

4.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos

Definición

Un conjunto V de elementos se dice que es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , si en él se han definido dos operaciones: la suma, $+$, de manera que a cada par de elementos u y v de V se le haga corresponder el elemento $u + v$ de V , y la multiplicación por un elemento de \mathbb{R}^1 , de tal manera que a cada par de elementos u de V y α de \mathbb{R} se le haga corresponder el elemento αu de V , cumpliéndose las siguientes propiedades:

Para la suma

Conmutativa: $\forall u, v \in V, u + v = v + u$

Asociativa: $\forall u, v, w \in V, u + (v + w) = (u + v) + w$

Existencia de elemento neutro: $\exists 0_V \in V / u + 0_V = u \quad \forall u \in V$

Existencia de elemento opuesto: $\forall u \in V \quad \exists -u \in V / u + (-u) = 0_V$

Para la multiplicación por escalares de \mathbb{R}

$1u = u$ 1 es el elemento neutro del producto en \mathbb{R} . Se le denomina elemento unidad de V .

Pseudoasociativa respecto de la multiplicación por escalares: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall u \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Distributivas

De la multiplicación por escalar respecto de la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall u, v \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

De la multiplicación por escalar respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V$
y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Es importante volver a señalar explícitamente la condición dada en la definición de que las dos operaciones sean cerradas:
 $\forall u, v \in V, u + v \in V$ $\forall u \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in V$

Un espacio vectorial sobre \mathbb{R} se denomina también espacio vectorial real.

¹ También denominado real, escalar real, o simplemente escalar (asumimos en esta sección que los escalares son reales)

4.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos

Propiedades

De la definición de Espacio Vectorial se infieren las siguientes propiedades:

- Por la propiedad conmutativa:

$$0_V + u = u \qquad -u + u = 0_V$$

- El elemento neutro de un espacio vectorial es único.
- El elemento opuesto de cada elemento de un espacio vectorial es único.
- $\forall u \in V \quad 0 u = 0_V$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha 0_V = 0_V$
- $\alpha u = 0_V \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } u = 0_V$
- $(-1) u = -u$
- La combinación de las operaciones de multiplicación por un escalar y suma es la operación conocida como combinación lineal. La combinación lineal de los elementos u y v de V con escalares α y β de \mathbb{R} es $\alpha u + \beta v$, y pertenece a V .

Ejemplos

- **HVZ12 Ejemplo A** (pg. 145)
 - El conjunto \mathbb{R}^2 de los vectores en el plano.
 - El conjunto \mathbb{R}^3 de los vectores en el espacio.
 - El conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de todas las matrices reales de m filas y n columnas.
 - Ejemplo adicional: El conjunto \mathbb{R}^n .
- **HVZ12 Ejemplo D.2** (pg. 145 – 146). El conjunto P_n de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n .

4.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos

Los elementos de P_n se definen por la expresión: $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$

Definición de la suma:

Sean $p_1(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$ y $p_2(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_n\lambda^n$, entonces

$$p(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\lambda + (a_2 + b_2)\lambda^2 + \dots + (a_n + b_n)\lambda^n$$

Definición de la multiplicación por un real:

Sean $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha p(\lambda) = \alpha a_0 + \alpha a_1\lambda + \alpha a_2\lambda^2 + \dots + \alpha a_n\lambda^n$$

- **HVZ12 Ejemplo E** (pg. 146). El conjunto de las funciones reales de variable real continuas y definidas en el intervalo $[a, b]$ es espacio vectorial.

Def. de la suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Def. de la multiplicación por un real: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

- **HVZ12 Ejemplo H** (pg. 146). El conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo es espacio vectorial. (En la Secc. 1.2, Teorema 1.2.5 vimos que la suma de los vectores solución de un SLH es también solución y que el producto de un vector solución por un real es también solución).

Tomando $A \in M_{m \times n}$ como matriz de coeficientes, $A\vec{x} = \vec{0}$ es el SLH.

Si $A\vec{x}_1 = \vec{0}$, $A\vec{x}_2 = \vec{0}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{0}$ y $A\alpha\vec{x}_1 = \vec{0}$.

