

## 5. Aplicaciones lineales $f$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \text{Aplicación lineal } f : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\mapsto \vec{y} = A\vec{x} \end{aligned}$$

- Trabajando en base estándar

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 f \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + x_2 f \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \dots + x_n f \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \underbrace{[f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)]}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\vec{y}$   $A$   $\vec{x}$

$$A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)] \quad A\vec{x} = \vec{y}$$

$\vec{x}$  está en coordenadas estándar

$\vec{y}$  está en coordenadas estándar

$A$  es la matriz estándar de  $f$

- Trabajando en base  $B$

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_n \vec{b}_n$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_n \vec{b}_n) \Rightarrow \vec{y} = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \dots + c_n f(\vec{b}_n)$$

Premultiplicando los dos miembros por  $P_B^{-1}$ , cambiamos  $\vec{y}$  y los  $f(\vec{b}_i)$  de coordenadas estándar a coordenadas relativas a la base  $B$ .

$$\Rightarrow [\vec{y}]_B = c_1 [f(\vec{b}_1)]_B + c_2 [f(\vec{b}_2)]_B + \dots + c_n [f(\vec{b}_n)]_B$$

$$\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [f(\vec{b}_1)]_B & [f(\vec{b}_2)]_B & \dots & [f(\vec{b}_n)]_B \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$[\vec{y}]_B = [f(\vec{x})]_B \quad F \quad [\vec{x}]_B$$

$$F = [ [f(\vec{b}_1)]_B \ [f(\vec{b}_2)]_B \ \dots \ [f(\vec{b}_n)]_B ]$$

$$F [\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$$

Tomamos del vector de partida sus coordenadas relativas a la base  $B$ :  $[\vec{x}]_B$

La transformación produce las coordenadas de la imagen relativas a la base  $B$ :  $[\vec{y}]_B$

$F$  es la matriz de  $f$  relativa a la base  $B$ , es decir, a coordenadas del original y transformado, relativas a base  $B$ .

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_n \vec{b}_n$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = c'_1 \vec{b}_1 + c'_2 \vec{b}_2 + \dots + c'_n \vec{b}_n$$

• **Relaciones entre  $A$  y  $F$ , dada base  $B$**

- $A = PFP^{-1}$ , siendo  $P = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n]$
- $A$  y  $F$  tienen el mismo determinante. Deducción obvia desde el resultado anterior.
- $A$  y  $F$  tienen la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal).
- $A$  y  $F$  tienen el mismo rango.

Las matrices cuadradas asociadas a la misma aplicación lineal se dice que son **semejantes**. Se dice de la traza y el determinante que son "invariantes" de las matrices semejantes.

• **Justificación de  $A = PFP^{-1}$  :**

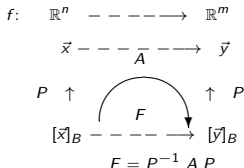
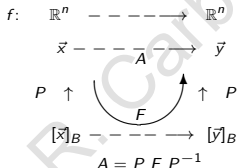
$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \quad P = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] \quad \vec{x} = P[\vec{x}]_B \quad \vec{y} = P[\vec{y}]_B$$

La ec.  $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$  la podemos reescribir como:  $FP^{-1}\vec{x} = P^{-1}\vec{y}$

Premultiplicando por la izda. por  $P$ :  $PF P^{-1}\vec{x} = \vec{y} A\vec{x} = \vec{y}$ , por lo que igualando las dos últimas ecuaciones:  $A = PFP^{-1}$

**Justificación gráfica para interpretar  $A = PFP^{-1}$  como composición de aplicaciones lineales:**

Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a  $f$  y a los cambios de base.



En el esquema de la izquierda podemos ver  $A$  como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha  $F$  como composición de tres aplicaciones lineales.

Fijándonos en la izquierda vemos que  $A$  se puede entender como la composición de tres pasos:

- 1) pasar de  $\vec{x}$  a  $[\vec{x}]_B$ , con  $P^{-1}$ .
- 2) aplicar la función en base  $B$ , con la matriz  $F$
- 3) pasar el resultado a base estándar, con  $P$ .

$$A = P F P^{-1}$$

- **Im  $f$**  El subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  formado por todas las imágenes.

$$\text{Im } f = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$$

Por comodidad trabajamos con la base canónica.

Cada imagen es una combinación lineal. Las imágenes de todos los  $\vec{x}$  son todas las combinaciones lineales.

$$\text{Im } f = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle = \text{Col } A.$$

La base de  $\text{Im } f$  se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto  $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$  que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, quedándonos con los vectores correspondientes a las columnas pivotaes de  $A$ .

$\dim \text{Im } f =$  el número de estos vectores que son l.i.  $= \text{rg } A$ .

