

1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan.

Esquema basado fundamentalmente en la Sección 1.1. del mismo título, de Hernández, Vázquez y Zurro, 2012, de aquí en adelante HVZ.

- Los ejemplos señalados en **negrita** son los de HVZ, usando su identificación.
- Los teoremas en **negrita** son los de HVZ, usando su numeración.
- Se presentan al final de la sección dos listas de ejercicios:
 - Lista basada en HVZ, con las identificaciones en **negrita**.
 - Lista adicional, con la enumeración en color azul.

1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan.

- **Ejemplo A** (pg. 3). Sistema de ecuaciones lineales 2×2 (2 ecuaciones y 2 incógnitas), con solución única. Se dice que es compatible determinado.
- Marco general: Sistema de m ecuaciones lineales (SL) con n incógnitas, con coeficientes reales a_{ij} , y con términos independientes b_i también reales.
- Sistemas equivalentes entre sí son los que tienen las mismas soluciones. Las siguientes transformaciones de un SL producen sistemas equivalentes a él:
 - i) Multiplicar ecuación por real no nulo.
 - ii) Intercambiar dos ecuaciones entre sí (es decir, cambiarlas de orden).
 - iii) Sumar a una ecuación un múltiplo de otra (reemplazamiento).

Estas transformaciones se denominan “operaciones elementales”.

- La solución debe ser expresada vectorialmente:

Vector solución \vec{x} .

Vector = matriz columna, con elementos reales.

Por ejemplo la solución del Ejemplo A es $\vec{x} = (1, 1)$, que matricialmente se

expresa como $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Comprobación de la solución.

1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan

- **Ejemplo B** (pgs. 3-5). SL 3×3 (3 ecuaciones y tres incógnitas) con solución única.
- Matriz de coeficientes, vector de términos independientes y matriz ampliada de un SL.
 - Expresiones de los tamaños de las matrices: Matriz $m \times n$, o matriz de orden n , para rectangulares o cuadradas respectivamente.
 - Matriz de coeficientes A .
 - Matriz ampliada $[A | \vec{b}]$ o A^* .
- Resolución del Ejemplo B considerando sólo la matriz ampliada y las operaciones elementales sobre ella.
- **Ejemplo C** (pgs. 5-6). SL 3×4 (3 ecuaciones y 4 incógnitas) con infinitas soluciones y un parámetro libre. Se dice que es compatible indeterminado, con un grado de indeterminación en este caso.
Resolución considerando sólo la matriz ampliada y las operaciones elementales sobre ella.
- Solución en forma vectorial paramétrica. Elección de los parámetros libres.
- Soluciones particulares.

1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan.

- Elemento cabecera de una fila = primer elemento distinto de cero de cada fila.
- Peldaños, pivotes y columnas pivotaes en una matriz escalonada. El número de cualquiera de ellos en una matriz escalonada es obviamente el mismo.
- Matriz escalonada reducida: pivotes 1 y ceros por encima de los pivotes.
- Formas escalonadas y forma escalonada reducida de una matriz.
- La forma escalonada reducida de una matriz es única.
- Método de eliminación de Gauss-Jordan (G-J): transformación mediante operaciones elementales de la matriz ampliada hasta llegar a su forma escalonada reducida. Con esta última matriz obtenemos el SL más sencillo posible equivalente al original.
- **Ejemplo D** (pg. 7). SL 3×3 (3 ecuaciones y 3 incógnitas) que no tiene solución. Se dice que es incompatible.

Resolución mediante el método de G-J: $A^* \rightarrow \dots \rightarrow A_{\text{esc.red.}}^*$.

No hace falta llegar hasta la forma escalonada reducida, pues se infiere la ausencia de solución por la existencia de pivote en la última columna de cualquier forma escalonada de la matriz ampliada.

1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan.

- Símbolo \sim para expresar que las matrices ampliadas sucesivas corresponden a SLs equivalentes.

Por ejemplo $A^* \sim \dots \sim A_{\text{esc.}}^* \sim \dots \sim A_{\text{esc.red.}}^*$.

- El proceso de transformaciones mediante operaciones elementales de A^* a una forma escalonada $A_{\text{esc.}}^*$ se denomina eliminación gaussiana.

- **Teorema 1.1.1 (Rouché-Frobenius).**

$A_{m \times n}$ es la matriz de coeficientes.

A^* es la matriz ampliada.

p = número de peldaños/pivotes de cualquier forma escalonada de A .

p^* = número de peldaños/pivotes de cualquier forma escalonada de A^* .

