Prácticas MATLAB

Ruth Carballo Fidalgo (UC). Marzo-abril-mayo 2021.

Contents

Introducción a Matlab (Versión 2017) preparada por R. Carballo. Incluida como referencia. Las instrucciones requeridas como contenidos de la asignatura estarán especificadas para cada práctica.

Descarga de MATLAB en tu ordenador utilizando la Licencia de la UC

Para poder descargarte el software con la licencia MATLAB de la Universidad de Cantabria tienes que abrir previamente una cuenta en MathWorks www.mathworks.com con la dirección de correo de la universidad pero eligiendo una contraseña distinta de la de la Universidad.

Una vez dispongas de esa cuenta, debes conectarte a este enlace del Servicio de Informática de la UC, que te da las instrucciones. En la parte superior derecha del enlace, junto con el icono de MATLAB, te aparece el enlace Portal Matlab de la UC desde donde arranca el proceso de acreditación y descarga.

P.1 Semana 1 de marzo

Autores: Ruth Carballo, Valvanuz Fernández

Las instrucciones de MATLAB, incluidos los comentarios, están escritos en azul, y las salidas en rojo.

Ejercicio adicional 1.1.1.

Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados [1], utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^5$ y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ produce una solución válida del sistema).

$$I: \begin{cases} \quad\;\; x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} \quad\;\; x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

```
% CLASIFICACION Y SOLUCION DEL SISTEMA LINEAL.

A=[0 1 -2 2 0; 1 1 -4 5 2; -1 3 -4 3 0];  % A Matriz de coeficientes

% b vector de terminos independientes (columna)
b=[-7  -23  3]';

% CLASIFICACION:

Am=[A b]          % Matriz ampliada concatenando A con b a la derecha


Am =
     0     1    -2     2     0    -7
     1     1    -4     5     2   -23
    -1     3    -4     3     0     3


% La existencia o no de solucion/es se determina mediante el Teorema
% de Rouche-Frobenius
rank(A)  % rango = numero de cols. pivotales = numero de vectores l.i.
rank(Am)
% El sistema tiene solucion si esos rangos son iguales
n=size(A,2)  % n es el numero de cols de A = numero de incognitas del SL
% En caso de que el sistema sea compatible, sera indeterm. si n>rango(A)
% siendo n-rango(A) el grado de la indeterminacion.
% Sera determinado si n=rango(A)
```

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

```
ans =
       3
ans =
       3
n =
       5


% el Sistema es compatible indeterminado con 5-3=2 parametros libres

% SOLUCION MEDIANTE METODO GAUSS-JORDAN:

% A continuacion aplicamos Gauss-Jordan para obtener
% el sistema equivalente mas sencillo posible.
[U j]=rref(Am)  % U proporciona la forma escalonada reducida,
                % que dada Am es unica.
                % U es la matriz ampliada del sistema equivalente
                % mas sencillo posible.
                % U viene de "upper", porque la matriz al estar escalonada
                % tiene ceros debajo de la diagonal principal.
                % rref viene de  "reduced row echelon form"
                % j es un vector fila que da los indices de las cols pivotales
                % por lo que length(j), que es el numero de entradas de j,
                % es el rango de la matriz que estamos estudiando, Am.
length(j)
U =
     1     0    -2     3     0   -24
     0     1    -2     2     0    -7
     0     0     0     0     1     4

j =
1    2     5

ans =
       3


% Obtenemos obviamente el mismo rango de Am que antes, 3.
% Al ser las columnas pivotales la primera, la segunda y la quinta tomaremos:
%     x1, x2, x5   variables basicas, tambien llamadas incognitas principales.
%         x3, x4   variables libres, tambien llamadas parametros libres.
%
% A partir de U despejamos las variables basicas.
% Antes declaramos las variables libres

syms x3 x4 real             % declaramos

x1 = -24 + 2*x3 - 3*x4  ;   % despejamos
x2 =  -7 + 2*x3 - 2*x4  ;
x3 = x3 ;
x4 = x4 ;
x5 = 4  ;
```

```
sol=[x1 x2 x3 x4 x5]'  % solucion en forma vectorial
pretty(sol)            % formato mas legible para datos simbolicos

sol =

 2*x3 - 3*x4 - 24
  2*x3 - 2*x4 - 7
               x3
               x4
                4

/ 2 x3 - 3 x4 - 24 \
|                  |
|  2 x3 - 2 x4 - 7 |
|                  |
|        x3        |
|                  |
|        x4        |
|                  |
\         4        /

% La solucion en forma vectorial parametrica, separando el vector constante
% y los vectores que quedan multiplicados por un parametro libre, es:
%
% solucion = p + x3*v1 + x4*v2 siendo
p  = [-24 -7 0 0 4]'
v1 = [ 2  2 1 0 0]'
v2 = [-3 -2 0 1 0]'

p =
   -24
    -7
     0
     0
     4

v1 =
     2
     2
     1
     0
     0

v2 =
    -3
    -2
     0
     1
     0
```

```
[p v1 v2] , rank(ans)   % comprobamos que esos tres vectores son l.i.,
                        % es decir, rango 3.


ans =
   -24     2    -3
    -7     2    -2
     0     1     0
     0     0     1
     4     0     0
ans =
     3


% La solucion es x = (-24,-7,0,0,4) + x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% Al tener dos parametros libres la solucion la forman las infinitas
% combinaciones lineales de dos direcciones independendientes, trasladadas
% mediante un vector p distinto de cero, y tambien independiente de los
% dos anteriores.


% SOLUCION DEL CORRESPONDIENTE HOMOGENEO

% Aplicando el procedimiento anterior con c = [0 0 0]' (es decir, con
% igual A, la misma funcion rref(), pero los terminos independientes
% cero), se obtendria como solucion:

% sol =  x3*v1 + x4*v2 con los mismos v1 y v2 que en el SL no homogeneo

% x = x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% Veamoslo, aunque sea obvio:

c=[0 0 0]';  Amh=[A c]   , rref(Amh)


Amh =
     0     1    -2     2     0     0
     1     1    -4     5     2     0
    -1     3    -4     3     0     0

ans =
     1     0    -2     3     0     0
     0     1    -2     2     0     0
     0     0     0     0     1     0


% Aqui tendriamos que despejar como antes x1, x2 y x5 en funcion
% de los parametros, obteniendo
% x = x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% METODO ALTERNATIVO PARA LA RESOLUCION DE SISTEMAS HOMOGENEOS:
```

```
% null(Matriz Coeficientes)  El nombre de null viene de nulo, o cero,
                             % ya que resolvemos [A | 0]

% Hemos visto que la solucion general del SLH no es mas que el conjunto de
% todas las combinaciones lineales de dos soluciones independientes v1 y v2.

% La funcion null() nos dara directamente esas dos soluciones v1 y v2.
% Si hubiera mas parametros libres daria mas soluciones
% (da 2  en este caso porque  los parametros  libres son dos).

% Obviamente el algoritmo, null(), ya sabe que resuelve un SL homogeneo,
% por tanto el unico argumento que acepta es la matriz de coeficientes A.

sol=null(A)

   -0.7107    0.3857
   -0.1867    0.6532
    0.4307    0.5941
    0.5240    0.2675
   -0.0000   -0.0000


u1=sol(:,1)
u2=sol(:,2)


u1 =
   -0.7107
   -0.1867
    0.4307
    0.5240
   -0.0000

u2 =
    0.3857
    0.6532
    0.5941
    0.2675
   -0.0000


% La sol. general es sol=alpha*u1+beta*u2, con alpha y beta param. libres.
% El lugar geometrico de las soluciones es el mismo que antes,
% simplemente se estan utilizando dos vectores diferentes de los anteriores
% para generarlo.
% Los vectores que nos da null son unitarios (norma 1) y ortogonales entre si.

% Los vectores v1 y v2 que calculamos con rref como si efectuaramos
% los calculos a mano se pueden obtener tambien como null,
% simplemente haciendolo trabajar en modo simbolico.

sol= null(sym(A))
```

```
sol=
[2, -3]
[2, -2]
[1,  0]
[0,  1]
[0,  0]


% La solucion deducida asi es
x=alpha*(2,2,1,0,0)+beta*(-3,2,0,1,0),
% que es la misma que la obtenida con rref, y que nos evita ahora
% tener que despejar.

%%%%%%%%%%%%   FIN DEL EJERCICIO   %%%%%
```

Explicación de la diferencia entre `syms` y `sym` en MATLAB

- `syms`

```
syms x real  % syms crea la variable simbolica x
             % y en el uso de x se entendera que es un numero real.
             % No es funcion, pues no se escribe syms().

2*x-5*x
conj(x)     % Probamos a calcular el conjugado de x y nos
            % contesta que conj(x) es x
            % porque el conjugado de un real es el mismo real
            % (no hay parte imaginaria que tenga que cambiar de signo).


ans=
-3*x

ans=
x


syms x    % syms crea la variable simbolica x sin especificar que tipo
          % de numero (las opciones son real, integer, positive,
          % rational pero no usamos ninguna)
2*x-5*x
conj(x)   % Nos va a decir que conj(x) es conj(x). No puede calcular
          % el conjugado de x porque x puede ser complejo y por el dato
          % no se sabe cual es la parte real y cual
          % la parte imaginaria de x


-3*x

conj(x)
```

```
% Esta diferencia entre variables simbolicas reales y complejas
% es importante para nosotros al usar la trasposición con el símbolo '
% Ya que ' significa para MATLAB traspuesta-conjugada.

% Veamoslo en el siguiente ejemplo:

syms x y
[x y]'


 conj(x)
 conj(y)


syms x y real
[x y]'


 x
 y
```

- syms

```
sym(num)  % convierte un numero o matriz de numeros en numero simbolico
          % o en matriz simbolica
          % Es funcion, pues tiene la estructura    nombre(argumento)

num = sqrt(2)

    1.4142

a = sym(num)

2^(1/2)

double(a)   % es el paso inverso a sym(). Convierte el numero simbolico
            % a doble precision

    1.4142
```

P.2 Semana 8 de marzo

- Ejercicios de clasificación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Se trató de un cuestionario Moodle.
- Si el último dígito de tu DNI/NIE es cero o par, resuelve el cuestionario 1. Si es par resuelve el cuestionario 2.

