Contenidos

Tema 2

Determinantes

En este tema estudiaremos los determinantes y como nos permitirán obtener rangos, inversas de matrices e incluso la solución de sistemas lineales (método de Cramer).

Presentamos antes varias definiciones:

- En una matriz cuadrada se denomina diagonal principal al conjunto ordenado de reales $\{a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}\}$[1]
- Una matriz cuadrada A es:
  - triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
  - triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
  - triangular si es triangular superior o triangular inferior.
  - diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
  - estrictamente triangular superior si es triangular superior y los elementos de la diagonal principal son todos distintos de cero.

Propiedad: Toda matriz A cuadrada y escalonada es triangular superior.

2.1 Definición de determinante

A toda matriz real cuadrada A_n le asociamos un real denominado **determinante de** A, det$A$ o $|A|$ simbolizado así :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Este número se calcula sumando todos los productos que se obtienen al multiplicar n elementos de la matriz de todas las formas posibles, con la condición de que en cada producto exista un único elemento de cada fila y un único elemento de cada columna; cada uno de estos productos llevará su signo o el opuesto según la permutación formada por los subíndices fila de los n factores y la formada por los subíndices columna de los n factores sean o no de la misma clase, respectivamente.

Cada sumando tiene esta forma:

$$a_{\mathbf{1}\, j_1} \ a_{\mathbf{2}\, j_2} \ \dots \ a_{\mathbf{n-1}\, j_{n-1}} \ a_{\mathbf{n}\, j_n}$$

[1]Se toma la definición de D.C. Lay, S.R. Lay y J.J. McDonald "Álgebra Lineal y sus aplicaciones" Quinta Edición (2016, Pearson Educación de México), página 94.

siendo $1, 2, \ldots, n$ el orden natural, y $j_1, j_2, \ldots, j_n$ una reordenación dada de $1, 2, \ldots, n$. Por simplicidad hemos tomado el orden natural para las filas.

El número de permutaciones (ordenaciones) de n elementos distintos $1, 2, \ldots, n-1, n$ es $n!$, por tanto el número de sumandos es $n!$.

Dos permutaciones son de la misma clase (distinta clase) cuando para pasar de una otra se necesita un número par (impar) de intercambios (también llamados inversiones).

Dos importantes resultados sobre determinantes son los siguientes:

- $|A^t|$=$|A|$. En efecto, los productos que se obtienen y los signos que les corresponden son los mismos en A^t que en A.
- $|I| = 1$. En efecto, en la matriz identidad de orden n solo existe un producto posible que no es cero, que es el de los elementos de la diagonal principal, que son todos 1.

Para un <u>determinante de orden 2</u> se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} \circ & \\ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \bullet \\ \bullet & \end{vmatrix}$$

Perm. Filas	Perm. Columnas	Inversiones	Signatura
1 2	1 2	0	
	2 1	1	$\times(-1)$

Para un <u>determinante de orden 3</u>:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Perm. Filas	Perm. Columnas	Inversiones	Signatura
1 2 3	1 2 3	0	
	1 3 2	1	$\times(-1)$
	2 1 3	1	$\times(-1)$
	2 3 1	2	
	3 1 2	2	
	3 2 1	1	$\times(-1)$

La regla de Sarrus simplifica la obtención del determinante de orden 3.

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} \quad ; \qquad \times(-1) \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Para un determinante de orden 4, tendríamos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ sumandos, cada uno formado por el producto de 4 elementos. Sin embargo, veremos cómo determinadas propiedades de los determinantes nos permitirán simplificar enormemente su cálculo.

Ejemplo 2.1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 2 - 3 - 8 - 0 = -7$$

2.2 Matriz de cofactores

Sea la matriz $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

M_{ij} denota la matriz $n-1 \times n-1$ que resulta de quitar de A la fila i y la columna j.

El determinante de M_{ij} se denomina **menor** de a_{ij}.

Se define **cofactor** A_{ij} de a_{ij} cómo: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$

Se define **matriz de cofactores de** A, cof(A), como aquella cuyo elemento (i,j) es el cofactor A_{ij}.

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

En Álgebra tiene mucho interés la traspuesta de la matriz de cofactores de A, ya que a partir de ella se puede calcular la inversa de A.