Clasificación del SL respecto del tipo de solución.

- Sistema compatible determinado si y solo si $p^* = p = n$
 - Sistema compatible indeterminado si y solo si $p^* = p < n$
 - Sistema incompatible si y solo si $p^* = p + 1$
- Observación: Si $p = m$ el SL es compatible.

1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan.

- Aplicación del Teorema RF a los ejemplos B, C, D.
- Un SL se dice homogéneo (SLH) si $\vec{b} = \vec{0}$.

Los SLH son siempre compatibles. Como mínimo tienen una solución que es $\vec{x} = \vec{0}$, denominada solución trivial.

Observación: La eliminación gaussiana hasta la forma escalonada, sin llegar a la forma escalonada reducida, ya permite clasificar como SCD, SCI o SI, puesto que peldaños/columnas pivotaes quedan ya fijados. También permite obtener la solución, si bien de forma menos directa que cuando se ha llegado a la forma escalonada reducida.

1.1. Ejercicios

Ejercicios de HVZ:

- **Ejemplo C** (pg. 5) pero tomando como vector de términos independientes $\vec{b} = (0, 0, 0)$.
- **Ejemplo E** (pg. 11).
- **Ejercicios 1.1** Cualquiera de ellos desde el 1 hasta el 4 (pgs. 12-13).

Ejercicios adicionales:

- **1.1.1.** Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados ¹, utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo \vec{v}_i vectores numéricos específicos de \mathbb{R}^5 y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ produce una solución válida del sistema).

$$I : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = 3 \end{cases}$$

$$II : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases}$$

¹El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

1.2. Operaciones con vectores, rango de una matriz, y estructura de las soluciones de un sistema.

Esquema basado fundamentalmente en la Secc. 1.2. de HVZ, con título “Rango de una matriz. Estructura de las soluciones de un sistema”.

- Los ejemplos señalados en **negrita** son los de HVZ, usando su identificación.
- Las definiciones en **negrita** son las de HVZ, usando su numeración.
- Los teoremas en **negrita** son los teoremas y proposiciones de HVZ, usando su numeración.
- Los ejercicios adicionales están indicados en color azul y tienen enumeración independiente.

- Se presentan al final de la sección dos listas de ejercicios:
 - Lista basada en HVZ, con las identificaciones en **negrita**.
 - Lista adicional, con la enumeración en color azul.

1.2. Operaciones con vectores.

Operaciones con vectores, combinación lineal y dependencia lineal

- Los vectores se expresan matricialmente como columnas.
- Toda matriz $m \times n$ se puede considerar concatenación de n vectores columna, cada uno con m entradas o componentes, o concatenación de m "vectores fila" de n componentes.
- Formalmente un vector fila es la matriz traspuesta de un vector columna.
 - \vec{a} es una matriz columna
 - \vec{a}^t una matriz fila o vector fila
- Son obvias las siguientes operaciones con vectores:
 - Establecer la igualdad de dos vectores.
 - Suma de vectores.
 - Multiplicación de un vector por un real (también llamado escalar).

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad , \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ si y solo si } a_i = b_i \text{ para todo } i \text{ desde } 1 \text{ hasta } n$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$c \vec{a} = (c a_1, c a_2, \dots, c a_n)$$

- Dos de las operaciones elementales realizadas en la eliminación G-J son sumas de vectores fila y multiplicación de un vector fila por un real.
- Propiedades de la suma de vectores, de la multiplicación de un escalar por un vector y distributivas. (Ver la lista en HVZ, pg. 14).
- Obtención del opuesto de un vector con la multiplicación por -1 $(-1) \vec{a} = -\vec{a}$

1.2. Operaciones con vectores.

- Conjunto de vectores y combinación lineal.

\vec{a} es combinación lineal (c.l.) del conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_p tales que

$$\vec{a} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_p\vec{a}_p$$

Los c_i reciben el nombre de coeficientes o pesos de la combinación lineal.

$\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores. (Sin más que tomar todos los escalares 0).

- **Definición 1.2.1:**

- Un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ es linealmente dependiente (l.d.) si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_p , no todos cero, tales que

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_p\vec{a}_p = \vec{0} \quad [1]$$

La ecuación anterior, con c_i que no son todos cero, se denomina relación de dependencia lineal.

- Un conjunto de vectores es linealmente independiente (l.i.) si no es linealmente dependiente.
- Se verifica el siguiente resultado: un conjunto es l.d. si y solo si al menos un vector es c.l. del resto. En efecto, a partir de la relación de dependencia lineal [1] siempre se puede despejar un vector como c.l. del resto.