- **Cuestionario G1**

1. Considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

   Se pide:

   (a) (0.50 pts) La forma escalonada reducida de la matriz ampliada.

   (b) (0.50 pts) El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

   (c) (1.00 pts)
      - La clasificación del sistema como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
      - La solución en forma vectorial, si existe.

   sum(sum(Am)) tiene que ser 20

2. Considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

   Se pide:

   (a) (0.50 pts) La forma escalonada reducida de la matriz ampliada.

   (b) (0.50 pts) El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

   (c) (1.00 pts)
      - La clasificación del sistema como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
      - La solución en forma vectorial, si existe.

   sum(sum(Am)) tiene que ser 17

3. Considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

   Se pide:

   (a) (0.50 pts) La forma escalonada reducida de la matriz ampliada.

   (b) (0.50 pts) El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

   (c) (1.00 pts)
      - La clasificación del sistema como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
      - La solución en forma vectorial, si existe.

sum(sum(Am)) tiene que ser -2

- **Cuestionario Grupo 2**

1. Considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

   Se pide:

   (a) (0.50 pts) La forma escalonada reducida de la matriz ampliada.

   (b) (0.50 pts) El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

   (c) (1.00 pts)

   - La clasificación del sistema como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
   - La solución en forma vectorial, si existe.

   sum(sum(Am)) tiene que ser 0

2. Considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

   Se pide:

   (a) (0.50 pts) La forma escalonada reducida de la matriz ampliada.

   (b) (0.50 pts) El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

   (c) (1.00 pts)

   - La clasificación del sistema como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
   - La solución en forma vectorial, si existe.

   sum(sum(Am)) tiene que ser 20

3. Considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

   Se pide:

   (a) (0.50 pts) La forma escalonada reducida de la matriz ampliada.

   (b) (0.50 pts) El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

   (c) (1.00 pts)

   - La clasificación del sistema como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
   - La solución en forma vectorial, si existe.

   sum(sum(Am)) tiene que ser 17

Se proporciona la siguiente Guía para la resolución:

- format rat
- definir la matriz de coeficientes A = [- ... - ; - ... - ; ...]
- definir el vector b como b = [- ... -]'
- definir matriz ampliada como Am= [a b]
- resolver los SLs mediante rref(Am)
- no usar null() aunque alguno sea homogéneo
- si el sistema es indeterminado no usar syms para declarar parametros libres, sino simplemente despejar desde la escalonada reducida y usar el nombre del parametro libre que se quiera
- obtener los rangos contando las columnas pivotales visualmente o mediante la funcion rank()
- se proporciona dentro del cuestionario Moodle el valor de sum(sum(Am)) para cada SL, de forma que podáis comprobar que habéis introducido bien los datos. Se avisa que si no coincide ha habido error en la entrada de datos, y que si coincide tenéis que revisar de todas formas.

SOLUCIÓN

Cuestionario 1

```
% Ejercicio 1
format rat , Am=[1 2 3 2; 1 -1 1 0; 1 3 -1 -2; 3 4 3 0]
      1      2      3      2
      1     -1      1      0
      1      3     -1     -2
      3      4      3      0

rref(Am)
      1      0      0     -1
      0      1      0      0
      0      0      1      1
      0      0      0      0

% La forma escal. reducida de la matriz ampliada es la matriz anterior
% rango A=3  rango Ampliada=3
% sistema compatible determinado   sol  (-1,0,1)
 sum(sum(Am))  % 20

% Ejercicio 2
Am=[1 1 1 1 0; 0 1 0 -1 5; 1 0 1 2 1; 1 2 0 0 0]
      1      1      1      1      0
      0      1      0     -1      5
      1      0      1      2      1
      1      2      0      0      0
```

```
rref(Am)
       1      0      0      2      0
       0      1      0     -1      0
       0      0      1      0      0
       0      0      0      0      1

% rango A=3  rango Ampliada=4
% sistema incompatible no tiene solucion
sum(sum(Am))   % 17

% Ejercicio 3
Am=[1 -3 2 0; -1 -2 2 0; -2 1 0 0]
       1        -3      2          0
      -1        -2      2          0
      -2         1      0          0

rref(Am)
       1         0     -2/5        0
       0         1     -4/5        0
       0         0      0          0

% rango A=2   rango Ampliada=2
% sistema compatible indeterminado
% solucion x=(2/5, 4/5, 1) *x3 / x3 pertenece a R
sum(sum(Amh))   % -2
```

Cuestionario 2

```
% Ejercicio 1
format rat
Am=[1 -3 3 0; -1 -2 3 0; -2 1 0 0]
     1    -3     3      0
    -1    -2     3      0
    -2     1     0      0

rref(Am)
    1      0    -3/5    0
    0      1    -6/5    0
    0      0     0      0

% rango A=2   rango Ampliada=2
% sistema compatible indeterminado
% solucion x=(3/5, 6/5, 1) *x3 / x3 pertenece a R
sum(sum(Am))   % 0

% Ejercicio 2
Am=[1  3 2 2; 1 1 -1 0; 1 -1 3  -2; 3 3 4 0]
     1     3     2     2
     1     1    -1     0
     1    -1     3    -2
     3     3     4     0
```

```
rref(Am)
     1     0     0    -1
     0     1     0     1
     0     0     1     0
     0     0     0     0

% rango A=3   rango Ampliada=3
% sistema compatible determinado   sol  (-1,1,0)
sum(sum(Am2))  % 20

% Ejercicio 3
Am=[1 1 1 1 0; 0 1 0 -1 5; 1 0 1 2 1; 1 2 0 0 0]
       1      1      1      1     0
       0      1      0     -1     5
       1      0      1      2     1
       1      2      0      0     0

rref(Am)
       1      0      0      2     0
       0      1      0     -1     0
       0      0      1      0     0
       0      0      0      0     1

% rango A=3   rango Ampliada=4
% sistema incompatible no tiene solucion.
sum(sum(Am))  % 17
```

El Ejercicio 2 del Cuestionario 1 y el Ejercicio 3 del Cuestionario 2 son iguales. He dejado el mismo.

P.3 Semana 15 de marzo

Ejercicios de introducción a las aplicaciones lineales: 1) imagen y antecedente con una matriz estándar dada, 2) obtención de la matriz en $\mathbb{R}^2$ del giro centrado en el origen de ángulo θ, aplicación a un giro dado (ejer. adicional 1.3.2.7), conservación de la norma, 3) ejer. adicional 1.3.2.2.

- Considerada la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ determina:

  a) La imagen de $\vec{x} = (1, 5)$.

  b) El antecedente de $\vec{y} = (-1, 18)$, si existe.

  Ver en página 30 de las diapositivas del Tema 1.

- Matriz estándar del giro en $\mathbb{R}^2$ de centro en el origen y ángulo θ.

  Ver en página 35 de las diapositivas del Tema 1. **Ejercicio 8.**

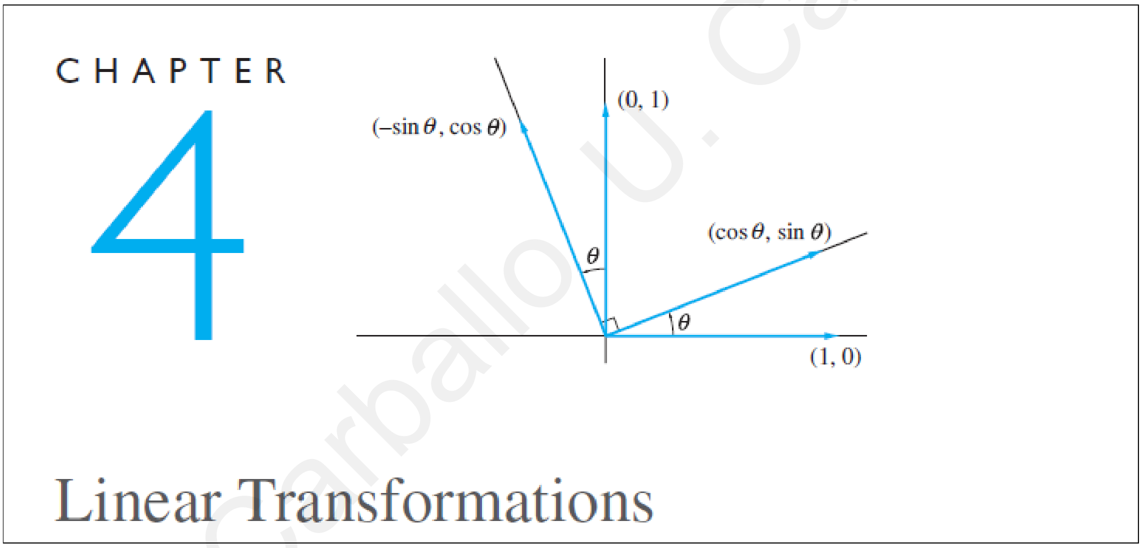


Figure 1: S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9ª. Pearson. 2015.