A este conjunto se le denota $N(A)$ o $\text{Nul}(A)$. x_h , las soluciones del SLH, son los elementos de $N(A)$

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / A\vec{x} = \vec{0}\}$$

4.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos

- **HVZ12 Ejemplo G** (pg. 146).

- Un ejemplo de conjunto que no es espacio vectorial es el conjunto de las matrices de orden n de determinante nulo, con las operaciones de suma y producto por escalar estudiadas.
- El conjunto de los polinomios de grado exactamente n no es espacio vectorial.
- **Ejemplo adicional 4.1.1.** $W = \{(a, 1) / a \in \mathbb{R}\}$ no es espacio vectorial.

Ejercicio adicional 4.1.2 . En el espacio vectorial de las matrices cuadradas 2 por 2, obtén la combinación lineal de las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, tomando como coeficientes 2 y -2 , respectivamente.

4.2 Base y dimensión de un espacio vectorial

Definiciones

Sea V espacio vectorial real y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$.

- Se dice que $v \in V$ es combinación lineal de los elementos de S si $\exists c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R} / v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$.

A los escalares c_1, c_2, \dots, c_p se les llama pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden tomar cualquier valor real incluido el 0.

- Se dice que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ es linealmente dependiente si existen p reales $(c_1, c_2, \dots, c_p)^2$, no todos cero, tales que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0_V$ [1]

Una ecuación como [1], en la que no todos los coeficientes son cero, se denomina relación de dependencia lineal del conjunto.

- Se dice que S es linealmente independiente si y sólo si no es linealmente dependiente.
Es decir, si $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0_V \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$
- Se dice que S es sistema generador de V si para todo $v \in V$, v es combinación lineal de los elementos de S .
- Un conjunto finito de elementos $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\} \subset V$ se dice que es base de V si cumple las dos condiciones siguientes:
 - Es linealmente independiente
 - Es sistema generador de V

²Se ha incluido el paréntesis para recalcar que los coeficientes actúan de forma agrupada

4.2 Base y dimensión de un espacio vectorial

Propiedades en relación con la dependencia e independencia lineal

- S es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si al menos un elemento de S puede expresarse como combinación lineal del resto.
- S formado por dos elementos es linealmente dependiente si y sólo si un elemento es múltiplo del otro.
- Si $0_V \in S$, entonces S es un conjunto linealmente dependiente.
- Los conjuntos linealmente independientes no pueden contener subconjuntos linealmente dependientes.

En la Sección 1.2 se adelantaron algunas de estas definiciones y propiedades para los conjuntos de vectores en el espacio vectorial \mathbb{R}^n .

4.2 Base y dimensión de un espacio vectorial

Ejemplos

En el espacio vectorial \mathbb{R}^n no puede haber conjuntos linealmente independientes formados por $n + 1$ vectores.

Justificación: La matriz cuyas columnas son los vectores tendrá n filas, y por tanto no puede tener $n + 1$ columnas pivotaes, tendrá como máximo n .

HVZ12 Ejemplo C.2 (pg. 151). Justificación de que en el espacio vectorial de las funciones reales de variable real, continuas, y definidas en el intervalo $[a, b]$, las funciones $f(x) = \cos^2(x)$, $g(x) = \sin^2(x)$ y $h(x) = 1$ forman un conjunto linealmente dependiente.

HVZ12 Ejemplo D (pg. 151). Base canónica de \mathbb{R}^n

Los vectores dados por las columnas de la matriz real I_n son elementos del espacio vectorial \mathbb{R}^n y se denotan como \vec{e}_i , con i desde 1 hasta n .

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al conjunto $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ se le denomina **base canónica o estándar de \mathbb{R}^n** .

- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, puesto que esos vectores, dispuestos como columnas en la matriz I_n corresponden todos a columnas pivotaes (en este caso la matriz coincide con su forma escalonada reducida).
- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es sistema generador de \mathbb{R}^n , ya que el sistema lineal de matriz ampliada $[\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n \ | \ \vec{v}]$ es compatible para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, pues $rgA = n = rgA^*$, y por tanto todo \vec{v} puede escribirse como c.l. del conjunto B .

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^2

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3

4.2 Base y dimensión de un espacio vectorial

Coordenadas relativas a una base

La razón principal de elegir una base de un espacio vectorial en vez de un sistema generador es que cada elemento v de ese espacio puede escribirse de una sola manera como combinación lineal de los elementos de la base.