- **Núcleo de una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$**  Se denota  $\text{Ker } f$ . Es el conjunto

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

Trabajando de nuevo en base canónica,  $\text{Ker } f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul } A$

- **Dimensiones de  $\text{Im } f$  y  $\text{Ker } f$**

Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , con matriz asociada  $A$ . Teniendo en cuenta que  $\text{Im } f = \text{Col } A$  y que  $\text{Ker } f = \text{Nul } A$ , se tiene la relación de dimensiones siguiente:

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

$$n = \dim \text{Nul } A + \dim \text{Col } A = \dim \text{Nul } A + \text{rg } A$$

Recordamos que el resultado muestra simplemente que el número de columnas de  $A$  es igual al  $n^\circ$  de no pivotaes, que es igual al  $n^\circ$  de parámetros libres y dimensión del núcleo, más el  $n^\circ$  de pivotaes, que es igual al  $\text{rg } A$  y dimensión de la imagen.

## Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla: Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En  $\mathbb{R}^2$  giro de ángulo  $\alpha$  alrededor del origen

Esta transformación tiene la matriz asociada  $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$  en todas las bases ortonormales de  $\mathbb{R}^2$  con orientación positiva (determinante positivo de la matriz que tiene por columnas los vectores base). Por tanto también en la base estándar, ya que es base ortonormal y de orientación positiva.

$$0 < \alpha < \pi \quad \text{o} \quad -\pi < \alpha < 0$$

$\alpha$  positivo o sentido positivo, giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj (negativo, sentido de las agujas del reloj).

Giro de ángulo  $0 =$  Matriz  $I$ . Esta misma matriz para cualquier base.

Giro de ángulo  $\pi =$  Simetría respecto del origen. Matriz  $-I$ . Esta misma matriz para cualquier base.

- En  $\mathbb{R}^2$  simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen

Esta transformación tiene la matriz asociada  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ , siendo  $\vec{a}$  un vector de la recta y  $\vec{b}$  un vector ortogonal a  $\vec{a}$ .

- En  $\mathbb{R}^2$  proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen

Esta transformación tiene la matriz asociada  $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ , siendo  $\vec{a}$  un vector de la recta y  $\vec{b}$  un vector ortogonal a  $\vec{a}$ .

- En  $\mathbb{R}^2$  contracción de factor  $k$  o dilatación de factor  $k$

Esta transformación tiene la matriz asociada  $k I$  respecto de cualquier base. También se denomina escalamiento uniforme.

Contracción:  $0 < k < 1$

Dilatación:  $k > 1$

Para  $k = 1$  la matriz asociada es  $I$ .

- En  $\mathbb{R}^2$  escalamiento anisotrópico o no uniforme en dos direcciones l.i.

Escalamientos de factores  $k_1$  y  $k_2$ , con  $k_i > 0$  y  $k_1 \neq k_2$ .

Esta transformación tiene la matriz asociada  $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ,

siendo  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  vectores base de las direcciones de escalamiento  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente.

- Para pasar de la matriz relativa a la base natural a la matriz relativa a la base estándar, si no son la misma, se debe aplicar:

$$A = P F P^{-1},$$

siendo  $F$  la matriz en la base natural y  $P$  la matriz que tiene por columnas los vectores de la base natural en su orden.

- Debe comprobarse al menos que la traza de  $A$  y la traza de  $F$  son iguales. En MATLAB resultará sencillo añadir las comprobaciones de la invarianza del determinante y rango.

## Endomorfismos en $\mathbb{R}^3$ con interpretación geométrica sencilla: Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En  $\mathbb{R}^3$  giro de ángulo  $\alpha$  alrededor del eje dirigido según el vector  $\vec{n}$

Esta transformación tiene la matriz asociada  $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  en todas las bases

ortonormales de  $\mathbb{R}^3$  de la forma  $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}\}$ .

Cambiando  $\vec{n}$  por un vector múltiplo positivo del mismo, la matriz asociada sería la misma.

Para  $\alpha$  positivo se produce el giro de acuerdo con el criterio de la mano derecha, con el pulgar apuntando según  $\vec{n}$ , y los demás dedos en el sentido del giro.

- En  $\mathbb{R}^3$  simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen

Esta transformación tiene la matriz asociada  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^3$  de la forma

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ , siendo  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  una base del plano y  $\vec{c}$  un vector ortogonal al plano.

- En  $\mathbb{R}^3$  proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen

Esta transformación tiene la matriz asociada  $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^3$  de la forma

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ , siendo  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  una base del plano y  $\vec{c}$  un vector ortogonal al plano.

- Otras dos transformaciones lineales sencillas son el escalamiento uniforme y el escalamiento no uniforme, en ambos casos sobre tres direcciones linealmente independientes.