La matriz estándar del endomorfismo, o matriz respecto de la base canónica, es:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

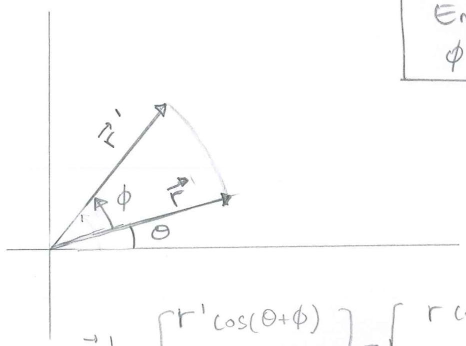
En efecto, siendo $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$,

$$A = [\, f(\vec{e_1}) \;\; f(\vec{e_2}) \,] \quad y \quad \begin{cases} f(\vec{e_1}) & = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \text{sen}\theta\, \vec{e}_2 \\ f(\vec{e_2}) & = -\text{sen}\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2 \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ en el sentido antihorario o positivo

$-\pi < \theta < 0$ en el sentido horario o negativo

En $\mathbb{R}^2$, giro de ángulo ϕ respecto del origen



$$\vec{r}\,' = \begin{bmatrix} r' \cos(\theta+\phi) \\ r' \operatorname{sen}(\theta+\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta+\phi) \\ r \operatorname{sen}(\theta+\phi) \end{bmatrix} =$$

$r' = r$

$$\begin{bmatrix} r(\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi) \\ r(\cos\phi \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \operatorname{sen}\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y \operatorname{sen}\phi \\ y\cos\phi + x \operatorname{sen}\phi \end{bmatrix}$$

sustituyendo $r\cos\theta = x$, $r \operatorname{sen}\theta = y$

$$\vec{r}\,' = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y \operatorname{sen}\phi \\ x \operatorname{sen}\phi + y\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}_{R_\phi} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

R_ϕ Matriz de giro de ángulo ϕ en sentido antihorario.

Figure 2: Otra deducción de la matriz de giro.

Ejercicio Adicional 1.3.2.7

En $\mathbb{R}^2$, escribe la matriz estándar correspondiente al giro de 45 grados en sentido antihorario de centro en el origen.	$A =$
Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$	$\vec{v}_{\text{girado}} =$
Comprueba que las normas de los dos vectores son iguales, utilizando la función `norm()`	
Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ para un giro de 45 grados en sentido horario.	$\vec{v}_{\text{girado}} =$
Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ para un giro de 180 grados en sentido horario	$\vec{v}_{\text{girado}} =$

Ejercicio adicional 1.3.2.2 Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ que asigne a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:

$$\begin{cases} y_1 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \text{ es la suma de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$

Aplicación de esta matriz para el estudio de casos PCR+ en Cantabria, en los períodos del 1 al 5 y del 8 al 12 de marzo de 2021.

Fecha	Nuevos PCR+
1-3-2021	40
2-3-2021	48
3-3-2021	37
4-3-2021	43
5-3-2021	26
8-3-2021	27
9-3-2021	48
10-3-2021	44
11-3-2021	39
12-3-2021	45

Primera semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	
Segunda semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	

```
%%%%   SOLUCION DEL PRIMER EJERCICIO:

>> A=[1 -1; 2 3]   % Matriz de la aplicacion lineal
     1    -1
     2     3

>> v=[1 5]'   % Vector cuya imagen queremos determinar
     1
     5

>> fv= A*v     % A multiplicado por v nos da la imagen de v
    -4
    17

>> % La siguiente pregunta es el antecedente de y=(-1,18), si existe
>> % Estudiamos en primer lugar la compatibilidad del sistema lineal [A | y]
>> % Primero rango de A

>> rank(A)
2

>> % Por ser rango de la matriz de coeficientes 2, y tener A dos filas,
>> % el SL [A | y] es compatible cualquiera que sea el vector y
>> % Dos formas de resolverlo:
>> % I) Con la forma escalonada reducida:

>>  y = [-1 18]'
-1
18
>> Am = [A y]     % es la matriz ampliada
     1    -1    -1
     2     3    18
>> rref(Am)      % leemos la solucion a la derecha
     1     0     3
     0     1     4
>> % La solucion es x=(3,4)
>> % Comprobacion:

>> x=[3 4]'
3
4
>> A*x   % aqui tenemos que obtener (-1,18)
-1
18
>> % Otra forma de comprobar es que A*x - y  nos de (0,0)
>> A*x - y
     0
     0
>> % II) Introducimos una funcion para resolver sist. compat. determinados
>> % que es    linsolve(A,b)    siendo A la matriz de coeficientes y
>> % b el vector de terminos independientes
```

```
>> % Este sistema es compatible determinado para todo b porque tiene dos
>> % ecs. y dos incognitas y el rango de la matriz de coefs es 2
>> linsolve(A,y)
3
4
>> % Tambien podemos almacenar el resultado con el nombre sol, por ejemplo.
>> sol=linsolve(A,y)
3
4
>> % la comprobacion sera que A*sol-y quede (0,0)
>> A*sol-y
     0
     0


%%%%%%%  SOLUCION DEL EJERCICIO ADICIONAL 1.3.2.7

>> a=45
        45

>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
          0.7071   -0.7071
          0.7071    0.7071

>> v=[4 3]'
     4
     3

>>vgirado=A*v
    0.7071
    4.9497

>> norm(v)
     5
>> norm(vgirado)
    5.0000

>> a = -45
   -45

>> A = [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    0.7071    0.7071
   -0.7071    0.7071

>> vrotadomenos45=A*v
    4.9497
   -0.7071

>> a = 180
   180
```

```
>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    -1     0
     0    -1

>> vsimetrico_respecto_origen = A*v
-4
 3
>> % Con el giro de 180 grados se obtiene el vector opuesto.
>> % Esta transformacion se conoce con dos nombres: giro de 180
>> % grados y simetría respecto del origen.



%%%%%%  SOLUCION DEL EJERCICIO ADICIONAL 1.3.2.2

>> % Construimos la matriz de forma que:
>> % y1 sea la media de los tres primeros dias, de ahi 1/3
>> % y2 es la media de los 5 dias, de ahi 1/5
>> % y3 es la suma de casos de los 5 dias

>> A=[1/3 1/3 1/3 0 0; 1/5 1/5 1/5 1/5 1/5 ; 1 1 1 1 1]
    0.3333    0.3333    0.3333         0         0
    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

>> % metodo para resolver la semana 1

>> PCRplus_s1 = [40 48 37 43 26]'
    40
    48
    37
    43
    26

>> A * PCRplus_s1
   41.6667
   38.8000
  194.0000

>> % metodo para resolver las dos semanas a la vez
>>    % primera columna es la primera semana
>>    % segunda columna es la segunda semana

>> PCRplus = [40 48 37 43 26 ; 27 48 44 39 45]'
    40    27
    48    48
    37    44
    43    39
    26    45

>> A * PCRplus
```

```
  41.6667   39.6667
  38.8000   40.6000
 194.0000  203.0000

%%%%%%%%%%%%%%%%%%  FIN %%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

P.4 Semanas 21 de marzo y 28 de marzo

Operaciones con matrices, inversa y determinantes
Martes 23 de marzo: Ejercicios 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 Martes 30 de marzo: Ejercicio 2.5

OBSERVACIÓN PARA RESOLUCIÓN CON MATLAB: Si trabajas con matrices que incluyen variables simbólicas puedes utilizar la función **det()**, pero no de las funciones **rank()**, ni **rref()**, ni **inv()**, ya que estas tres en general darán resultados erróneos.

La funcion **inv()** calcula la inversa de una matriz. Antes de calcular la inversa de una matriz debes asegurarte de que su determinante es distinto de cero, y de que su valor tampoco es compatible con cero dentro de la precision numérica de MATLAB.

- Ejercicio adicional 2.1. Modificado y ampliado.

  Considera $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

  1. Obtén el determinante de A, en función del parámetro a.
  2. ¿Para qué valores de a es A invertible?
  3. ¿Para qué valores de a es el rango de A igual a 4?
  4. Escoge un valor de a que sea mayor o igual que 3 y para el que la matriz sea invertible y llama a esa nueva matriz B, calcula B^{-1} con la función **inv()**. Llama C a esa matriz y comprueba que $BC = CB = I$.
  5. Obtén el determinante de B, el determinante de C, el determinante de $2B$ y el determinante de $\frac{1}{3}C$. Razona los resultados obtenidos.

  Puedes comprobar con esta matriz A que **rank(A)** produce el resultado 4, y que **rref(A)** da como resultado la identidad. Estos resultados son válidos si $a \neq 1$, pero no si $a = 1$.

- Ejercicio adicional 2.3. Modificado.

  Considera el SL siguiente: $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & a\,x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & a\,x_3 & = & 3 \end{array} \right.$

  1. Determina los valores de a para los que el sistema lineal es compatible determinado.
  2. Para el resto de valores de a, clasifica el SL resultante y obtén la solución si existe.

- Ejercicio adicional 2.4. Modificado.

Considera el SL siguiente: $\begin{cases} -\,x_1 \;-\; 2\,x_2 \;+\; a\,x_3 \;=\; a \\ 2\,x_1 \;-\; a\,x_2 \;+\; 2\,x_3 \;=\; -2 \\ x_1 \;+\; 2\,x_2 \;+\; 4\,x_3 \;=\; 3 \end{cases}$

1. Determina los valores de a para los que el sistema lineal es compatible determinado.
2. Para el resto de valores de a, clasifica el SL resultante y obtén la solución si existe.

- Ejercicio adicional 2.5. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, y sabiendo que

$D = ABC = \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, calcula la matriz C. Si no existe, indícalo explícitamente.

SOLUCIONES

- EJERCICIO 2.1 MODIFICADO Y AMPLIADO