Sea $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ una base del espacio vectorial V , entonces $\forall v \in V$, v se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de la base. A los coeficientes o pesos c_1, c_2, \dots, c_d , tales que $v = c_1 b_1 + \dots + c_d b_d$ se les denomina **coordenadas de v relativas a la base B** .

Las coordenadas, que son d reales, se pueden almacenar como un vector, denominado **vector de coordenadas de v respecto a B** o **vector de B -coordenadas de v**

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$$

4.2 Base y dimensión de un espacio vectorial

Notación en el espacio \mathbb{R}^n

- El vector de coordenadas de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto de una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ de \mathbb{R}^n se expresa de acuerdo con la notación indicada cómo:

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \text{partiendo de } \vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n,$$

- Cuando las coordenadas están referidas a la base canónica de \mathbb{R}^n , $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, utilizamos la notación:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \text{prescindiendo de los corchetes y de la referencia a la base.}$$

$$\vec{x} = c_1 \vec{e}_1 + \dots + c_n \vec{e}_n,$$

Más usual es expresar $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, denotando las coordenadas de \vec{x} relativas a la base canónica como x_j . A

estas coordenadas las denominamos coordenadas canónicas o coordenadas estándar.

Ejemplo: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ significa que \vec{x} tiene coordenadas (2, 3, 4, 5) respecto de la base canónica, o lo que es lo mismo, que $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 5\vec{e}_4$

4.2 Base y dimensión de un espacio vectorial

Ejercicio 4.2.1. a) Considerando en \mathbb{R}^2 la base $B = \{(5, 1), (1, 3)\}$ y el vector \vec{v} de coordenadas $(4, 3)$ respecto de la base B , determina las coordenadas de \vec{v} respecto de la base canónica de \mathbb{R}^2 .

El vector \vec{v} se obtiene así: $4 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 13 \end{bmatrix}$

o, escribiendo la combinación lineal como producto matriz-vector: $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 13 \end{bmatrix}$

$$P_B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2] = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{P_B \ [\vec{v}]_B = \vec{v}} \quad [I]$$

b) Considerando en \mathbb{R}^2 la base $B = \{(5, 1), (1, 3)\}$ y $\vec{v} = (23, 13)$, determina las coordenadas de \vec{v} respecto de la base B .

Hay que obtener (c_1, c_2) tales que $c_1(5, 1) + c_2(1, 3) = (23, 13)$. O lo que es lo mismo, hay que resolver el SL de matriz ampliada $[P_B \ | \ \vec{v}]$ [II].

Resolviendo $\begin{bmatrix} 5 & 1 & | & 23 \\ 1 & 3 & | & 13 \end{bmatrix}$ obtendremos como solución, obviamente, $[\vec{v}]_B = (4, 3)$

Teniendo en cuenta que P_B es invertible, la solución del sistema también se puede obtener así:

$$\boxed{[\vec{v}]_B = P_B^{-1} \vec{v}} \quad [III]$$

Esta ecuación también se puede obtener de [I] sin más que premultiplicar ambos miembros por P_B^{-1} .

- La ecuación [I] nos da la transformación desde $[\vec{v}]_B$ a \vec{v} , es decir, de coord. en base B a coord. estándar.
- La ecuación [III] da la transformación desde \vec{v} hasta $[\vec{v}]_B$, es decir, de coord. estándar a coord. relativas a base B . En la práctica requiere menos operaciones resolver el sistema (método [II]) que calcular la inversa y después premultiplicar por ella (la obtención de la inversa es la que requiere en general más operaciones).

4.2 Base y dimensión de un espacio vectorial

Propiedades de las bases

Hay espacios vectoriales que sólo tienen un elemento: los que están formados exclusivamente por el elemento neutro O_V . A cada espacio vectorial de este tipo se le llama espacio vectorial cero. Estos espacios vectoriales no tienen base, porque el conjunto $\{O_V\}$ no es un conjunto linealmente independiente.

Nos referimos a continuación al resto de espacios vectoriales.