- **Ejemplo A** (pg. 15)

- **Ejemplo B** (pg. 16)

1.2. Operaciones con vectores.

- Ejercicio adicional 1.2.1

- $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$. ¿Es $(1, 2, 0)$ c.l. de los vectores de S ? ¿Es $(0, 0, 5)$ c.l. de los vectores de S ? ¿Es S conjunto l.d.?
- $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0)\}$. ¿Es A conjunto l.d.? En caso afirmativo obtén una relación de dependencia lineal.

- Conclusiones para un conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$

- El conjunto es l.i. si y solo si todas las columnas de la forma escalonada² de $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$ son pivotaes.
- De un conjunto l.d. se puede obtener un subconjunto máximo de vectores l.i. entre sí eliminando los que correspondan a columnas no pivotaes en la forma escalonada.
- Cada vector eliminado se puede expresar como combinación lineal del subconjunto máximo l.i.
- Dos vectores son l.i. si y solo si uno no es múltiplo del otro.

²Cualquier forma escalonada

1.2. Rango de una matriz.

- **Definición 1.2.2:** Rango de un conjunto de vectores. Rango de una matriz.

El rango de un conjunto de vectores es el número máximo de vectores l.i. entre sí con los que cuenta el conjunto. Aunque existan distintas elecciones de estos vectores l.i. el número de ellos es siempre el mismo.

El rango de una matriz se define como el rango de sus columnas.

$$A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n] \quad \Rightarrow \quad \text{rg}A = \text{rg}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

Observaciones:

- No hace falta completar la eliminación G-J para determinar el subconjunto l.i. o el rango, pues basta con llegar a una forma escalonada de la matriz para reconocer las columnas pivotaes.
- $\text{rg}A_{m \times n}$ es como máximo el menor de los valores de m y n , ya que en sus formas escalonadas no puede haber más de m peldaños ni más de n columnas pivotaes.
- **Ejemplo C** (pgs. 17-18)

Se puede reescribir el Teorema de Rouché-Frobenius en términos de los rangos de $A_{m \times n}$ y A^* (**Teorema 1.2.4**).

- Sistema compatible determinado si y solo si $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) = n$
- Sistema compatible indeterminado si y solo si $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) < n$
- Sistema incompatible si y solo si $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) + 1$

1.2. Estructura de las soluciones de un sistema.

- **Teorema 1.2.5.** Relaciones entre las soluciones de un SLH.
 - La suma de cualquier par de soluciones es solución.
 - La multiplicación de cualquier solución por cualquier real es solución.
- **Teorema 1.2.6.** La estructura de las soluciones de un SLH indeterminado tiene la forma:
 $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo \vec{v}_i vectores linealmente independientes, y k el número de parámetros libres. $k = n - \text{rg}A$, siendo A la matriz de coeficientes.

Análisis con el correspondiente homogéneo de **1.1. Ejemplo C** (pg. 5)

- **Teoremas 1.2.(7-8).** Relación entre la solución de un SL no homogéneo compatible indeterminado y la de su correspondiente homogéneo.

$$\vec{x}_{\text{no homogéneo}} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k, \quad [2]$$

siendo \vec{p} una solución particular del SLNH y $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$ la solución del correspondiente homogéneo.

$k = n - \text{rg}A$, siendo A la matriz de coeficientes.

- Análisis con **1.1.Ejemplo C** (pg. 5)

1.2. Ejercicios.

Ejercicios de HVZ:

- **Ejercicios 1.2.** Cualquiera de ellos desde el 1 hasta el 5. (pgs. 24-25).

Ejercicios adicionales:

- Análisis de los teoremas 1.2.6, 1.2.(7-8) con [Ejerc. adic. 1.1.1](#)

- **1.2.2.** Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ con: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \\ a \end{bmatrix}$, con

a parámetro, y el vector $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ b \end{bmatrix}$, con b parámetro.

- Obtén el rango del conjunto S en función del parámetro a .
- Determina los valores de a y b para que \vec{v}_4 sea combinación lineal de los vectores de S .
- Escoge un par de valores (a, b) que verifiquen el apartado b) y obtén para ese caso los coeficientes de la combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ que producen \vec{v}_4 .

1.2. Ejercicios.

• 1.2.3.