```
syms a real
A = [ 1 1 1 1; 1 a 1 1; 1 1 a 1; 1 1 1 a]

% 1) Determinante en funcion del parametro a
det(A)
% (a - 1)^3

% 2) Para que valores de a es A invertible
% A es invertible si y solo si detA distinto de cero
% si y solo si a distinto de 1

factor(ans)    % esta instruccion se usa para factorizar, aunque
               % vemos que det(A) ya nos daba el polinomio factorizado

% [a - 1, a - 1, a - 1]    % (a-1) aparece tres veces porque a = 1
                           % es raiz triple del polinomio de grado 3

% otra forma de obtener las raices, si no se hubiesen
% visto claramente en el resultado de det(A)

det(A)
solve( det(A) ) % da las soluciones de la ecuacion det(A)=0
                % solve (expresion con una variable) da las soluciones
                % de igualar la expresion a cero.
% (a - 1)^3

% Lo siguiente es el resultado de solve(det(A))
% que son las tres raíces 1.
```

```
% 1
% 1
% 1

% 3) A tiene rango 4 si y solo si detA distinto de cero
% si y solo si a distinto de 1.

% 4)
B=subs(A,a,3)  % Hacemos una "copia" de A, a la que llamamos B,
               % en la que a toma el valor 3. A no cambia.

% [1, 1, 1, 1]
% [1, 3, 1, 1]
% [1, 1, 3, 1]
% [1, 1, 1, 3]

% Las filas de la matriz aparecen con corchetes a los lados debido a
% que hemos partido de una matriz simbolica, al contener la variable
% simbolica a. Todas las matrices que construyamos a partir de A
% seran simbolicas.

C = inv(B)

% [ 5/2, -1/2, -1/2, -1/2]
% [-1/2,  1/2,    0,    0]
% [-1/2,    0,  1/2,    0]
% [-1/2,    0,    0,  1/2]

B*C     % comprobacion de matriz * inversa = identidad

% [1, 0, 0, 0]
% [0, 1, 0, 0]
% [0, 0, 1, 0]
% [0, 0, 0, 1]

C*B      % la misma comprobacion en sentido inversa*matriz

% [1, 0, 0, 0]
% [0, 1, 0, 0]
% [0, 0, 1, 0]
% [0, 0, 0, 1]

5) det(B)
% 8

det(C)   % el determinante de la inversa es el inverso del determ.
% 1/8

det(2*B)
% 128
```

```
% B es de orden 4, por tanto det(2B)=2^4*det(B)=16*8=128

2^4*det(B)
% 128

det(1/3*C)
% 1/648

% 1/3^4 * 1/8 = 1/81 * 1/8

% vemos que rref() y rank() dan resultados erroneos en este caso de
% matriz con parametros.

rref(A)
% [1, 0, 0, 0]
% [0, 1, 0, 0]
% [0, 0, 1, 0]
% [0, 0, 0, 1]

rank(A)
% 4

% En efecto, los valores que salen solo son validos para a distinto de 1.
```

- EJERCICIO 2.3 MODIFICADO

```
syms a real
A = [ 1 1 -1 ; 1 a 3 ; 2 3 a ]
% [1, 1, -1]
% [1, a,  3]
% [2, 3,  a]

% 1)
det(A)  % el SL, con tres ecuaciones y tres incognitas, es comp.
        % determinado si y solo si rgA=3
        % si y solo si det(A) distinto de cero.

        % es obvio que si rg(A)=3, entonces rg(A*) tambien es 3,
        % ya que hay tres filas.

% a^2 + a - 6

% vemos ahora dos formas de obtener las raices

factor(ans)
% [a + 3, a - 2]

solve(det(A))   % forma mas directa
% -3
%  2

% El SL es comp. determ. si y solo si a distinto de 2 y distinto de -3.
% En este caso  rg(A)=3=rg(A*)=numero de incognitas.

% 2) Analizamos el caso a=-3

Amenos3 = subs(A,a,-3)
% [1,  1, -1]
% [1, -3,  3]
% [2,  3, -3]

Amenos3_ampli=[Amenos3 [1 2 3]']  % concatenamos b a la derecha

% [1,  1, -1, 1]
% [1, -3,  3, 2]
% [2,  3, -3, 3]

[rank(Amenos3) rank(Amenos3_ampli)]
%     2     3

% para a=-3 el SL es incompatible, porque rg(A)  distinto de rg(A*)

% caso a=2

Amas2   = subs(A,a,2)
% [1, 1, -1]
```

```
% [1, 2,  3]
% [2, 3,  2]

Amas2_ampli=[Amas2 [1 2 3]']
% [1, 1, -1, 1]
% [1, 2,  3, 2]
% [2, 3,  2, 3]

[rank(Amas2) rank(Amas2_ampli)]
%     2     2

% para a=2 el SL es compatible indeterminado;
rg(A) = rg(A*) = 2 < numero de incognitas

rref(Amas2_ampli)  % obtenemos reducida
% [1, 0, -5, 0]
% [0, 1,  4, 1]
% [0, 0,  0, 0]

% despejamos:
% x=5z, y=-4z+1, z=z
% sol=(0,1,0) + (5,-4,1)*z
```

- EJERCICIO 2.4 MODIFICADO

```
A=[-1 -2 a; 2 -a 2; 1 2 4]
% [-1, -2, a]
% [ 2, -a, 2]
% [ 1,  2, 4]

det(A)
% a^2 + 8*a + 16

factor(ans)
% [a + 4, a + 4]

% El SL es comp. determ. si y solo si a distinto de -4.

Amenos4 = subs(A,a,-4)   % analizamos el caso restante a = -4
% [-1, -2, -4]
% [ 2,  4,  2]
% [ 1,  2,  4]

% al concatenar b=(a, -2, 3) tenemos que
% escribir (-4, -2, 3), pues estamos considerando a=-4

Ampli = [Amenos4  [-4 -2 3]']
% [-1, -2, -4, -4]
% [ 2,  4,  2, -2]
% [ 1,  2,  4,  3]

[rank(Amenos4) rank(Ampli)]   % sistema incompatible
```

```
%     2     3
```

- EJERCICIO 2.5

```
A=[2 -3 -5; -1 4 1; 1 -3 -4]
%     2    -3    -5
%    -1     4     1
%     1    -3    -4

B=[2 1 -4; 0 1 4; 1 -2 -3]
%     2     1    -4
%     0     1     4
%     1    -2    -3

D=[ 11 17; 17 1; 4 10]
%    11    17
%    17     1
%     4    10

%  Metodo 1: Interpretamos la ecuacion A*B*C=D de la siguiente forma
%  A*B es una matriz 3x3 que llamamos M
%  La ec. queda entonces   M * C = D
%  D es una matriz 3x2, es decir, con 2 columnas
%  Podemos interpretar M * C = D como un SL con matriz ampliada multiple.
%  Los términos independientes son las dos columnas de D
%  Para determinar si hay solucion o no y en caso afirmativo obtenerla,
%  obtenemos la forma escalonada reducida de la matriz ampliada [ M | D ]

M=A*B
%    -1     9    -5
%    -1     1    17
%    -2     6    -4

ampli=[M D]
%    -1     9    -5    11    17
%    -1     1    17    17     1
%    -2     6    -4     4    10

% tambien se podria haber obtenido ampli en un solo paso
% ampli = [A*B D]

ampli_red=rref(ampli)
%     1     0     0     2     1
%     0     1     0     2     2
%     0     0     1     1     0

C=ampli_red(:,4:5)   % esta es la matriz buscada
%     2     1
%     2     2
%     1     0

A*B*C   % comprobacion
```

```
%    11    17
%    17     1
%     4    10

A*B*C-D    % es una comprobacion mas sencilla, porque solo hay que
           % que ver que la matriz resultante sea la matriz 0
% 0 0
% 0 0
% 0 0

%  Metodo 2:   A*B*C=D
%  A y B son cuadradas. Si son invertibles, entonces podríamos escribir
%  B^-1 * A^-1 * A * B C = B^-1 * A^-1 * D
%  en el primer miembro A^-1*A=I, y despues B^-1*B=I, quedando:
%  C = B^-1*A^-1*D

det(A)
% -12

% confirmamos que es distinto de cero y que por tanto A es invertible

det(B)
% 18

% confirmamos que es distinto de cero y que por tanto B es invertible

C=inv(B)*inv(A)*D
%    2.0000    1.0000
%    2.0000    2.0000
%    1.0000    0.0000

A*B*C-D  % el factor 10^-13 nos dice que el resultado es cero, dentro
         % de la precision de MATLAB

%  1.0e-13 *
%   -0.1066   -0.0711
%    0.0355    0.0444
%   -0.0622   -0.0711

% Metodo 3:  Partiendo de A*B*C=D  analizamos si A*B es invertible

det(A*B)
%-216

% obtenemos determinante distinto de cero, por tanto si lo es

% inv(A*B)* A*B * C = inv(A*B)*D  es como queda la ec. premultiplicando
%                                 por esa inversa    =>  C = inv(A*B)*D

C=inv(A*B)*D
%    2.0000    1.0000
```

```
%     2.0000    2.0000
%     1.0000         0

% La comprobacion seria similar a la anterior

% NOTESE
% * el determinante del producto es el producto de los determinantes,
%   por lo que A*B invertible si y solo si A y B son invertibles.
% * (A*B)^-1 = B^-1 * A^-1
```

P.5 Semana 28 de marzo

Espacios vectoriales: cambio de base

- **Ejercicio 4.3.1** . Sean las bases $B = \{\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\}$ y $B' = \{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\}$

  a) Obtén la matriz de cambio de base o coordenadas de la base B a la base B'.

  b) Sabiendo que las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$, obtén sus coordenadas respecto de la base B'.

  c) ¿Cuales son las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$?