- Todo espacio vectorial V tiene infinitas bases, y todas tienen el mismo número de elementos. Este número se denomina dimensión de V , denotado $\dim V$. (Por definición el espacio vectorial $\{O_V\}$ tiene dimensión cero).

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim P_n = n + 1$$

$$\dim M_{m \times n} = m \times n$$

Sea V de dimensión n :

- Todo subconjunto de V formado por n elementos linealmente independientes es base de V .
- Todo subconjunto de V formado por $n + 1$ elementos es linealmente dependiente.
- Todo subconjunto que sea sistema generador de V tendrá al menos n vectores. Si tiene n serán l.i., si tiene más de n serán conjunto l.d.
- Todo subconjunto de V con $k < n$ elementos linealmente independientes puede ampliarse con $n - k$ elementos (que formen con el anterior un conjunto total l.i.) para formar una base de V .
- De todo sistema generador de V se podrá extraer un subconjunto que sea base de V . Este conjunto tendrá n vectores y se habrán eliminado los que sean combinación lineal de éstos.

Ejercicios HVZ12. Pg. 160-161-162

- **Ejercicio 5b.** En el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2.
- **Ejercicio 5c.** En el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2.
- **Ejercicio 6.** En el espacio vectorial \mathbb{R}^4 .
- **Ejercicio 15.** En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 .

4.3 Cambio de base

Ejercicio Adicional 4.3.1 . Cambio de base en \mathbb{R}^2 .

Considera el espacio vectorial \mathbb{R}^2 y en él las bases $B = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

- 1 Obtén la matriz de P de cambio de coordenadas de base B a base B' .
- 2 Sabiendo que las coordenadas de un vector \vec{v} respecto de la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, obtén sus coordenadas respecto de la base B' .
- 3 ¿Cuales son las coordenadas estándar del vector \vec{v} ?

Solución:

1

Justificaciones teóricas

$$\begin{aligned} P_B[\vec{x}]_B = \vec{x} &\Rightarrow P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}[\vec{x}]_{B'} \Rightarrow P_{B'}^{-1}P_B[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'} \\ P_{B'}[\vec{x}]_{B'} = \vec{x} &\Rightarrow P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}[\vec{x}]_{B'} \Rightarrow P_{B'}^{-1}P_B[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'} \end{aligned}$$

Por tanto la matriz de cambio de coordenadas o de cambio de base pedida, que realiza la transformación de $[\vec{x}]_B$ a

$$[\vec{x}]_{B'} \text{ es } \boxed{P = P_{B'}^{-1}P_B} \quad [I]$$

Es sencillo darse cuenta de que P no es más que la solución del SL con matriz ampliada múltiple $[P_{B'} | P_B]$.

Sin más que multiplicar la expresión encuadrada por $P_{B'}$ por la izquierda en los dos miembros obtenemos $P_{B'}P = P_B$, por tanto P es la solución que acabamos de mencionar.

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan para resolver:

$$\boxed{[P_{B'} | P_B] \rightarrow \dots \rightarrow [I | P]} \quad [II]$$

4.3 Cambio de base

Es más sencillo obtener P con este método que con la ec. [I], que requiere calcular la inversa de $P_{B'}$.

Hay por último otra forma de escribir la expresión de la matriz de cambio de base P que es la siguiente:

P tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B , en su orden, respecto de la base B' .

$$P = [[\vec{b}_1]_{B'} \quad [\vec{b}_2]_{B'} \quad \dots \quad [\vec{b}_n]_{B'}] \quad \text{[III]}$$

Es sencillo relacionar esta expresión tanto con la ec. [II] como con la ec. [I].

Nótese, con la ec. [I], que P es la composición de dos transformaciones. Primero se aplica P_B para transformar coordenadas en B a coordenadas estándar. Seguidamente se resuelven las coordenadas estándar respecto de la base B' para obtener las coordenadas en B' .

P es obviamente invertible, pues es producto de invertibles. (Producto de matrices de determinante distinto de cero produce matriz de determinante distinto de cero, ya que el determinante del producto es igual al producto de los determinantes).

Transformación inversa: $[\vec{x}]_{B'}$ a $[\vec{x}]_B$.

Denotando con Q la matriz de cambio de coordenadas, $Q[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$. Para este orden resulta: $Q = P_B^{-1}P_{B'}$

Q es obviamente la inversa de P .