Propiedad: $(\operatorname{cof}(A))^t = \operatorname{cof}(A^t)$

2.3 Propiedades de los determinantes

1. $|A^t|=|A|$. (Esta propiedad ya se habían enunciado en la Secc. 2.1).

2. Si se intercambian entre sí dos líneas[2] (filas o columnas) paralelas el determinante cambia de signo.

3. Un determinante con dos líneas paralelas iguales es nulo. (Consecuencia inmediata de la propiedad 2)).

4. Si todos los elementos de una línea tienen un factor común, el determinante puede obtenerse como el producto de ese factor común por el determinante que resulta de eliminar ese factor común en la correspondiente línea.

   por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. Si los elementos de una línea son nulos, el determinante es nulo. (Consecuencia inmediata de la propiedad 4), puesto que el real que sería factor común es el cero).

6. Si la matriz A tiene dos líneas paralelas proporcionales el determinante de A es nulo. Consecuencia de las propiedades 4 y 3, pués al sacar factor común quedarán dos líneas iguales.

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{11} \\ a_{12} & \alpha a_{12} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

7. Si los elementos de una línea son la suma de r sumandos, el determinante se puede descomponer en suma de r determinantes que tienen las restantes líneas iguales y en el lugar de aquella, otra formada por los primeros, segundos, terceros, etc, sumandos.

[2] Por "línea" nos referiremos en toda la sección a filas o a columnas, indistintamente

$$\begin{vmatrix} a+b+c & 5 & 0 \\ d+e+f & 1 & -1 \\ g+h+i & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5 & 0 \\ d & 1 & -1 \\ g & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ e & 1 & -1 \\ h & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & 5 & 0 \\ f & 1 & -1 \\ i & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2+a & 1 \\ a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 6 \end{vmatrix}$$

8. Si los elementos de una línea son combinación lineal[3] de líneas paralelas, el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{12}+\beta a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{22}+\beta a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{32}+\beta a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \beta a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \beta a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\alpha \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\ 0 + \beta\ 0 = 0$$

9. Si a los elementos de una línea se le suman los correspondientes a otra paralela multiplicados por un real, el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\alpha a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| + \alpha\ 0 = |A|$$

Esta propiedad es muy útil para simplicar el cálculo de determinantes

Significa que la operación elemental de reemplazamiento, $F_i = F_i + \alpha F_j$, no altera el determinante

10. La suma de los elementos de una línea multiplicados por sus respectivos cofactores es igual al valor del determinante.

Esta propiedad es muy útil para simplicar el cálculo de determinantes

11. La suma de los elementos de una línea multiplicados por los cofactores de otra paralela es cero.

12. El determinante de las matrices triangulares y diagonales es el producto de los elementos de la diagonal principal. De esta propiedad se deduce de forma inmediata que el determinante de la matriz identidad es 1, propiedad que ya se había presentado en la Secc. 2.1.

13. Dadas A_n, B_n, $|A\ B| = |A|\ |B|$

    Se generaliza a cualquier número de matrices.

14. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ (se deduce de la propiedad 4)

15. Si A es invertible, entonces su determinante es distinto de cero y $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

    Consecuencia de esta propiedad es que si $|A| = 0$, entonces A no es invertible.

Aplicando las propiedades anteriormente expuestas podemos simplificar enormemente el cálculo de determinantes.

[3]Considerando los elementos de una línea como un vector

2.4 Desarrollo del determinante por cofactores

El valor del determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) de A por sus respectivos cofactores (Propiedad 10 de la lista anterior). Es decir

elegida una fila i $\qquad |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

ó

elegida una columna j $\qquad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

Este resultado es muy útil para calcular determinantes de orden superior a 3, al permitirnos reducir el cálculo del determinante de una matriz de orden n a básicamente el cálculo de n determinantes de orden $n-1$.

Ejemplo 2.2. *Calcula el siguiente determinante por cofactores de la primera columna.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -51$$

En caso de poder elegir la línea para el desarrollo de $|A|$ por cofactores se tomaría la primera fila, puesto que dos de sus cuatro elementos son ceros, ahorrándonos el cálculo de dos cofactores.