```
% a) Obtencion de la matriz de cambio de base de B a Bprima
% Escribimos la matriz de cada base de forma que los vectores
% columna sean los vectores base en su orden

PB  = [ 5 1;  1 3]'
PBp = [ 1 1; -1 1]'

     5     1
     1     3

     1    -1
     1     1

% La matriz P de cambio de base de B a Bprima tiene por columnas
% las coords. de los vectores de la base B respecto de la base Bprima.
% Primera columna = coordenadas de [5 1]' respecto de la base B'
% Segunda columna = coordenadas de [1 3]' respecto de la base B'.
% Obtenemos esas coordenadas resolviendo el SL con matriz ampliada
% [PBp | PB]

% Presentamos dos metodos.

% Con inversas:

P = PBp^-1*PB

  3 2
 -2 1
```

```
% Resolviendo el SL [PBp | PB] mediante reducción de Gauss-Jordan,
% utilizando rref()

[PBp PB]

  1    -1     5     1
  1     1     1     3

reducida = rref([PBp PB])

  1     0     3     2
  0     1    -2     1

P = reducida( : , 3:4 )

     3     2
    -2     1
```

La matriz de cambio de base de la base B a la base B' es: $\boxed{P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}$

```
% b) El dato son las coords. de v respecto de la base B: vB=[4 3]'
% Se piden las coordenadas de v en la base B'.
% P es la matriz que convierte coordenadas relativas a la base B
% en coordenadas relativas a la base B'.

vB = [4 3]'

   4
   3

vBprima = P*vB

18
-5
```

Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B' son: $\boxed{[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \end{bmatrix}}$

```
% c) Se piden las coordenadas estandar de v
% La matriz PB transforma de coordenadas relativas a base B a
% coordenadas estandar.

v = PB*vB

ans =
    23
    13
```

Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica son: $\boxed{\vec{v} = \begin{bmatrix} 23 \\ 13 \end{bmatrix}}$

Este ejercicio, tomado de las diapositivas, no se resolvió ni en MATLAB ni en el aula.

- a) Demuestra que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^4$

  $B_1 = \{\vec{v}_1 = (1,1,0,0), \vec{v}_2 = (0,1,0,0), \vec{v}_3 = (0,0,1,1), \vec{v}_4 = (0,0,0,1)\}$

  $B_2 = \{\vec{u}_1 = (1,2,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,2,-1), \vec{u}_3 = (1,-1,-1,-1), \vec{u}_4 = (0,1,1,1)\}$

  b) Encuentra las coordenadas del vector $\vec{x} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ relativas a la base B_2

  c) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 a la base B_2.

  (Los dos primeros apartados son prácticamente iguales a los del ejercicio 10, pg. 16,1 de HVZ12)

```
% Escribimos las matrices de las bases, de forma que los vectores
% columna sean los vectores base en su orden

B1 = [ 1 1 0 0 ; 0 1 0 0; 0 0 1 1; 0 0 0 1]'

       1             0             0             0
       1             1             0             0
       0             0             1             0
       0             0             1             1
```

```
B2=[ 1 2 0 0 ; 0 1 2 -1; 1 -1 -1 -1; 0 1 1 0]'
       1              0              1              0
       2              1             -1              1
       0              2             -1              1
       0             -1             -1              0

% a)

det(B1)

      1

% el determinante es distinto de cero, lo que implica que las columnas
% son l.i.. Como ademas son 4, el conjunto es base de R4.

det(B2)

      1

% el determinante es distinto de cero, lo que implica que las columnas
% son l.i.. Como ademas son 4, el conjunto es base de R4.

% b)
vB1 = [3 2 -1 0]'    % coordenadas de v relativas a la base B1
vB2 = B2^(-1)*B1*vB1

       4
       2
      -1
      -6

% c)
P = B2^(-1)*B1

   -0.0000    1.0000   -2.0000   -1.0000
   -1.0000    1.0000   -3.0000   -2.0000
    1.0000   -1.0000    2.0000    1.0000
    3.0000   -3.0000    9.0000    5.0000
```

P.6 Semana del 12 de abril

Espacios vectoriales

1. Estudia si el conjunto S <u>es base</u> del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \right\}.$$

2. a) Justifica que el conjunto S <u>no es base</u> de $\mathbb{R}^4$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

b) A simple vista, encuentra un vector que no pueda ser generado por los vectores de S.

c) Obtén una base B del subespacio generado por S, es decir, del subespacio formado por todas las combinaciones lineales de los vectores de S. A ese subespacio se le denota como $< S >$. Por simplicidad podemos llamarlo H.

d) Todo subespacio estricto de $\mathbb{R}^4$ está formado por las soluciones de un SLH, o lo que es lo mismo, por las soluciones de una ec. de la forma $A\vec{x} = \vec{0}$. Con 4 incógnitas porque las soluciones están en $\mathbb{R}^4$. Recordemos que al conjunto de soluciones de la ec. anterior se le denomina Nul$A$.

   En este apartado se pide obtener una matriz A tal que $H = \text{Nul}A$.

   Para ello tenemos en cuenta que **si $\boldsymbol{(c_1, c_2, c_3, c_4)}$ es solución de $\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0}$**
   entonces $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4 = 0$

   podemos reescribir esta ec. cómo: $c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4 = 0$
   por tanto **$\boldsymbol{(a_1, a_2, a_3, a_4)}$ resulta ser solución de $\boldsymbol{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0}$**

   Conclusión: $\boxed{A = (\text{Nul}(B^t))^t, \text{ siendo } B^t \text{ la matriz cuyas filas son la base de } H}$
   La razón de la traspuesta exterior es que las soluciones, que son vectores columna, han de colocarse como filas en la matriz A.

Solución:

```
EJERCICIO 1

v1=[1 0 1 1]';
v2=[0 1 1 1]';
v3=[1 1 0 1]';
v4=[1 1 1 0]';

S=[v1 v2 v3 v4];

% La dimension de R4 es 4, por tanto un conjunto en R4 es base de R4
% si esta formado por cuatro vectores l.i. La razón es que esta garantizado
% que un conjunto de 4 vectores l.i. es conjunto generador de R4.

% Metodo 1) rank(S)    El conjunto es base si el resultado es 4, porque
%                      el rango da el número de vectores l.i.
% Metodo 2) det(S)     El conjunto es base si el resultado es distinto de 0

rank(S)}
 4
% el conjunto es base
% si hubieramos optado por el metodo 2 obtendriamos que    det(S)  es 3

EJERCICIO 2

v1=[ 1  1  1  1]';
v2=[ 1 -1 -1  1]';
v3=[-1  1  1 -1]';
v4=[-1  0  0  1]';

S=[v1 v2 v3 v4];

% a) Justifica que el conjunto S no es base de R4
rank(S)
 3
% {v1,v2,v3,v4} no es base de R4, pues solo hay tres l.i.

% b) A simple vista, encuentra un vector de R4 que no pueda ser generado
% por los vectores de S, y c) encuentra una base del subespacio generado
% por S.

S =
     1     1    -1    -1
     1    -1     1     0
     1    -1     1     0
     1     1    -1     1
% El conjunto generado por los vectores es el conjunto de todas las
% combinaciones lineales de ellos.
% Al tener solo tres l.i. no se puede generar todo R4.
%
```

```
% Se ve que v3 = -1*v2, por tanto {v1,v2,v4} genera el mismo conjunto que
% {v1,v2,v3,v4}.
%
% El conjunto generado se denota entre simbolos < >
% <v1,v2,v3,v4>
% Ese conjunto es en si mismo un espacio vectorial dentro de R4,
% porque la suma de combinaciones lineales es combinacion lineal, de los
% mismos vectores, y el producto de una c.l. por un real también sigue
% siendo c.l de los mismos vectores.
%
% B={v1,v2,v4} es la base de ese espacio vectorial <S> = <v1,v2,v3,v4>.
% Por simplicidad llamaremos al espacio vectorial H.
% H es subespacio de R4.
%
% Los vectores de H tienen la forma
% x = a*(1,1,1,1) + b*(1,-1,-1,1) + c*(-1,0,0,1), con a,b,c reales [1]
%
% Por tener tres vectores base H es un subespacio de dimension 3.
%
% Fijandonos en los vectores en las columnas en rojo vemos que los cuatro
% vectores cumplen que x2=x3, por tanto todas sus combinaciones lineales
% tambien lo cumpliran.
% No pertenecen a H  los vectores de R4 con x2 distinto de x3.
%
% El ejemplo mas sencillo de vector que no pertenece a <S> es (0,0,1,0).