Considera el sistema lineal de matriz ampliada $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & a & 5 \\ 1 & 1 & a & a \end{array} \right]$

a) Mediante eliminación gaussiana obtén la matriz ampliada B^* de un sistema lineal equivalente, de forma que B^* cumpla:

$$b_{21}^* = 0, b_{31}^* = 0, b_{32}^* = 0, b_{41}^* = 0, b_{42}^* = 0 \text{ y } b_{43}^* = 0,$$

b) Estudia, en función del parámetro a , el rango de la matriz de coeficientes A y el rango de la matriz ampliada A^* , basándote en el apartado anterior. Clasifica el sistema en base a esos rangos, cubriendo toda la información indicada en la tabla.

Usa una fila de la tabla para cada par de valores posible de los rangos ($\text{rg}A$, $\text{rg}A^*$). Asegúrate de que no existe solapamiento en los valores de a entre filas distintas de la tabla. Si das más de una condición para el parámetro a utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Valores de a	rango A	rango A^*	Tipo de sistema en cuanto a solución

1.2. Ejercicios.

- 1.2.4. Considera el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz ampliada:

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & b_1 \\ 4 & 7 & -4 & b_2 \\ -6 & -3 & 1 & b_3 \end{array} \right]$$

- ¿ Es el sistema lineal compatible para todo \vec{b} ? Razona la respuesta.
 - En caso de que la respuesta sea negativa, encuentra una ecuación que incluya a b_1 , b_2 y b_3 , y que permita que el sistema sea compatible.
- 1.2.5. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 5t = 1 \\ 3x + 3y \quad \quad + 3t = 3 \\ 3x + 4y + z - 4t = 2 \end{cases}, \text{ halla:}$$

- La solución general en forma vectorial paramétrica.
- La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.
- La solución general en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

- **1.2.6.** Calcula a para que sea compatible el siguiente sistema y resuélvelo.

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 5 \\ 2x - y = 8 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

1.2. Ejercicios.

- 1.2.7. Considera el siguiente sistema constituido por 4 masas puntuales:

Punto	Masa
$\vec{v}_1 = (5, -4, 3)$	$m_1 = 2 \text{ g}$
$\vec{v}_2 = (4, 3, -2)$	$m_2 = 5 \text{ g}$
$\vec{v}_3 = (-4, -3, -1)$	$m_3 = 2 \text{ g}$
$\vec{v}_4 = (-9, 8, 6)$	$m_4 = 1 \text{ g}$

- Calcula el centro de masa, \vec{v}_{cdm} , del sistema, sabiendo que:

$$\vec{v}_{\text{cdm}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_k \vec{v}_k}{m_1 + \dots + m_k}$$

- Calcula el centro geométrico del sistema.

$$\vec{v}_{\text{cg}} = \frac{\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k}{k}$$

Comenta para cada apartado cual ha sido el conjunto de vectores empleado para la combinación lineal y cuales han sido los coeficientes o pesos utilizados.

Enunciado tomado de "Linear Algebra and its Applications" (Edición 5). Lay, Lay y MacDonald. Sección 1.3. Ejercicio 29. pg. 33.

Esquema basado fundamentalmente en la Sección 1.3. de HVZ.

- Los ejemplos señalados en **negrita** son los de HZV, usando su identificación.
- Los ejercicios adicionales están indicados en color azul y tienen enumeración independiente.
- Se presentan al final de la subsección dos listas de ejercicios:
 - Lista basada en HZV, con las identificaciones en **negrita**.
 - Lista adicional, con la enumeración en color azul.

1.3.1. Operaciones con matrices.

- Igualdad de matrices $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$.
- Suma de matrices $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$. Propiedades. Matriz cero. Matriz opuesta. (pg. 34)
- Producto de una matriz por un real. Propiedades. Obtención de la opuesta. Distributivas. (pg. 34)

Observación: Se puede obtener la combinación lineal de matrices.

- Producto de matrices $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$.
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$
 - **Ejemplo I** (pg. 36)
 - Propiedades (pg. 37)
 - Matriz identidad
 - El producto de matrices no es necesariamente conmutativo
 - El producto matriz-vector es un vector. $A\vec{v} = \vec{w}$.
 \vec{w} resulta ser la c.l. de las columnas de A tomando como coeficientes las componentes de \vec{v} . El coeficiente que acompaña a la columna i de A es la entrada i de \vec{v} .