Ejemplo 2.3. *Calcula el valor del siguiente determinante:* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Desarrollaremos por ejemplo por cofactores de la 1ª *columna. Pero previamente realizaremos las operaciones (propiedad 9, no modifican el determinante) necesarias para hacer ceros todos los elementos de esta columna excepto el primero. La fila 1 es la fila auxiliar, utilizada para transformar los elementos de las filas 3 y 5.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \begin{array}{l} F_3 = F_3 + (-1) * F_1 \\ F_5 = F_5 + (-1) * F_1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1+(-1) & 1+(-2) & 0+(-1) & 2+(-2) & 0+(-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1+(-1) & 2+(-2) & 2+(-1) & 1+(-2) & 1+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por los cofactores de la 1^{a} *columna:*

$$|A| = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el nuevo determinante de orden 4 por cofactores de la 1^{a} *columna.*

$$|A| = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1+2-1+2) = 2$$

2.5 Inversa a partir de la traspuesta de la matriz de cofactores

Se cumplen los siguientes resultados (deducibles a partir de las propiedades 10 y 11 de los determinantes):

$$A\ (\mathrm{cof}(A))^t = |A|\, I$$
$$(\mathrm{cof}(A))^t\ A = |A|\, I$$

Si $|A| \neq 0$, podemos pasar $|A|$ al primer miembro, dividiendo, y obtenemos:

$$A\ \frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|} = I \tag{2.1}$$

$$\frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|}\ A = I \tag{2.2}$$

De las ecuaciones (2.1) y (2.2) deducimos: $$A^{-1} = \frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|} \tag{2.3}$$

La ecuación (2.3) nos da un procedimiento para calcular la inversa de una matriz.

RESUMEN: En esta sección encontramos que si $|A| \neq 0$, entonces A es invertible, con $A^{-1} = (\mathrm{cof}(A))^t/|A|$. En la propiedad 15 vimos que si A es invertible, entonces $|A| \neq 0$. Por tanto concluimos:

$$\boxed{A \text{ invertible} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$$

OBSERVACIÓN: Teniendo en cuenta la propiedad $\mathrm{cof}(A^t) = (\mathrm{cof}(A))^t$ (Secc. 2.2), la ecuación (2.3) se puede reescribir así:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{cof}(A^t)}{|A|}$$

Ejemplo 2.4. *Calcula la inversa de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ *a partir de su matriz de cofactores.*

Sol.

En primer lugar hay que calcular el determinante de A, confirmando que no es cero. Se obtiene $|A| = -10$ *aplicando el método de Sarrus.*

Seguidamente obtenemos la matriz de cofactores.

La matriz cuyos elementos son los menores de los a_{ij} *es:* $\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Para obtener la matriz de cofactores de A tenemos que multiplicar los elementos $|M_{ij}|$ *por el factor* $(-1)^{i+j}$*, o lo que es lo mismo, tenemos que cambiar de signo los elementos en los que la suma del índice de fila y el índice de columna sea impar.*

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -6 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Seguidamente obtenemos la traspuesta: $(\mathrm{cof}(A))^t = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Para obtener la inversa sólo queda dividir por el determinante.

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Comprueba el resultado siempre que calcules una inversa, confirmando que $AA^{-1} = I$.

<u>OBSERVACIÓN:</u> Si todos los elementos de una matriz son enteros y su determinante es 1 o -1, entonces los elementos de la inversa son también todos enteros.

2.6 Relación entre el determinante de A y el de una forma escalonada de A

Analizamos aquí cómo varía el determinante de una matriz al efectuar operaciones elementales sobre sus filas, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes

- Intercambio de filas: cambia el signo del determinante
- Reemplazar una fila por ella más un múltiplo de otra: no hace variar el determinante
- El escalamiento de una fila por un factor no nulo: escala el determinante por el mismo factor

Por tanto, si U es una forma escalonada de A, entonces $\boxed{|U| = |A| \times (-1)^s \times \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_p}$ siendo s el número de intercambios de filas y α_i (todos distintos de 0) los factores de los escalamientos realizados sobre las filas de A.

La expresión anterior implica: $\boxed{|U| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0}$

2.7 Relación entre determinante, inversa, rango y forma escalonada reducida

Continuando con la matriz A de la sección anterior, y su forma escalonada U, analicemos $|U|$.

Por ser U cuadrada y escalonada es triangular superior, y por tanto $|U|$ es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$$|U| = u_{11} \times u_{22} \times \ldots \times u_{nn}$$

Deducimos:

- A invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |U| \neq 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \; u_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow A_{\mathrm{red}} = I_n$.