% d) Encuentra una matriz A tal que H sean las soluciones del SLH   A x = 0

% El subespacio H de R4 se puede escribir, como cualquier subespacio de Rn,
% como el subespacio generado por su base. En nuestro caso H=<v1,v2,v3>.
% Cada vector de H se desarrolla como en la ec. [1], lo que pone de
% manifiesto que H esta formado por todas las soluciones de un SLH con
% cuatro variables y tres parametros libres.
% Al haber cuatro incognitas y tres parametros libres solo queda una
% incognita principal, es decir una ecuacion.
%
% la ec. cuyas soluciones son los vectores de H
% tendra la forma a1*x1 + a2*x2 + a3*x3 + a4*x4 = 0
%
% Imponiendo que los vectores v1, v2 y v4 sean solucion, obtendremos los
% coeficientes a1, a2, a3 y a4.

%  A*v1=0, A*v2=0,  A*v3=0 ,  siendo A=[a1 a2 a3 a4]
```

```
% Condicion de que v1 sea solucion: A * v1 = 0

%                   1
%  a1 a2 a3 a4  *   1  =  0   a1*1 + a2*1 + a3*1 + a4*1 = 0  ec. 1
%                   1
%                   1

% Condicion de que v2 sea solucion:

%                    1
%  a1 a2 a3 a4  *   -1  = 0   a1*1 + a2*(-1) + a3*(-1) + a4*1 = 0  ec. 2
%                   -1
%                    1

% Condicion de que v4 sea solucion:

%                   -1
%  a1 a2 a3 a4  *    0  = 0   a1*(-1) + a2*0 + a3*0+ a4*1 = 0  ec. 3
%                    0
%                    1

% Reunimos las tres ecuaciones ec. 1, ec. 2, ec. 3, en el siguiente SLH,
% con incognitas  (a1,a2,a3,a4).

%   1   1   1   1     a1    0
%   1  -1  -1   1  *  a2 =  0
%  -1   0   0   1     a3    0
%                     a4

% Resolvemos el SL, para obtener (a1 ,a2 ,a3 ,a4)

null (sym ([v1 v2 v4]'))

  0
 -1
  1
  0

% La ec. implicita de H es  -x2+x3=0
% o  A x = 0  con A=[0 -1 1 0] y x=(x1, x2, x3, x4)
```

P.7 Semana 19 de abril

Suma de subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 4.4.9. Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
* el plano Π: $3x + 6y - z = 0$
* la recta $r : \{(1, 2, 3)\lambda \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Obtén una base de Π.

b) Justifica si la suma de Π y r es o no suma directa.

c) Justifica si Π y r son o no complementarios.

d) Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (7, 11, 63)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ del plano Π y un vector $\vec{v}_2$ de la recta r.

e) En caso de que sea posible:

Calcula $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_1$ obtenido se encuentra en el plano Π.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_2$ obtenido se encuentra en la recta r.

Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

```
% a) Obtenemos la base del plano resolviendo su ecuacion  Ax=0  con null()

B_Pi = null(sym([3 6 -1]))

[ -2, 1/3]
[  1,   0]
[  0,   1]
```

Las dos columnas que proporciona null(), que son dos soluciones independientes de la ecuación $3x + 6y - z = 0$, nos dan una base del plano Π:

$\boxed{B_\Pi = \{(-2, 1, 0), (1/3, 0, 1)\}}$

```
% b) Escribimos como vector columna la base de la recta
B_r = [1 2 3]'   ;

% La dimension del plano es el nº de vectores de cualquier base del plano,
% por tanto 2
% La dim. de la recta es el nº de vectores de cualquier base de la recta,
% por tanto 1
% La union de las bases de plano y recta  genera el subespacio  plano+recta
% La dimension de (plano+recta) es el rango de las dos bases unidas.
% La suma es directa si dim (plano+recta) = dim(plano) + dim(recta) =2+1=3

[ B_Pi B_r]
rank([ ans ] )


 [ -2, 1/3, 1]
 [  1,   0, 2]
 [  0,   1, 3]

3
```

El rango es 3 y por tanto la dimensión de la suma es 3. La suma de ambos subespacios es entonces todo $\mathbb{R}^3$. Esto revela que la recta no se encuentra en el plano.

La suma es directa (suma de las dimensiones igual a la dimensión de la suma). Dicho de otra forma, la union de las bases es base (no hay que quitar ningún vector).

c) Π y r son complementarios porque su suma es directa y porque la suma es igual a $\mathbb{R}^3$.

d) Es posible expresar cualquier vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ como suma de un vector de Π y un vector de r, ya que en la expresión de $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{(-2,1,0),(1/3,0,1),(1,2,3)\}$, $\vec{v} = c_1(-2,1,0) + c_2(1/3,0,1) + c_3(1,2,3)$, con $\vec{v}_1 = c_1(-2,1,0) + c_2(1/3,0,1)$ en el plano y $\vec{v}_2 = c_3(1,2,3)$ sobre la recta. $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son únicos (no existe otra descomposición posible), porque las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

```
Lo aplicamos al vector v del enunciado.
v = [7 11 63]';

% Escribimos la base B de R3, formada por las bases de plano y recta.

B = [ B_Pi B_r ]

% Resolvemos el sistema compatible determinado con linsolve(B,v).
% Llamamos c a la solucion, que son las coordenadas de v respecto
% de la base B

c = linsolve(B,v)    % matriz ampliada [ B | v ]

   7
  57
   2


% La solucion es (7,57,2), por tanto la combinacion lineal es
% v = 7 b1 + 57 b2 + 2 b3
% con v1 = 7 b1 + 57 b2   (en el plano)  y  v2 = 2 b3 (en la recta)

v1 = c(1)*B(:,1) + c(2)*B(:,2)

v2 = c(3)*B(:,3)

 v1=
  5
  7
 57

v2=
  2
  4
  6
```

$\boxed{\vec{v}_1 = (5,7,57) \qquad \vec{v}_2 = (2,4,6)}$

Comprobaciones:

```
[3 6 -1]*v1       % resultado cero si v1 se encuentra en el plano
rank([PB_r v2])   % resultado 1 si v2 se encuentra en la recta r
v1 + v2 - v       % resultado el vector 0 si la descomp. esta bien hecha
```

```
ans =
0
ans =
     1
ans =
 0
 0
 0
```

Ejercicio 4.4.10 Considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + 2z + t = 0\}$.
a) Halla una base y la dimensión de F.
b) Halla la dimensión y una base de un subespacio complementario de F, denotándolo F'.
c) Descompón $\vec{v} = (2, 1, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ de F y un vector $\vec{v}_2$ de F'.

```
% a) Obtenemos la base de F resolviendo su ec. implicita

F = null(sym([1 -1 2 1]))
```

```
F=
[1, -2, -1]
[1,  0,  0]
[0,  1,  0]
[0,  0,  1]
```

Las tres columnas forman base de F. La dimensión de F es 3. En efecto, al estar en $\mathbb{R}^4$ tenemos cuatro variables, y con una sola ecuación quedan 3 parámetros libres, y por dimensión 3.

$B = \{(1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$

b) Subespacio complementario de F es un subespacio F' tal que $F \bigoplus F' = \mathbb{R}^4$.

F' tiene que tener dimensión 1, que es la diferencia entre la dimensión de $\mathbb{R}^4$ y la dimensión de F, y por tanto estará generado por un sólo vector.

A la vista de las columnas es obvio que el vector $\vec{b}_1 = (1, 0, 0, 0)$ forma con $F = [\,\vec{b}_2\,\vec{b}_3\,\vec{b}_4\,]$ un conjunto l.i., sin más que escribir los vectores con este orden: $[\,\vec{b}_1\,\vec{b}_2\,\vec{b}_3\,\vec{b}_4\,]$.

```
b1 = [ 1 0 0 0 ]'    ;
B  = [ b1 F ]
```

```
[1, 1, -2, -1]
[0, 1,  0,  0]
[0, 0,  1,  0]
[0, 0,  0,  1]
```

Es obvio que las cuatro columnas son pivotales, o que el determinante, $1 \times 1 \times 1 \times 1$, es distinto de cero.

Con esta base de $\mathbb{R}^4$ podemos pasar al siguiente apartado de descomponer un vector $\vec{v}$ como suma de $\vec{v}_1 \in F$ y $\vec{v}_2 \in F'$.

```
% c)

v  = [ 2 1 3 0 ]'   ;

c  = linsolve( B, v)                  % matriz ampliada [ B | v ]


7
1
3
0



% La descomposicion es la siguiente:

v2 = c(1)*b1                                    % es el sumando en F'

v1 = c(2)*B(:,2) + c(3)*B(:,3) + c(4)*B(:,4)    % es el sumando de F



v2 =
7
0
0
0

v1 =
-5
 1
 3
 0
```


P.8 Semana 26 de abril

Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla

- **Ejercicio 5.5** Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:

  a) simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

  b) proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

  Considerada la figura con los vértices P, M, Q, R y S dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simetrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = (\quad , \quad)$	$P' = (\quad , \quad)$
$M = (6, 7)$		
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

- **Ampliación del ejercicio:** Obtén las siguientes tranformaciones lineales adicionales de la figura original:

  c) Dilatación de un factor 2.

  d) Dilatación de un factor 2 seguida de la simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}x$.

  e) Giro centrado en el origen, de ángulo 100 grados en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

- **Representación gráfica** de los resultados obtenidos en las cinco transformaciones.

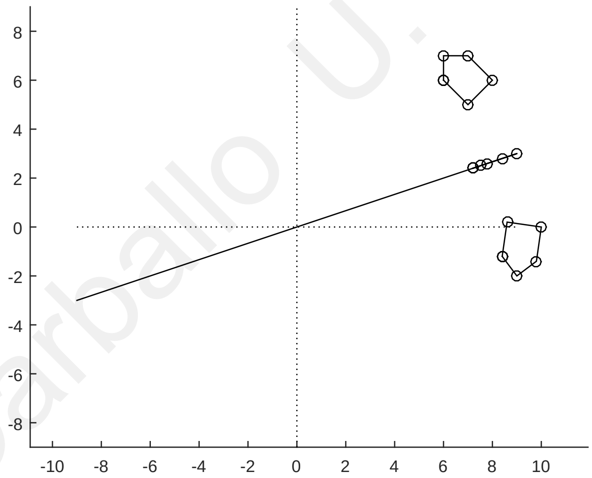
Las funciones de MATLAB de representación gráfica se usan para la mejor comprensión de los contenidos, pero no son materia exigida en la asignatura.

Solución para las transformaciones lineales a) y b):

```
% datos0 = [ 6 6 ; 7 7 ; 8 6 ; 7 5 ; 6 6]'  % que estan en estandar.