1.3.1. Operaciones con matrices

• Ejer. adic. 1.3.1.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A & \vec{v} & & \vec{w} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times -1 \\ 0 \times 1 + 0 \times 2 + 6 \times -1 \\ 1 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times -1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↑
Desarrollamos el producto
con la regla de pg. 36

↑ Desglosamos en sumandos
y sacamos factor común

• Traspuesta de una matriz

Dada $A_{m \times n}$ se define matriz traspuesta de A , y se denota A^t , a aquella cuya fila i -ésima es la columna i -ésima de A .

Un resultado que relaciona la operación de trasposición con el producto es el siguiente:

$(AB)^t = B^t A^t$, siempre que se pueda realizar el producto AB . Se extiende al producto de cualquier número de matrices.

1.3.1. Expresión matricial y vectorial de un SL.

Representación del SL mediante la ec. matricial $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad [3]$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\ A & \vec{x} & & & & \vec{b} \end{matrix}$$

Desarrollando el producto, y teniendo en cuenta ec. [3].

$\vec{x}_{n \times 1}$ es solución del SL [3] $\Leftrightarrow \vec{x}_{n \times 1}$ es solución de la ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ [4].

1.3.1. Expresión matricial y vectorial de un SL.

Representación del SL mediante una ec. vectorial

Partimos de la igualdad:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

descomponiendo el vector de la izquierda en n sumandos, y sacando como factor común las x_1, x_2, \dots, x_n , obtenemos:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ por tanto}$$

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}, \quad [5] \quad \text{siendo } \vec{a}_1 \dots \vec{a}_n \text{ las columnas de } A.$$

\vec{x} es solución del SL $\Leftrightarrow \vec{x}$ es solución de la ecuación vectorial
 $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$.

Expresado de otra forma, la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si \vec{b} es una combinación lineal de las columnas de A . Cada conjunto de coeficientes de la combinación lineal es una solución posible del SL.

1.3.1. Expresión matricial y vectorial de un SL.

Es obvio el paso de la ec. [4] a la [5] y viceversa, teniendo en cuenta el desarrollo del producto matriz-vector como combinación lineal.

Repaso del producto matriz-vector

Sea $A_{m \times n}$ con columnas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, y sea \vec{x} un vector de n entradas, $\vec{x}_{n \times 1} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces el producto $A\vec{x}$, es la suma de las columnas de A , pesando cada una de ellas ordenadamente con cada entrada de \vec{x} .

$$A\vec{x} = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

Expresado de otra forma, el producto $A\vec{x}$ es la combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes o pesos las entradas de \vec{x} .

- **Ejemplo J** (pg. 38). Dado el SL obtener la correspondiente ecuación matricial y la correspondiente ecuación vectorial (*la segunda pregunta es añadida al enunciado*).

1.3.1. Ejercicios

Ejercicios de HVZ:

- **1.3.** El 14 y el 15 (pg. 39).

Ejercicios adicionales:

- **1.3.1.2** Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Encuentra a simple vista una solución particular de $A\vec{x} = \vec{0}$ que no sea la solución $\vec{0}$, teniendo en cuenta que solución es el par de coeficientes (α, β) tal que la combinación $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$ es igual a $(0, 0, 0)$, siendo \vec{a}_1 y \vec{a}_2 las columnas de A .

b) Encuentra la solución general basándote en el resultado anterior y justifica la respuesta.

- **1.3.1.3.** a) Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{b} = (3, 5, 8, 12).$$

b) Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo (la misma A y $\vec{b} = \vec{0}$).

1.3.1. Ejercicios

- 1.3.1.4. Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

a) Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:

$\vec{v} = (17 \text{ mg de vitamina C}, 54 \text{ mg de calcio}, 31 \text{ mg de magnesio})$

1.3.2 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

Esquema basado fundamentalmente en la Sección 1.3. de HVZ.

- Los ejemplos señalados en **negrita** son los de HVZ, usando su identificación.
- Los ejercicios adicionales están indicados en color azul y tienen enumeración independiente.
- Se presentan al final de la subsección dos listas de ejercicios:
 - Lista basada en HVZ, con las identificaciones en **negrita**.
 - Lista adicional, con la enumeración en color azul.

1.3.2 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

Aplicaciones o transformaciones

- Definición de aplicación f de un conjunto S en un conjunto T como una regla que asigna a cada elemento S un elemento, y solo uno, de T .