  En este caso las formas escalonadas de A son triangulares superiores estrictamente.

En el Tema 1 también se dedujo el resultado de que A invertible si y solo si rg$A$=n, en ese caso basándonos en la resolución del SL $AA^{-1} = I$.

Estas afirmaciones también se pueden escribir en esta forma:

- A no invertible $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow |U| = 0 \Leftrightarrow \exists u_{ii} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}A < n \Leftrightarrow A_{\mathrm{red}}$ no es la identidad.

  En este caso las formas escalonadas de A son triangulares superiores no estrictamente.

Ejemplo 2.5. *Determina si las siguientes matrices son invertibles.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Sol:

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = -2$ *El determinante es distinto de cero por tanto A es invertible*

  También se podría haber razonado que A es invertible ya que rg A = 3 (vemos que en la forma escalonada quedan 3 pivotes)

- $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ *B no es invertible ya que su determinante es cero.*

  Del resultado rg B=2 (en la forma escalonada quedan 2 pivotes) también se podría haber concluido que B no es invertible.

Ejemplo 2.6. *Determina el valor de c para que la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *sea invertible.*

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_2 = F_2 - 2*F_1 \\ F_3 = F_3 - 2*F_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{F_{23}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & c-4 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_3 = F_3 + (c-4)*F_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2(c-4) \end{bmatrix} = A_{\text{esc}}$$

Nótese que la operación $F_3 = F_3 + (c-4)F_2$ *puede realizarse cualquiera que sea el valor de c.*

No se podría efectuar $F_2 = (c-4)F_2$*, porque en los escalamientos el factor no puede ser cero, y se tendría ese valor para* $c = 4$*.*

De la matriz A_{esc} *obtenida se concluye:*

- *Si* $c = 4$ *rgA=2 por tanto A no es invertible.*
- *Si* $c \neq 4$ *rgA=3 por tanto A es invertible.*

Resultado: *La matriz es invertible si y sólo si* $c \neq 4$

2.8 Rango de una matriz como el orden del mayor menor no nulo

Dada una matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, se define **menor de orden** p de A, con $p \leq m$ y $p \leq n$, al determinante de la submatriz de orden p que resulta de eliminar $m-p$ filas y $n-p$ de columnas de A.

Por ejemplo, considerada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, veamos algunos de sus menores:

El menor de orden 2 que toma las filas 1,2 y las columnas 1,4, es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

El menor de orden 2 que toma las filas 1,3 y las columnas 2,4, es: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$.

El número de menores de orden 2 en esta matriz es 18, ya que existen 3 elecciones para el par de filas (1^a y 2^a , 1^a y 3^a , 2^a y 3^a) y 6 para el par de columnas (1^a y 2^a , 1^a y 3^a, 1^a y 4^a , 2^a y 3^a , 2^a y 4^a , 3^a y 4^a).

El número de menores de orden 3 en esta matriz es 4, ya que existen 4 elecciones para la terna de columnas (1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4 ; 2,3,4).

Para una matriz de orden $m \times n$ el número de menores de orden p es:

$$\binom{m}{p} \times \binom{n}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

El primer factor corresponde al número de elecciones posibles de p filas y el segundo al número de elecciones posibles de p columnas.

Propiedad: Dada $A_{m\times n}$, rg$A$ es igual al orden del mayor menor no nulo de A.

Por ejemplo, si una matriz $A_{5\times 8}$ tiene rango 3, entonces existe al menos un menor de orden 3 que no es nulo, y todos los menores de orden superior (los de orden 4 y los de orden 5 en este ejemplo) son nulos.

En $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, el rango es 3, ya que las tres primeras columnas producen claramente un menor distinto de cero.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-6) = -7$ (desarrollado por cofactores de la tercera fila o de la tercera columna)

Búsqueda del rango sirviéndose de los menores

Básicamente extraído de J. de Burgos "Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana". 1999. Segunda edición. McGraw Hill. Página 96.