                   % se repite el ultimo punto para cerrar la figura
                   % en la representacion grafica

% datos0(1,:)      % en fila 1    coordenadas x de los vectores
% datos0(2,:)      % en fila 2    coordenadas y de los vectores

%  [ 1 0 ; 0 -1 ]  % matriz de la simetria referida a su base natural
%  [ 1 0 ; 0  1 ]  % matriz de la proyeccion referida a su base natural

% P = [ 3 1 ; -1 3 ]'  % base natural para la simetria

% A = P*F*inv(P)  % Cambio de base: de matriz F referida a base natural
                  % a matriz A referida a base estandar

                  % Copia de deduccion A=P*F*inv(P) de los apuntes.

                  % Ecuaciones de partida:
                  %    P xB = x   => xB = inv(P)*x
                  %    P yB = y   => yB = inv(P)*y
                  %
                  %    F xB = yB    A x = y
                  %
                  % A partir de ellas:
                  %    F inv(P) x = inv(P) y sustituyendo xB , yB
                  %    P F inv(P) x =  y     premultiplicando por P
                  %    A = P F inv(P)

% Ejecucion:
 datos0 = [ 6 6 ; 6 7 ; 7 7 ; 8 6 ; 7 5; 6 6 ]'

 P = [ 3 1 ; -1 3 ]'  % vector de la recta de simetria en col 1
                      % vector perpendicular           en col 2

 F1 = [1 0; 0 -1]     % 1 es la simetria. Podriamos haberle llamado S
 F2 = [1 0; 0  0]     % 2 es la proyeccion. Podriamos haberle llamado Pr

 A1 = P*F1*inv(P)     % es la matriz estandar pedida (simetria)
 A2 = P*F2*inv(P)     % es la matriz estandar pedida (proyeccion)

datos1 = A1*datos0    % los vectores simetricos (las imagenes pedidas)
datos2 = A2*datos0    % los vectores proyectados (las imagenes pedidas)

% Representacion grafica:
hold on
plot([ -9  9] , [  0  0] , 'k:' )   % eje x
plot([  0  0] , [ -9  9] , 'k:' )   % eje y

plot([ -9  9] , [ -3  3] , 'k-' )   % recta desde -3*(3,1) hasta 3*(3,1)
```

```
                                    % de (-9,-3) a (9,3)
axis equal

plot(datos0(1,:), datos0(2,:), 'ok-')
plot(datos1(1,:), datos1(2,:), 'ok-')
plot(datos2(1,:), datos2(2,:), 'ok-')


datos0 =
     6     6     7     8     7     6
     6     7     7     6     5     6

P =
     3    -1
     1     3

F1 =
     1     0
     0    -1

F2 =
     1     0
     0     0

A1 =
    0.8000    0.6000
    0.6000   -0.8000

A2 =
    0.9000    0.3000
    0.3000    0.1000

datos1 =
    8.4000    9.0000    9.8000   10.0000    8.6000    8.4000
   -1.2000   -2.0000   -1.4000    0.0000    0.2000   -1.2000

datos2 =
    7.2000    7.5000    8.4000    9.0000    7.8000    7.2000
    2.4000    2.5000    2.8000    3.0000    2.6000    2.4000


% datos1'  y datos2' nos daran  las coordenadas (x,y) de cada punto
% para cubrir, respectivamente, las columnas 2 y 3 de la tabla.

datos1'


    8.4000   -1.2000
    9.0000   -2.0000
    9.8000   -1.4000
   10.0000    0.0000
    8.6000    0.2000
    8.4000   -1.2000
```

```
datos2'

    7.2000    2.4000
    7.5000    2.5000
    8.4000    2.8000
    9.0000    3.0000
    7.8000    2.6000
    7.2000    2.4000
```

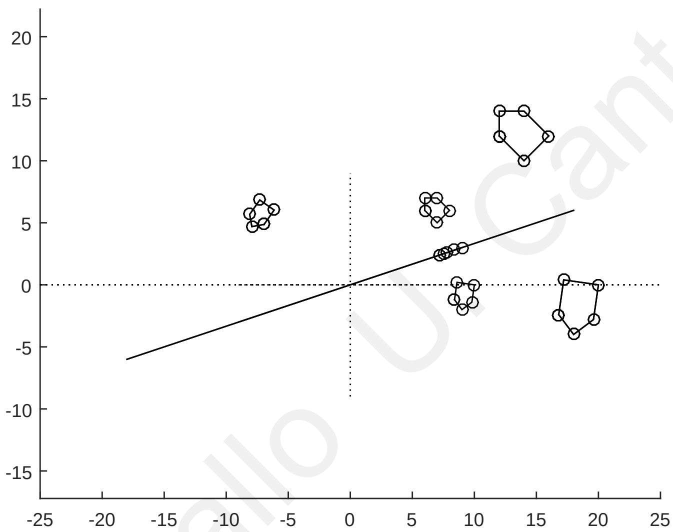


Añadimos al fichero .m las transformaciones lineales c), d) y e)

```
% A3 = 2*eye(2)  % Matriz estandar de la dilatacion de factor 2.
                 % eye(2) es la matriz identidad de orden 2.
                 % A3 es la matriz asociada respecto de cualquier base.
                 % Demostracion: Supuesto que en cierta base F=2*eye(2)
                 % A = P * F * inv(P) = P * 2*eye(2) * inv(P) =
                 % 2 * P*inv(P) = 2 * eye(2)

% A4 = A1 * A3   % Matriz estandar: primero dilatacion y despues simetria

% a = 100        % angulo de 100 grados (degrees)

% A5 = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]  % 'd' para angulo en grados

                 % Matriz estándar de giro 100 grados en sentido positivo

% Ejecucion:

A3 = 2*eye(2)
A4 = A1 * A3
a = 100
A5 = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]

datos3 = A3*datos0  % dilatacion aplicada a figura original
datos4 = A4*datos0  % dilat. y despues simetria aplicada a fig. original
datos5 = A5*datos0  % giro aplicado a figura original

plot(datos3(1,:), datos3(2,:), 'ok-')
plot(datos4(1,:), datos4(2,:), 'ok-')
plot(datos5(1,:), datos5(2,:), 'ok-')
plot([ -25  25] , [  0  0] , 'k:' )   % ampliamos el eje x
plot([ -18  18] , [ -6  6] , 'k-' )   % ampliamos  la recta
```

```
A3 =
     2     0
     0     2

A4 =
    1.6000    1.2000
    1.2000   -1.6000

a =
   100

A5 =
   -0.1736   -0.9848
    0.9848   -0.1736

datos3 =
    12    12    14    16    14    12
    12    14    14    12    10    12
```

```
datos4 =
   16.8000   18.0000   19.6000   20.0000   17.2000   16.8000
   -2.4000   -4.0000   -2.8000    0.0000    0.4000   -2.4000

datos5 =
   -6.9507   -7.9355   -8.1092   -7.2980   -6.1396   -6.9507
    4.8670    4.6933    5.6781    6.8366    6.0254    4.8670
```


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25

P.9 Semana 3 de mayo

Ejercicio 5.8

La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *produce un* estiramiento *en la dirección* x. *Representa la circunferencia* $x^2 + y^2 = 1$ *y esboza a su alrededor los puntos* (x, y) *que resultan de multiplicar por A. ¿Cual es la forma de la figura?*

G. Strang. Edición 4. Linear Algebra and its Applications. Pg. 149. Ejercicio 3.

Mostramos gráficamente el resultado con MATLAB, aplicando la transformación a una muestra de puntos (x, y) de la semicircunferencia con $y \geq 0$.

Se presenta la justificación algebraica del paso de la ecuación de una circunferencia de radio 1 a la ecuación de una elipse de semiejes 2 y 1, como consecuencia de la transformación lineal.

Recordatorio: Las funciones de MATLAB de representación gráfica se usan para la mejor comprensión de los contenidos, pero no son materia exigida en la asignatura.

Ejercicio 5.9 Dada la aplicación lineal en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtén la matriz asociada F respecto de la base $B = \{(1, -1, 0), (-2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

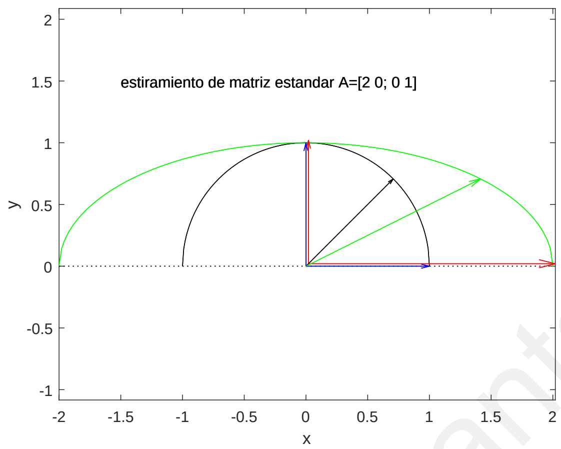
S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9. Pearson 2015. Pg. 212. Ejemplo 2.

Solución Ejercicio 8