Ejemplo A.1 de \mathbb{R} en \mathbb{R} $y = 3x$

Ejemplo A.2 de \mathbb{N} en \mathbb{N} $y = n^2$

(pgs. 25-26)

- En $f(v) = w$, se dice de w que es la imagen de v , y se dice de v que es el original o antecedente de w .
- Imagen de f , $\text{Im}f = \{f(v) / v \in S\}$. $\text{Im}f \subseteq T$
- Aplicación sobreyectiva o suprayectiva: $\text{Im}f = T$
- Aplicación inyectiva: Cada elemento de $\text{Im}f$ tiene como máximo un antecedente.
- Aplicación biyectiva: sobreyectiva e inyectiva a la vez.
- Ejercicio adicional 1.3.2.1.** Rellena la tabla.

	sobreyectiva	inyectiva	biyectiva
$3x$ $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$			
n^2 $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$			
x^2 $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$			
x^2 $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$			

1.3.2 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

- Dadas f de S en T y g de T en U se define la composición de f y g , cómo:

$$g \circ f(v) = g(f(v))$$

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ S & \mapsto & T & \mapsto & U \\ v & & f(v) & & g(f(v)) \end{array}$$

- La composición de aplicaciones es asociativa.
- La composición de aplicaciones no necesariamente es conmutativa.

Ejemplo B. Ejemplo de composición de dos aplicaciones (pg. 27)

1.3.2 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

Aplicaciones Lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

- Por ser \mathbb{R}^n el conjunto inicial y \mathbb{R}^m el conjunto final, f asigna a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. $\vec{y} = f(\vec{x})$

- Definición 1 de aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m :

f de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m es aplicación lineal si existe $A_{m \times n}$ tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

A se denomina matriz estándar asociada a la aplicación lineal.

La imagen de un vector mediante una aplicación lineal (a.l.) se obtiene de forma muy sencilla, simplemente se premultiplica el vector por la matriz asociada.

- **Ejemplo** f con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (pg. 27).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

a) Calcula la imagen de $\vec{x} = (1, 5)$.

b) Calcula el antecedente de $\vec{x} = (-1, 18)$, si existe (**Añadido**).

Otra forma de expresar f es esta: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$

- Ecuaciones de una aplicación lineal.

En el ejemplo anterior son:
$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

1.3.2 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

- Si $m = n$ la aplicación lineal recibe el nombre de endomorfismo.
- **Ejercicio adicional 1.3.2.2** Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de \mathbb{R}^5 en \mathbb{R}^3 que asigne a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:
$$\begin{cases} y_1 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \text{ es la suma de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$
- **Ejercicio adicional 1.3.2.3** Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que asigne a un vector \vec{x} su reflejado o simétrico respecto del eje X .
- **Ejercicio adicional 1.3.2.4** Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que asigne a un vector \vec{x} su proyección sobre el eje X .
- **Ejemplo D** (pgs. 28-29). En \mathbb{R}^3 , determina la matriz estándar A de la aplicación lineal que asigne a cada vector \vec{x} su proyección ortogonal sobre el plano XY .
- **Ejercicio adicional 1.3.2.5** Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 que asigne a un vector \vec{x} su simétrico respecto del plano XY .

1.3.2 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

- Definición 2 de aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m . f de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m es a. l. si cumple:

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Las definiciones 1 y 2 son equivalentes: o f cumple las dos definiciones o no cumple ninguna.
- Comprueba gráficamente con el ejemplo 1.3.2.3, utilizando $\vec{a} = (2, 0)$ y $\vec{b} = (1, 2)$, que el reflejado de la suma es igual a la suma de los reflejados.

- Propiedades de las aplicaciones lineales:

$$\bullet f(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\bullet f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

- Definición/construcción de la matriz estándar A de la aplicación lineal f .
Ejemplo con conjunto de partida \mathbb{R}^3 , extensible a \mathbb{R}^n .

$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, siendo \vec{e}_i el vector que tiene todas las entradas 0 excepto la de la posición i que vale 1.

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \Rightarrow \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3)$$

1.3.2 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

$$\vec{y} = x_1 f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Para una a.l. de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m :

$$\vec{y}_{m \times 1} = \underbrace{[f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)]}_{A_{m \times n}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \underbrace{[f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3)]}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \vec{x}$$
$$A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3)]$$

- Análisis de A para los cuatro últimos ejemplos.
- Se denomina rango de una a.l. de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m al rango de su matriz estándar asociada.

1.3.2 Introducción a las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

- **Ejemplo E** (pg. 31). Imagen del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, mediante la aplicación lineal f de matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
- Matriz estándar asociada a la composición de aplicaciones lineales f y g

$$\begin{array}{ccccc} & A & & B & \\ & f & & g & \\ \mathbb{R}^n & \mapsto & \mathbb{R}^m & \mapsto & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \mapsto & A \vec{x} & \mapsto & B A \vec{x} \end{array}$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$$

$$g(f(\vec{x})) = B_{p \times m} A_{m \times n} \vec{x}$$

la matriz asociada a $g \circ f$ es $(B A)_{p \times n}$

Nótese como la matriz que aparece más a la izquierda es la segunda en actuar.