En el segundo caso, 
$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

es la matriz asociada a la base  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ , que da las direcciones de los tres escalamientos, en el mismo orden.

De nuevo, la transformación de la matriz  $F$  relativa a la base natural a la matriz estándar  $A$  se realizará mediante la fórmula,  $A = P F P^{-1}$ . Una vez obtenida pueden comprobarse los invariantes.

5.1. Dada la aplicación lineal con matriz estándar  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

- Obtén una base de  $\text{Im}f$ .
- Obtén una base de  $\text{Ker}f$ .
- Razona si la aplicación lineal es o no sobreyectiva.
- Obtén la imagen de  $(2, 7, 0)$ .
- Determina el/los antecedentes de  $(6, 9, a)$  en función de  $a$ .

5.2. Dada la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ , definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1, 1, 1) \quad (0, 1, 0) \mapsto (2, 0, -3) \quad (0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 4)$$

- Halla la matriz estándar asociada a  $f$ .
- Halla la imagen de  $\vec{a} = (2, -3, 5)$
- Halla el vector cuya imagen es  $\vec{b} = (2, -5, 4)$

5.3. Sea  $f$  un endomorfismo en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$ ,  $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$  y  $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 2)$ . Determina una base de  $\text{Ker}f$  en función del parámetro  $c$ .

5.4 Dada la aplicación lineal  $f$  con matriz asociada  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ , determina

- Una base y la dimensión de  $\text{Im}f$ .
- Una base y la dimensión de  $\text{Ker}f$ .

**5.5** Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en  $\mathbb{R}^2$ :

\* simetría respecto de la recta  $y = \frac{1}{3}x$

\* proyección ortogonal sobre la recta  $y = \frac{1}{3}x$

Considerada la figura con los vértices  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

$(x, y)$	simétrico $(x', y')$	proyectado $(x', y')$
$P = (6, 6)$	$P' = ( \quad , \quad )$	$P' = ( \quad , \quad )$
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

**5.6** Considera el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  y la transformación lineal  $f$  correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano  $x + y + z = 0$ .

a) Determina una base  $B$  respecto de la cual la matriz asociada a  $f$  sea lo más sencilla posible. Escribe también dicha matriz.

b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

**5.7** Resuelve el ejercicio anterior tomando  $f$  correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano  $x + y + z = 0$ .

**5.8** La matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  produce un **estiramiento** en la dirección  $x$ . Representa la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y esboza a su alrededor los puntos  $(x, y)$  que resultan de multiplicar por  $A$ . ¿Cual es la forma de la figura?.

*G. Strang. Linear Algebra and its Applications. Edición 4. Wellesley Cambridge Press. 2009. Pg. 149. Ejercicio 3.*

**5.9** Dada la aplicación lineal  $f$  en  $\mathbb{R}^3$  con matriz estándar asociada  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , obtén la matriz asociada a  $f$  respecto de la base  $B = \{(1, -1, 0), (-2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ .

*S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9. Pearson 2015. Pr. 212. Ejemplo 2.*

**5.10** a) En  $\mathbb{R}^3$ , obtén la matriz estándar  $A$  correspondiente al giro de 90 grados en sentido positivo respecto del eje dirigido según el vector  $(0, 0, 1)$ . b) Obtén la matriz estándar de ese giro, seguido de una dilatación de factor 4 según el eje  $Z$ .

**5.11** a) En  $\mathbb{R}^2$ , interpreta geoméricamente, cualitativa y cuantitativamente, la transformación lineal con la matriz estándar  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

- Ejerc. 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad f(\vec{a}) = (-4, 2, 31)$$

$\vec{b}$  tiene un único antecedente, que es el vector  $(-5, 7/2, 39/8)$

- Ejerc. 3 Si  $c \neq -7/3$  el único vector  $\vec{x}$  tal que  $f(\vec{x}) = \vec{0}$  es el propio vector  $\vec{0}$ .  $\text{Ker}f = \{\vec{0}\}$ .

$\text{Ker}f$  es el subespacio cero, y por tanto no tiene base.

Si  $c = -7/3$  hay infinitos vectores  $\vec{x}$  cuya imagen es el vector  $\vec{0}$ .

Una posible base de  $\text{Ker}f$  es  $B = \{(2/3, -2/3, 1)\}$

- Ejerc. 4

Recuerda que  $\text{Im}f = \text{Col}A$  y que  $\text{Ker}f = \text{Nul}A$ .

- Ejerc. 5

$$\text{simetría ortogonal: } A = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \quad \text{proyección ortogonal: } A = \begin{bmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

- Ejercs. 6 y 7

$$\text{simetría ortogonal: } A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{proyección ortogonal: } A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$