Para hallar el rango de A, se toma un menor $|M_2|$ de orden 2 no nulo y se le orla con una fila fija, la i, y con sucesivas columnas; si todos los menores de orden 3 que así se obtienen son nulos, entonces se prescinde de la fila i, y se repite el proceso con otra o con otras filas hasta: 1) encontrar un menor $|M_3|$ de orden 3 no nulo, en cuyo caso el rango es al menos 3; ó 2) descubrir que todos los menores de orden 3 son nulos, en cuyo caso el rango es 2. Si hay un menor $|M_3|$ no nulo, se le orla con una fila y con sucesivas columnas, siguiendo el mismo proceso que con $|M_2|$, lo que nos lleva o bien a que el rango es 3 (si todos los menores de orden 4 son nulos) o bien a que el rango es al menos 4 (en cuanto se encuentre un menor de orden 4 no nulo). Siguiendo así , se llega a un menor no nulo del mayor tamaño posible; este tamaño es el rango.

Ejemplo 2.7. *Determina el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & a & a(a-1) \end{bmatrix}$ *en función del parámetro a, basándote en sus menores.*

Sol.:

Las dos primeras filas y las dos primeras columnas forman un menor $|M|$ de orden 2 no nulo, de valor 12. Por existir menor de orden 2 no nulo ya sabemos que el rango de A es igual o mayor que 2.

Orlando este menor vemos que solo tenemos una posibilidad de filas, que es la fila 3, y dos posibilidades de columna. Denotamos $|M_3^{(1)}|$ y $|M_3^{(2)}|$ a los menores obtenidos con las columnas tercera y cuarta respectivamente.

$$|M_3^{(1)}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \qquad |M_3^{(2)}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & a(a-1) \end{vmatrix}$$

Por cofactores de la tercera fila tenemos:

$$|M_3^{(1)}| = 12a \qquad |M_3^{(2)}| = a(a-1)12$$

$rgA = 2 \Leftrightarrow |M_3^{(1)}| = 0$ **y** $|M_3^{(2)}| = 0$ *Los dos menores de orden 3 han de ser nulos para que el rango sea 2.*

$$\begin{cases} |M_3^{(1)}| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ |M_3^{(2)}| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = 1 \end{cases}$$

Por tanto $\boxed{rgA = 2 \Leftrightarrow a = 0}$ *($a = 0$ anula los dos menores. $a = 1$ anula solo uno, por lo que no vale)*

Analicemos ahora el resto de casos, es decir, el caso $a \neq 0$. Para ese caso $|M_3^{(1)}| \neq 0$, por tanto al tener un menor no nulo de orden 3 el rango es como mínimo 3. Como la matriz tiene 3 filas este es además el rango máximo, por tanto para $a \neq 0$ el rango es 3.

$$\boxed{\textit{Conclusión: } \begin{cases} \text{rango A} = 2 \Leftrightarrow a = 0 \\ \text{rango A} = 3 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}}$$

Gracias al método de "orlar" no hemos tenido que estudiar los cuatro menores de orden 3, sino solo 2.

2.9 El rango de $A_{m\times n}$ es igual al rango de $A^t_{n\times m}$

A cada submatriz cuadrada M de orden p en A, definida por tomar las filas ordenadas $i_1, \dots, i_p$ y las columnas ordenadas $j_1, \dots, j_p$, le corresponde una submatriz M^t en A^t, que toma las filas $j_1, \dots, j_p$ y las columnas $i_1, \dots, i_p$. El determinante de M y el determinante de M^t son iguales, por ser una matriz la traspuesta de la otra. Los menores, que son estos determinantes, son iguales en A y A^t, por lo tanto el rango, que es el orden del mayor menor no nulo, es el mismo en A y en A^t.

Por ejemplo en la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, justificamos que el rango es 3, basándonos en el menor no nulo $(= -7)$, que se obtiene con las tres primeras columnas.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-6) = -7$ (desarrollado por cofactores de la tercera fila o de la tercera columna)

En $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ el menor correspondiente es el que toma las tres primeras filas, por tanto:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-6) = -7$, tomando el mismo valor.

Lo mismo sucedería con los menores nulos, como es el caso del menor de orden 2 en A que toma las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 4, y el correspondiente menor de orden 2 en A^t, que toma las columnas 1 y 2 y las filas 1 y 4. Estos menores son $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ en A y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ en A^t,

2.10 Método de Cramer

Consideremos el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ con A invertible de orden n y siendo por tanto compatible determinado.