$P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$, y multiplicando ambos miembros por P^{-1} :

$$[\vec{x}]_B = P^{-1}[\vec{x}]_{B'}$$

4.3 Cambio de base

Obtención de P para el ejercicio

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 5 & 1 \\ 1 & 1 & | & 1 & 3 \\ 1 & 0 & | & 3 & 2 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 5 & 1 \\ 0 & 2 & | & -4 & 2 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 5 & 1 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

La matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base B' es:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 \quad P[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B'}, \text{ por tanto: } [\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$3 \quad P_B[\vec{v}]_B = \vec{v}, \text{ por tanto: } \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 23 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Conclusiones sobre coordenadas de \vec{v} :

- \vec{v} tiene coordenadas (4,3) en base $B = \{(5, 1), (3, 1)\}$
- \vec{v} tiene coordenadas (18, -5) en base $B' = \{(1, 1), (-1, 1)\}$
- \vec{v} tiene coordenadas (23,13) en $B_{\text{can}} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

En la siguiente página, figura izquierda, vemos en negro los vectores de la base B , (5, 1) y (1, 3). En verde vemos el vector \vec{v} , que tiene coordenadas (4,3) en esta base. Se marcan en rojo las cuatro unidades del primer vector base, y las tres unidades del segundo vector base.

En la figura derecha vemos en negro los vectores de la base B' , (1, 1) y (-1, 1). El vector \vec{v} , en verde, tiene coordenadas (18, -5) respecto de esta base. Se marcan en rojo las 18 unidades del primer vector base, y las -5 unidades del segundo vector base.

4.3 Cambio de base

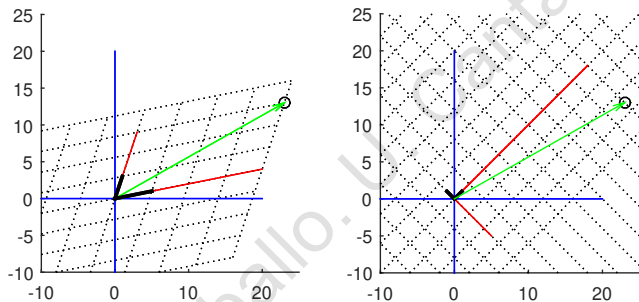


Figure: Comparación entre las coordenadas del vector $\vec{v} = (23, 13)$, en verde, relativas a dos bases distintas. Las bases están representadas en negro.

4.3 Cambio de base

Ejercicios:

- HVZ12 Ejercicio 10 (pg. 161)

10. a) Demostrar que los siguientes conjuntos son bases de \mathbb{R}^4 :

$$B_1 = \{\bar{v}_1 = (1, 1, 0, 0), \bar{v}_2 = (0, 1, 0, 0), \bar{v}_3 = (0, 0, 1, 1), \bar{v}_4 = (0, 0, 0, 1)\},$$

$$B_2 = \{\bar{u}_1 = (1, 2, 0, 0), \bar{u}_2 = (0, 1, 2, -1), \bar{u}_3 = (1, -1, -1, -1), \bar{u}_4 = (0, 1, 1, 0)\}.$$

b) Encontrar las componentes del vector $\bar{v} = 3\bar{v}_1 - \bar{v}_3 + 2\bar{v}_2$ con respecto a la base B_2 .

Añadido apartado c) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 a la base B_2 .

- HVZ12 Ejemplo A (pg. 158). Cambiando ligeramente el enunciado y ampliándolo.

Sean las bases de \mathbb{R}^3 :

$$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\} \text{ con } \bar{u}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3, \bar{u}_2 = \bar{e}_2 \text{ y } \bar{u}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$$

$$\text{y } B' = \{\bar{u}'_1, \bar{u}'_2, \bar{u}'_3\} \text{ con } \bar{u}'_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{u}'_2 = \bar{e}_2 \text{ y } \bar{u}'_3 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_3,$$

siendo los \bar{e}_i los vectores de la base canónica.

- Justificar que ambos conjuntos son base.
- Obtener las coordenadas en la base B' del vector $\vec{x} = 3\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2$
- Obtener la matriz de cambio de base de B a B' .
- Obtener las coordenadas de \vec{x} en la base estándar.