1.3.2 Ejercicios

Ejercicios de HVZ:

- Algún/os apartado/s del **Ejercicio 5** (pg. 38)
- **Ejercicio 6** (pg. 38): uno de los apartados.
- **Ejercicio 9** (pg. 39). Hallar la simetría respecto del plano $x=y$ en \mathbb{R}^3 .
- **Ejercicio 8** (pg. 39). En \mathbb{R}^2 hallar la matriz de un giro alrededor del origen de ángulo ϕ en sentido positivo.

Ejercicios adicionales:

- **Ejercicio 1.3.2.6**. Considera 3 ejercicios con dos partes cada uno con pesos 50%-50%, 75%-25% y 80%-20%, respectivamente. Obtén la matriz que multiplicada por las calificaciones $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ de las partes produce como resultado las calificaciones $(\text{calif}_1, \text{calif}_2, \text{calif}_3)$ de los ejercicios.

1.3.3 Tratando múltiples valores de \vec{b} en $A\vec{x} = \vec{b}$

Si queremos estudiar/resolver un SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para dos valores \vec{b}_1 y \vec{b}_2 , es decir $A\vec{x} = \vec{b}_1$ es un SL y $A\vec{x} = \vec{b}_2$ es el otro SL, podemos aplicar la eliminación gaussiana sobre una matriz ampliada con dos columnas a la derecha.

Al llegar a la forma escalonada de esta matriz, usamos la primera y segunda columna de la derecha para completar el estudio/resolución del primer y segundo sistema, respectivamente.

Lo aplicamos al siguiente ejemplo, que es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, compatible determinado. Realizamos además la eliminación de Gauss-Jordan, llegando hasta la forma escalonada reducida.

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 1 & 7 & 8 & 8 & 9 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \qquad \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

Ruth Carballo. U. Cantabria

Hemos completado G-J.
 $\text{rg}(A)$ =número de filas, por tanto compatible para cualquier \vec{b} .
 Además el rango es igual al número de incóg., por tanto SCD.
 Podemos leer las soluciones a la derecha.

Para el SL $A\vec{x} = \vec{b}_1$ la solución es $\vec{x}_1 = (11, -5, 4)$, por tanto $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$

Para el SL $A\vec{x} = \vec{b}_2$ la solución es $\vec{x}_2 = (7, -2, 2)$, por tanto $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$

Por otra parte sabemos que $A [\vec{x}_1 \ \vec{x}_2] = [A\vec{x}_1 \ A\vec{x}_2]$, como propiedad del producto de matrices.
 y la última matriz es igual a $[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$

Por tanto $A [\underbrace{\vec{x}_1 \ \vec{x}_2}_X] = [\underbrace{\vec{b}_1 \ \vec{b}_2}_B]$

Si tuviéramos que obtener la solución X de la ecuación $\boxed{AX = B}$, siendo B una matriz, aplicaríamos este mismo procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan, pero en la “matriz ampliada múltiple” $[A|B]$.

Los datos serían $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, y la solución $X = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 4 \end{array} \quad - - - > \quad \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

$[A | B] \sim \dots \sim [I | X]$ X es la solución de $AX = B$

Cada columna de X es la solución correspondiente a la misma columna en B .

Ruth Carballo. U. Cantabria

1.4 Inversa de una aplicación lineal e inversa de una matriz

Esquema basado fundamentalmente en la Sección 1.4. de HVZ.

- Los ejemplos señalados en **negrita** son los de HVZ, usando su identificación.
- Los ejercicios adicionales están indicados en color azul y tienen enumeración independiente.
- Se presentan al final de la sección dos listas de ejercicios:
 - Lista basada en HVZ, con las identificaciones en **negrita**.
 - Lista adicional, con la enumeración en color azul.

1.4 Inversa de una aplicación lineal e inversa de una matriz

No trataremos inversas de aplicaciones en general, sino únicamente de endomorfismos en \mathbb{R}^n .

- El endomorfismo s en \mathbb{R}^n (entiéndase de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n) tal que $s(\vec{x}) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se denomina endomorfismo identidad y se denota id .

$$id(\vec{x}) = \vec{x}$$

- La matriz estándar asociada al endomorfismo en \mathbb{R}^n $id(\vec{x})$ es la matriz identidad de orden n , I_n .

