1$ la matriz asociada es $I$.

- <u>En $\mathbb{R}^2$ escalamiento anísotropo o no uniforme en dos direcciones l.i.</u>

  Escalamientos de factores $k_1$ y $k_2$, con $k_i > 0$ y $k_1 \neq k_2$.
  Esta transformación tiene la matriz asociada $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores base de las direcciones de escalamiento $k_1$ y $k_2$ respectivamente.

- Para pasar de la matriz relativa a la base natural a la matriz relativa a la base estándar, si no son la misma, se debe aplicar:

$$\boxed{A = P\,F\,P^{-1}},$$

  siendo $F$ la matriz en la base natural y $P$ la matriz que tiene por columnas los vectores de la base natural en su orden.

- Debe comprobarse al menos que la traza de $A$ y la traza de $F$ son iguales. En MATLAB resultará sencillo añadir las comprobaciones de la invarianza del determinante y rango.





## Endomorfismos en $\mathbb{R}^3$ con interpretación geométrica sencilla: Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- <u>En $\mathbb{R}^3$ giro de ángulo $\alpha$ alrededor del eje dirigido según el vector $\vec{n}$</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}\}$.

  Cambiando $\vec{n}$ por un vector múltiplo positivo del mismo, la matriz asociada sería la misma.

  Para $\alpha$ positivo se produce el giro de acuerdo con el criterio de la mano derecha, con el pulgar apuntando según $\vec{n}$, y los demás dedos en el sentido del giro.

- <u>En $\mathbb{R}^3$ simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- <u>En $\mathbb{R}^3$ proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen</u>

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- Otras dos transformaciones lineales sencillas son el escalamiento uniforme y el escalamiento no uniforme, en ambos casos sobre tres direcciones linealmente independientes.

  En el segundo caso, $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$

  es la matriz asociada a la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, que da las direcciones de los tres escalamientos, en el mismo orden.

De nuevo, la transformación de la matriz $F$ relativa a la base natural a la matriz estándar $A$ se realizará mediante la fórmula, $A = P\,F\,P^{-1}$. Una vez obtenida pueden comprobarse los invariantes.





## Ejercicios

**5.1.** Dada la aplicación lineal con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

a) Obtén una base de Im$f$.
b) Obtén una base de Ker$f$.
c) Razona si la aplicación lineal es o no sobreyectiva.
d) Obtén la imagen de $(2, 7, 0)$.
e) Determina el/los antecedentes de $(6, 9, a)$ en función de $a$.

**5.2.** Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$(1, 0, 0) \longmapsto (1, 1, 1)$ $\quad$ $(0, 1, 0) \longmapsto (2, 0, -3)$ $\quad$ $(0, 0, 1) \longmapsto (0, 0, 4)$

a) Halla la matriz estándar asociada a $f$.
b) Halla la imagen de $\vec{a} = (2, -3, 5)$
c) Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2, -5, 4)$

**5.3.** Sea $f$ un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 2)$. Determina una base de Ker$f$ en función del parámetro $c$.

**5.4** Dada la aplicación lineal $f$ con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determina

a) Una base y la dimensión de Im$f$.
b) Una base y la dimensión de Ker$f$.

**5.5** Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:

* simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}x$

* proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}x$

Considerada la figura con los vértices $P$, $Q$, $R$ y $S$ dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

| $(x, y)$ | simetrico $(x', y')$ | proyectado $(x', y')$ |
|---|---|---|
| $P = (6, 6)$ | $P' = ( \quad , \quad )$ | $P' = ( \quad , \quad )$ |
| $Q = (7, 7)$ | | |
| $R = (8, 6)$ | | |
| $T = (7, 5)$ | | |

**5.6** Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal $f$ correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano $x + y + z = 0$.

a) Determina una base $B$ respecto de la cual la matriz asociada a $f$ sea lo más sencilla posible. Escribe también dicha matriz.

b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

**5.7** Resuelve el ejercicio anterior tomando $f$ correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano $x + y + z = 0$.