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

Subespacios vectoriales

Sea V espacio vectorial y H un subconjunto de V . Se dice que H es subespacio vectorial de V si H es a su vez espacio vectorial, con las mismas operaciones.

- H es subespacio de V si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\forall u, v \in H, u + v \in H \quad \forall u \in H \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in H$$

Al ser en sí mismo espacio vectorial, H tiene siempre bases.

- **Ejemplos:**

- En \mathbb{R}^3 todas las rectas que pasan por el origen y todos los planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales.
- Los polinomios con coeficientes reales son subespacio de las funciones continuas reales de variable real. A su vez los polinomios con coeficientes reales, de grado igual o inferior a n , son subespacio del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales.
- El espacio vectorial cero. 0_V es subespacio vectorial de V .
- Se admite el espacio vectorial completo V como subespacio vectorial de sí mismo.
- Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$. El conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los elementos de S es subespacio vectorial de V , se denomina subespacio generado por S y se denota $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ o $\langle S \rangle$.
 S es sistema generador de $\langle S \rangle$, y para obtener una base de $\langle S \rangle$ hay que eliminar, uno a uno, los elementos de S que sean combinación lineal del resto.

HVZ12 Ejemplo (pg. 163): Obtener en \mathbb{R}^3 una base del subespacio generado por el conjunto $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 2)\}$.

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

- Dada una matriz $A_{m \times n}$ con rango r , el conjunto de soluciones de $A\vec{x} = \vec{0}$, o núcleo de A , $N(A)$ o $\text{Nul}(A)$, es subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . $\text{Nul}(A)$ se designa más comunmente como subespacio nulo de A .

$$\text{Nul}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / A\vec{x} = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

En el Teorema 1.2.5 vimos que la suma de cualquier par de soluciones de un SLH es solución y que la multiplicación de cualquier solución de un SLH por cualquier real es solución.

En el Teorema 1.2.6. vimos que la estructura de las soluciones de un SLH es $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo \vec{v}_i vectores linealmente independientes, y $k = n - r$.

Por ser las soluciones combinaciones lineales de los vectores linealmente independientes $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$, este conjunto es una base del subespacio nulo de A . La dimensión de $\text{Nul}(A)$ es $k = n - r$.

- Recíprocamente, todo subespacio H de \mathbb{R}^n es el conjunto de soluciones de un SLH, es decir, es el subespacio nulo de una matriz A .

H es subespacio de \mathbb{R}^n si y solo si $H = \text{Nul}(A)$.

Las ecuaciones $A\vec{x} = \vec{0}$ ³ se denominan ecuaciones implícitas del subespacio

- Si un subespacio H de \mathbb{R}^n viene dado en un ejercicio como un SLH, la base de H se obtiene resolviendo el SL. *Paso de ecuaciones a base.*
- Si un subespacio H de \mathbb{R}^n viene dado en un ejercicio mediante su base, su correspondiente SLH se obtiene mediante cualquiera de los dos procedimientos que estudiaremos para el subespacio del ejemplo **HVZ12 Ejemplo D**, pg. 164-165. *Paso de base a ecuaciones.*

³plural porque nos referimos a las m ecuaciones escalares

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

- **Ejercicio adicional 4.4.1.** Determina $\text{Nul}(A)$ y una base de $\text{Nul}(A)$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Cuál es la dimensión de $\text{Nul}(A)$?
- **Ejercicio adicional 4.4.2.** Determina $\text{Nul}(A)$ y una base de $\text{Nul}(A)$, siendo $A = [1 \ 1 \ 1]$. El enunciado también podía haber sido: "Determina el subespacio de \mathbb{R}^3 de ecuación implícita $x + y + z = 0$ y una base del mismo. ¿Cuál es la dimensión de dicho subespacio?"

- **HVZ12 Ejemplo D.** Sea V_1 el subespacio de \mathbb{R}^5 de base $B = \{(1, 2, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$. Determina sus ecuaciones implícitas.

Tenemos dos procedimientos sistemáticos.