Dados A y $\vec{b}$ denotamos $\quad A_i = [\ \vec{a}_1 \ \ \dots \ \ \underset{\text{col. } i}{\vec{b}} \ \ \dots \ \ \vec{a}_n\ ]$

A_i es la matriz que tiene en la columna i el vector $\vec{b}$ y las demás columnas como en A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \text{col. } i \end{array}$$

La solución única $\vec{x}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ puede obtenerse como: $\; x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

Ejemplo 2.8. *Resolver el siguiente sistema por el método de Cramer.*

$$\begin{cases} x_1 \; -2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{58}{2} = 29 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{32}{2} = 16 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

2.11 Ejercicios

Adicional 2.1 Considera $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

(a) Obtén una forma escalonada de A.

(b) A partir de ésta determina el rango y si es invertible o no, ambos en función del parámetro a, rellenando las afirmaciones siguientes.

rg(A)=1 si y solo si: .... rg(A)=2 si y solo si: ....

rg(A)=3 si y solo si: .... rg(A)=4 si y solo si: ....

A invertible si y solo si: ....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese.

(c) Obtén el determinante de A y justifica el procedimiento empleado.

Adicional 2.2 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, encuentra un razonamiento rápido que permita afirmar que su rango es 3.

Adicional 2.3 Estudia el tipo de solución en función del parámetro a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + a\,x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + a\,x_3 = 3 \end{cases}$$

Adicional 2.4 Clasifica el siguiente sistema lineal en función del parámetro a.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} - x_1 & - & 2\,x_2 & + & a\,x_3 & = & a \\ 2\,x_1 & - & a\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: ....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: ....

El sistema es incompatible si y sólo si: ....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Comprueba que las respuestas presentadas son consistentes entre sí.

Adicional 2.5 Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, y sabiendo que

$D = ABC = \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, calcula la matriz C. Si no existe, indícalo explícitamente.

Ejercicios del libro Álgebra Lineal y Geometría de Hernández, Vázquez y Zurro. Pearson. 2012. Tercera edición.

- Sección 2.1.: 4c (pg. 59). Obtén el determinante de la matriz traspuesta de la matriz del enunciado. Realiza operaciones de reemplazamiento de filas para simplificarlo ($F_i = F_i + \alpha F_j$).

  El determinante del enunciado es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

- Sección 2.1.: 4d (pg. 59). Se pide el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- Sección 2.4.: 7b (pg. 95). Haz uso del concepto de determinante. El enunciado pide encontrar los valores de a para que la siguiente matriz sea invertible: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{bmatrix}$

- Sección 2.4.: 7c (pg. 95). Haz uso del determinante simplificándolo previamente (sacando factor común y realizando operaciones de reemplazamiento, $F_i = F_i + \alpha F_j$) .

  El enunciado pide encontrar los valores de a yb para que la siguiente matriz sea invertible: $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$

- Sección 2.4.: 11 (pg. 95). Haz uso del concepto de determinante.

  El enunciado pide calcular los valores de m para que el siguiente sistema tenga soluciones no triviales: $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

- Sección 2.5.: 2 (pg. 104). Resuélvelo orlando menores, teniendo en cuenta que el rango es el orden del mayor menor no nulo.

  El enunciado pide el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ en función del parámetro a.

En el mismo libro, en la página 91, tienes otro ejemplo (Ejemplo A) de obtención de la inversa de una matriz de orden 3 por cofactores.

Soluciones de algunos ejercicios

- ADICIONAL 2.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & a & 3 & | & 2 \\ 2 & 3 & a & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & | & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = (a-1)(2+a) - 4$

En efecto podemos calcular el determinante de A con la segunda matriz (sus tres primeras columnas) porque las operaciones de reemplazamiento no modifican el determinante.

Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema será compatible determinado. Compatible porque rg$A$=3, y entonces rg A^* también 3 porque no hay más de tres filas. Determinado porque el rango de A coincide con el número de incógnitas.

Igualando el determinante de A a cero tenemos ec. de segundo grado en a. Las soluciones o raíces son $a = 2$, $a = -3$.