- Un endomorfismo f se dice que es invertible si existe un endomorfismo g en \mathbb{R}^n tal que:

$g \circ f = f \circ g = id$, y en tal caso se dice del endomorfismo g que es el inverso de f , y se le denota como f^{-1} . Además f^{-1} si existe, es único.

Por tanto si f es invertible, $f^{-1}(f(\vec{x})) = f(f^{-1}(\vec{x})) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- Una matriz A de orden n se dice que es invertible si existe una matriz B de orden n tal que:
 $AB = BA = I_n$

Si B existe es única, se denomina inversa de A y se denota como A^{-1} .

- Si f es un endomorfismo en \mathbb{R}^n y A su matriz estándar asociada, entonces f es invertible $\Leftrightarrow A$ es invertible. En caso de que sean invertibles la matriz asociada a f^{-1} es A^{-1} , es decir, $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

1.4 Inversa de una aplicación lineal e inversa de una matriz

- **Ejemplo C** (pgs. 42-43). Obtención de la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ mediante el método de Gauss-Jordan.

Explicación para una matriz A de orden n .

1) En primer lugar se resuelve la ec. matricial $AB = I$, siendo B la matriz incógnita

$$A[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n]$$

Tenemos n sistemas $A\vec{b}_i = \vec{e}_i$, de forma que en cada sistema $[A | \vec{e}_i]$ el vector solución es \vec{b}_i . La matriz de coeficientes es la misma, por tanto las operaciones elementales que hay que realizar son las mismas en los n sistemas.

Escribimos la matriz ampliada del SL múltiple así: $[A \ | \ \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n]$

$$[A \ | \ I] \xrightarrow{\text{Eliminación de G-J}} \dots \xrightarrow{\text{Eliminación de G-J}} [I \ | \ \underbrace{B}_{A_{\text{red}}}] \quad \uparrow \text{matriz buscada}$$

2) Efectuando el producto BA obtendremos también I y así se comprueba que $AB = BA = I$ y por tanto $A^{-1} = B$

1.4 Inversa de una aplicación lineal e inversa de una matriz

- La inversa de A_n existe si y solo si el $\text{rg}A=n$, o lo que es lo mismo, existe inversa si y solo si la forma escalonada reducida de A , A_{red} , es la identidad.

En efecto ya que $I = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n]$ tiene rango n , en B tendremos n columnas linealmente independientes, o lo que es lo mismo, n direcciones linealmente independientes. Si en A_{red} no tuvieramos también n pivotes, entonces para algún \vec{e}_i el sistema quedaría incompatible.

- Dadas A y B cuadradas e invertibles del mismo orden, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Se extiende a cualquier número de matrices.
- Otra forma de resolución de $A_n\vec{x} = \vec{b}$ si $\text{rg}A=n$ es $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Ejemplo adicional 1.4.1. Resuelve el SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = (4, 6)$

1.4 Ejercicios

Ejercicios de HVZ:

- **Ejemplos D y E** (pg. 44)
- **Ejemplo G** (pg. 47)
- **Ejercicios 5, 6 y 7.** Algún/os apartado/s (pg. 48)

Ejercicios adicionales:

- **Ejercicio 1.4.2.** Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, utilizando el método de

Gauss-Jordan.

- **Ejercicio 1.4.3.** Mediante eliminación gaussiana determina el rango de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \text{ en función del parámetro } k.$$

¿Para que valores de k es A invertible?.

Tema 1. Soluciones de ejercicios adicionales no resueltos en clase

- 1.2.4 $5b_1 - 4b_2 - b_3 = 0$
- 1.2.5 a) $\vec{x} = (2, -1, 0, 0) + z(1, -1, 1, 0) + t(-8, 7, 0, 1)$, con z y t parámetros libres.
b) $\vec{x} = (19, -16, 1, -2)$
c) $\vec{x} = z(1, -1, 1, 0) + t(-8, 7, 0, 1)$, con z y t parámetros libres.
- 1.2.7 centro de masa: $(1.3, 0.9, 0)$ centro geométrico: $(-4, 4, 6)$

- 1.3.1.3 a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ con x_3 parámetro libre.

- b) $\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ con x_3 parámetro libre.

- 1.4.2 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- 1.4.3 Para $k = 0$ rango 3
Para $k = -1$ rango 3
Para $k \neq 0$ y $k \neq -1$, rango 4