- Resolviendo la ec. $\text{rg} \left(\begin{bmatrix} P_B \\ \vec{x} \end{bmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{bmatrix} P_B \\ \vec{x} \end{bmatrix} \right)$ se obtienen directamente las ecuaciones implícitas.
 - Se obtiene una base de $\text{Nul}(P_B^t)$. Esos vectores base puestos como filas forman una matriz A que es matriz de coeficientes de las ecs. implícitas.
- **Ejercicio adicional 4.4.3.** Determina la/s ecuación/es implícitas de $H = \langle (2, -1, 0), (3, 0, -1) \rangle$. H es un hiperplano⁴ de \mathbb{R}^3 .

- **Ejercicio adicional 4.4.4.** Sean $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de

$H = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

- Determina si $\vec{x} \in H$, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de \vec{x} relativas a B .
- Obtén la ec/ecs. implícita/s del sub. vec. H .
- A partir del resultado anterior obtén una nueva base B' de H .

⁴ $\dim H = \dim \mathbb{R}^3 - 1$

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

- **Ejercicio adicional 4.4.5.** Obtén la/s ec./ecs. implícita/s de $H = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1) \rangle$ utilizando los dos métodos que conoces.
- **Ejercicio adicional 4.4.6.** Considera $S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5 \} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los \vec{v}_i los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base de $\langle S \rangle$.

b1) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 4, -5, -10)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores de S . Escribe "ninguno" o "para todo a " si ese es el caso.

b2) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 8, -10, 10)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores de S . Escribe "ninguno" o "para todo a " si ese es el caso.

c) Obtén la/s ec./ecs. implícita/s de $\langle S \rangle$, denotando a las variables de \mathbb{R}^4 como x_1, x_2, x_3, x_4 .

Dada $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{v}_4 \ \vec{v}_5]$, al subespacio $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5 \rangle$ se le denomina subespacio generado por las columnas de A y se denota $\text{Co}lA$.

Por tanto en este ejercicio, denotando $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{v}_4 \ \vec{v}_5]$, $\langle S \rangle = \text{Co}lA$.

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

ColA, NulA, y relación entre sus dimensiones

Consideramos la matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

ColA denota el subespacio generado por las columnas de A, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

$$A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] \quad \text{ColA} = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$$

Nótese que ColA es subespacio de \mathbb{R}^m , pues las columnas de A son vectores de m entradas (m filas).

Obviamente $\dim(\text{ColA}) = \text{rg}(A)$, pues las columnas de A que sean c.l. de otras hay que quitarlas para obtener la base.

Recordemos que el subespacio nulo de A, denotado NulA, es el conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$.

NulA es subespacio de \mathbb{R}^n , y obviamente $\dim(\text{NulA}) = n - \text{rg}(A)$.

La dimensión del subespacio nulo de A o núcleo de A es el número de soluciones independientes en el SLH o, lo que es lo mismo, el grado de indeterminación del SLH.

Se obtiene entonces:

$$\dim(\text{NulA}) + \dim(\text{ColA}) = n$$

Ejercicio Adicional 4.4.7. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, determina

- Una base y la dimensión de ColA.
- Una base y la dimensión de NulA.

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

Intersección y suma de subesp. vect. de \mathbb{R}^n

- Sean H y F subespacios de \mathbb{R}^n , se define intersección de H y F así :

$$H \cap F = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n / \vec{v} \in H \text{ y } \vec{v} \in F \}$$

Obviamente, $H \cap F \subseteq H$, $H \cap F \subseteq F$, $H \cap F = H \Leftrightarrow H \subseteq F$.

- $H \cap F$ es subespacio de \mathbb{R}^n .

$$\dim(H \cap F) \leq \dim H \text{ y } \dim(H \cap F) \leq \dim F$$

- Los vectores de $H \cap F$ cumplen a la vez las ecuaciones implícitas de H y las ecuaciones implícitas de F , por tanto las ecuaciones implícitas de $H \cap F$ se obtienen uniendo las ecuaciones de H y de F , y eliminando en el sistema lineal homogéneo resultante las ecuaciones que sean combinación lineal de otras.

Las ecuaciones redundantes se convierten en filas de ceros en la eliminación gaussiana.

Resolviendo las ecuaciones de $H \cap F$ se obtiene la base de $H \cap F$.