  - Para $a \neq 2$ y $a \neq -3$ el determinante de A es distinto de cero, y por tanto el SL es compatible determinado.
  - $a = 2$

    Analizamos el caso sustituyendo ese valor de a en la matriz en la ya está hecha la eliminación gaussiana en la primera columna:

    $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

    Sistema compatible indeterminado (rg$A$ = rgA^* = 2, menor que el número de incógnitas).
  - $a = -3$

    $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

    Sistema incompatible (rg$A$ =2, y rgA^* = 3)

    Resumen:

    $$\begin{cases} a \neq 2 \text{ y } a \neq -3 & \text{sistema compatible determinado} \\ a = 2 & \text{compatible indeterminado con un parámetro libre} \\ a = -3 & \text{incompatible} \end{cases}$$

- ADICIONAL 2.4

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & a & | & a \\ 2 & -a & 2 & | & -2 \\ 1 & 2 & 4 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 3 \\ 2 & -a & 2 & | & -2 \\ -1 & -2 & a & | & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 3 \\ 0 & -a-4 & -6 & | & -8 \\ 0 & 0 & 4+a & | & 3+a \end{bmatrix}$$

$a = -4$ Sistema incompatible porque la tercera ecuación queda $0 = -1$

rg$A$=2 , rgA^*=3

$a \neq -4$ Sistema compatible determinado. rg$A$=rgA^*=3

- HVZ12. Sección 2.1. Ejercicio 4c (pg. 59). El enunciado pide obtener: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

  En primer lugar tomamos la traspuesta (la trasposición no varía el determinante).
  $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & (y-x)(y+x) \\ 0 & z-x & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix} =$
  $(y-x)(z-x)(z-y)$

- HVZ12. Sección 2.4. Ejercicio 7c (pg. 95). El enunciado pide encontrar los valores de a y b para que la siguiente matriz sea invertible: $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$

  La matriz es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero.
  $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = a\,b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a\,b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & a^2-1 & b^2-1 \end{vmatrix} =$

  $a\,b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & (a-1)(a+1) & (b-1)(b+1) \end{vmatrix} =$

  A partir de aquí tenemos estas dos posibilidades

  - C2=C2-C1, C3=C3-C1, es decir, restamos a la columna 2 la columna 1, y a la columna 3 la columna 1:
    $= a\,b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & (a-1)(a+1) & (b-1)(b+1) \end{vmatrix}$
    Seguidamente sacamos factor común $(a-1)$ de col2 y $(b-1)$ de col3.
    $= a\,b\,(a{-}1)\,(b{-}1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & b+1 \end{vmatrix} = a\,b\,(a{-}1)\,(b{-}1)\,(b{+}1{-}a{-}1) = \boxed{a\,b\,(a-1)\,(b-1)\,(b-a)}$
    La matriz es invertible si y solo si: $a \neq 0$ y $b \neq 0$ y $a \neq 1$ y $b \neq 1$ y $a \neq b$.
  - La otra posibilidad es desarrollar el determinante por cofactores de la primera columna.
    $= a\,b\,((a-1)\,(b-1)(b+1) - (b-1)(a-1)(a+1))$
    Sacando factor común $(a-1)(b-1)$ tenemos:
    $= a\,b\,(a-1)\,(b-1)(b+1-a-1) = \boxed{a\,b\,(a-1)\,(b-1)(b-a)}$

- HVZ12. Sección 2.5. Ejercicio 2 (pg. 104). El enunciado pide el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ en función del parámetro a, y lo resolveremos orlando menores.

  Tomamos el menor no nulo de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}$

  Hay dos menores que lo orlan, uno con col3 y otro con col4. Tomo primero col4 porque no tiene parámetro.

  $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & 0 \end{vmatrix}$ a col3 le he restado col1 para conseguir un cero.

$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & 0 \end{vmatrix}$ a col1 le he restado col3 para conseguir otro cero. Aplico Sarrus sin simplificar más:

$|M1| = -10 + 3a + 1 = -9 + 3a$

- Si $a \neq 3$ tenemos un menor de orden 3 distinto de cero, y por tanto el rango de la matriz es 3. No puede ser mayor porque la matriz tiene 3 filas.
- Si $a = 3$ este menor es 0, y no podemos concluir hasta haber estudiado el valor del otro menor para $a = 3$.

  $|M2| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3} & -1 \\ 2 & -1 & \mathbf{3} \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 20 + 9 - 1 - 30 + 36 = -51 + 51 = 0.$

  Para $a = 3$ este menor también es cero, por tanto para $a = 3$ el rango es 2.