Ejemplos sencillos

- $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / z = 0\}$ Plano XY

- $F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / y = 0\}$ Plano XZ

$$H \cap F = \{(x, y, z) / y = 0, z = 0\} \quad \text{Eje X}$$

$$\text{Base de } H \cap F = \{(1, 0, 0)\}$$

- $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / y = 0, z = 0\}$ Eje X

- $T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x = 0, z = 0\}$ Eje Y

$$G \cap T = \{(x, y, z) / x = 0, y = 0, z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

- $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / z = 0\}$

Plano XY

$$F \subset \mathbb{R}^3 = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Recta no incluida en el Plano XY

Las ecs. implícitas de F son $x = y, x = z$

$$H \cap F = \{(0, 0, 0)\}; x = y = z = 0$$

- Sean H y F subespacios de \mathbb{R}^n , se define suma de H y F así:

$$H + F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n / \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ con } \vec{v}_1 \in H \text{ y } \vec{v}_2 \in F\}$$

$$H + F \neq H \cup F$$

(se puede analizar por ejemplo tomando H : eje X y F : eje Y en \mathbb{R}^3 . La suma es el plano XY pero la unión no lo es.)

$$H \subseteq H + F, F \subseteq H + F, H + F = H \Leftrightarrow F \subseteq H.$$

- $H + F$ es subespacio de \mathbb{R}^n .

$$\dim(H + F) \geq \dim H \text{ y } \dim(H + F) \geq \dim F.$$

- La unión de una base de H y una base de F es conjunto generador de $H + F$.

Podemos escribir la afirmación anterior así: Dadas B_H base de H y B_F base de F , entonces $H + F = \langle B_H \cup B_F \rangle$

$B_H \cup B_F$ es conjunto generador de $H + F$. Para convertir el conjunto generador en base tenemos que eliminar los vectores dependientes, es decir, que sean combinación lineal del resto.

$\dim(H + F) \leq \dim H + \dim F$, con la igualdad en el caso de que la unión de las bases de H y F sea conjunto l.i. y por tanto directamente base.

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

- Se dice que $H + F$ es suma directa si $\dim(H + F) = \dim H + \dim F$. Se denota $H \oplus F$.
- Sea H subespacio de \mathbb{R}^n . Se dice que G es subespacio complementario de H respecto de \mathbb{R}^n si $\mathbb{R}^n = H \oplus G$.
- Todo subespacio H de \mathbb{R}^n tiene subespacio complementario.

Ejercicios

- **Ejercicio Adicional 4.4.8.** Escribe el vector $\vec{v} = (5, 6)$ como suma de dos vectores, uno sobre la recta $\{(x, y) / y = 2x\}$ y otro sobre la recta $\{(x, y) / y = x/2\}$ (Tomado de Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications". Quinta edición. 2016. Pearson pg. 90).
- **Ejercicio Adicional 4.4.9** Considera los siguientes subespacios de \mathbb{R}^3 :
 - * el plano $\Pi: 3x + 6y - z = 0$
 - * la recta $r : \{(1, 2, 3)\lambda / \lambda \in \mathbb{R}\}$
 - a) Obtén una base de Π .
 - b) Justifica si la suma de Π y r es o no suma directa.
 - c) Justifica si Π y r son o no complementarios.
 - d) Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (7, 11, 63)$ como suma de un vector \vec{v}_1 del plano Π y un vector \vec{v}_2 de la recta r . En caso de que sea posible:

Calcula \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Comprueba explícitamente que el vector \vec{v}_1 obtenido se encuentra en el plano Π .

Comprueba explícitamente que el vector \vec{v}_2 obtenido se encuentra en la recta r .

Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

4.4 Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios

- **Ejercicio Adicional 4.4.10** Considera en \mathbb{R}^4 el subespacio $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 2z + t = 0\}$.
 - a) Halla una base y la dimensión de F
 - b) Halla la dimensión y una base de un subespacio complementario de F , denotándolo F'
 - c) Descompón $\vec{v} = (2, 1, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$ como suma de un vector \vec{v}_1 de F y un vector \vec{v}_2 de F'
- **Ejercicio Adicional 4.4.11.** Obtén una base de un subespacio G complementario de $F = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4) \rangle$.