```
x = -1:.01:1     ; % array desde -1 a 1 con incrementos .01
y = (1-x.^2).^.5 ; % con los x anteriores forma la semicircunf. de radio 1
                   % con y>=0

plot(x , y ,'-k'); % figura con la circunferencia

axis equal         % escalas iguales en ejes x e y

datos0 = [x;y] ;  % matriz de los puntos de la semicircunf. anterior
                  % (x,y) colocados x en primera fila, y en segunda fila


A = [2 0 ; 0 1 ]    % matriz del estiramiento según el eje x

datos1 = A*datos0 ; % Operamos la aplicación lineal sobre los datos

hold on             % para que no se reinicie la figura

plot(datos1(1,:) ,datos1(2,:) ,'-g')  % figura con la circunferencia
                                      % despues del estiramiento

plot([-2 2], [0 0],':k')  % representacion del eje x en color negro

xlabel('x')               % etiqueta de eje
ylabel('y')               % etiqueta de eje
text(-1.5,1.5, ...
'estiramiento de matriz estandar A=[2 0; 0 1]') % texto
                                                % descripcion

% Para describir mejor la figura:

quiver(0,0,1,0,0,'blue')      % e1: en pos (0,0)    vector (1,0)
quiver(0,0,0,1,0,'blue')      % e2: en pos (0,0)    vector (0,1)

quiver(0.02,0.02,2,0,0,'red') %  f(e1) es el vector (2,0)  pos
                              %  ligeramente desplazada para
                              %  mejor visualizacion.

quiver(0.02,0.02,0,1,0,'red') %  f(e2) es el vector (0,1)

quiver(0,0,1/sqrt(2),1/sqrt(2),0,'black')   % ejemplo de un vector v
quiver(0,0,2/sqrt(2),1/sqrt(2),0,'green')   % f(v)
```

```
A = [2 0; 0 1]
v             = [1/sqrt(2) 1/sqrt(2) ]'
vtransformado = A*v

A =
    2              0
    0              1
```

```
v =
 0.7071
 0.7071
vtransformado =
 1.4142
 0.7071
```



Solución Ejercicio 9

```
% La aplicacion tiene matriz estandar

% A = [2 2 0; 1 1 2; 1 1 2]

% significa que actuando sobre el vector
% (x1,x2,x3) en coordenadas estandar
% produce las coordenadas estandar de la imagen

% nos piden obtener la matriz F de la aplicacion
% para coordenadas relativas a la base B

% B = [ 1 -1 0; -2 1 1; 1 1 1]'

% la matriz con la base lleva los vectores base en las columnas

% La formula del cambio de base entre
% las matrices de las aplicaciones es % A = B*F*inv(B)

% Para despejar F:   F = inv(B) * A * B

% Ejecucion:
A = [2 2 0; 1 1 2; 1 1 2]
B = [ 1 -1 0; -2 1 1; 1 1 1]'
F = inv(B) * A * B
A =
     2     2     0
     1     1     2
     1     1     2

B =
```

```
      1      -2       1
     -1       1       1
      0       1       1

F =

           0          0          0
           0     1.0000    -0.0000
           0          0     4.0000
```

$$\boxed{F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

Observamos que se cumple, entre A y F, la conservación de traza, determinante y rango. La traza es 5. El rango 2, puesto que en la matriz A hay dos filas iguales, eliminándose una, y las otras dos no son proporcionales. (rg$A$=rgA^t por lo que en estos cálculos podemos utilizar filas en vez de columnas). En F una columna es $\vec{0}$, por tanto no contribuye al rango, y las otras dos no son proporcionales, dando rango 2.

El resultado es una matriz diagonal, y eso nos permite interpretar la transformación de forma sencillas.

- Los vectores de la recta $< 1, -1, 1 >$ se transforman en el vector $(0, 0, 0)$.
- Los vectores de la recta $< (-2, 1, 1) >$ son fijos: sus imágenes son ellos mismos.
  $f(\vec{b_2}) = 1\,\vec{b}_2$
- Los vectores de la recta $< (1, 1, 1) >$ se transforman en 4 veces ellos mismos.

Para $\vec{x} = \alpha\,\vec{b}_1 + \beta\,\vec{b}_2 + \gamma\,\vec{b}_3$

$f(\vec{x}) = \qquad \beta\,\vec{b}_2 + 4\,\gamma\,\vec{b}_2$

P.10 Semana 10 de mayo

Autovalores, autovectores y diagonalización

Ejemplo 10 ampliado

a) Obtén los autovalores y base de cada subespacio propio para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) Comprueba que las imágenes de los autovectores producen los múltiplos esperados.

c) Razona si existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A y en caso afirmativo escribe esa base y la matriz estándar de la aplicación lineal relativa a ella.

Ejemplo 11

Estudia si son diagonalizables las siguientes matrices. En caso afirmativo obtén P invertible y D diagonal tales que $X = PDP^{-1}$, siendo X la matriz dada.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Metodología para la resolución:

```
% Definicion de A
n=3                % dimension de Rn

% Obtencion de los autovalores.

syms s
                          % | A - s I |  es el polinomio caracteristico de A, p(lambda)
solve(det(A-s*eye(3)))   % Da las raices del pol. caracterist. con sus multiplicidades.
                          % Teniendo en cuenta multiplicidades seran n raices en total
                          %   si hay raices complejas aparecera cada una con su conjugado
                          %   las raices reales son los autovalores
                          %     si solo hay un autovalor diferente, lo llamamos lambda
                          %     si hay varios autovals diferentes:  lambda1, lambda2, etc

            % PROPIEDADES DE LAS RAICES DEL POLINOMIO CARACTERISTICO.
            %  Suma     de todas (incluyendo multiplicidades) = traza de A
            %  Producto de todas (incluyendo multipl.) = determinante de A
            %  * Debemos comprobar que se cumplen estas propiedades. Si no se cumplen es
            %  que hemos determinado mal las raices de p(lambda) o sus multipl.

% Obtencion de la base de un subesp. propio.
% PROPIEDAD: 1 <= dim Vlambda <= multiplic. de lambda

s  = valor       % valor  es el valor del autovalor cuyo subesp. propio queremos estudiar

B=null(sym(A-s*eye(n)))  % las cols de la salida nos dan la base B de Vlambda.
                          % Es decir la base de las soluciones del SL  A x = s x
                          % que es el mismo que   (A - s I) x = 0

                    % si, estando A bien copiada, el resultado es que no existe base,
                    % entonces el "valor" dado no corresponde a un autovalor, porque la
                    % dim de un subesp. propio siempre es como minimo 1.
```

```
null(    A- s*eye(n)  )  % tambien es correcto, pero en vez de dar la solucion como la
                         % obtendriamos a mano, nos da una base de vectores unitarios y
                         % ortogonales entre si.

% Base de Rn formada por autovectores de A y matriz asociada, o diagonalizacion.

        % PROPIEDAD. La suma de los subespacios propios es directa.
        %   La union de las bases de subesp. propios distintos es conjunto l.i.
        %   La base de la suma de estos subesp. es la union de sus bases.

        % PROPIEDAD. Existe base de Rn formada por autovectores de A si y
        % solo si se cumplen dos condiciones:
        %   * condicion 1: todas las raices de p(lambda) son reales
        %   * condicion 2: todos los subesp. propios tienen dimension
        %                  igual a la multiplicidad de su autovalor

        % Si las n raices son reales y distintas (multip. 1), los n
        % subesp. tienen dimension 1.
        % Si las n raices son reales, pero las hay de multip. mayor que uno,
        % hay que estudiar la dimension de los subesp. de estas, para ver
        % si se cumple la condicion 2.

        % PROPIEDAD. Respecto de la base de Rn formada por autovectores la
        % matriz asociada es diagonal, y sus elementos son los correspondientes
        % autovalores en su orden.

        % Por ejemplo si en R3 tuvieramos lambda1 con mult. 2 y lambda2 con mult. 1
        % y dim B1=2.
            B = [B1 B2]   % base de R3 formada por autovectores
            D = diag( [lambda1 lambda1 lambda2] )
            % Comprobacion de la diagonalizacion:
            A*B  % el resultado debe ser igual a B*D

            % Comprobacion separada de cada subespacio:
            % A*autovector de Bi = autovector*lambdai
            A * v - lambdai*v    % nos tiene que devolver una columna con 3 ceros.
```

Solución Ejemplo 10

```
A=[2 -3 1; 1 -2 1; 1 -3 2]
%     2    -3     1
%     1    -2     1
%     1    -3     2

% a) Autovalores:
% ---------------

syms s
solve(det(A-s*eye(3)))
% 0
% 1
% 1

% Los autovalores son lambda=1 doble y lambda=0 simple


% a) Base de cada subespacio propio:
% ---------------------------------

s1=1; B1=null(    sym( A-s1*eye(3) ) )
% [3, -1]
```

```
% [1,  0]
% [0,  1]

% La base del subespacio correspondiente a lambda = 1 es {(3,1,0), (-1,0,1)}

s2=0; B2=null(    sym( A-s2*eye(3) ) )
% 1
% 1
% 1

% La base del subespacio correspondiente a lambda = 0 es {(1,1,1)}.
% Es la misma que la base de Nul(A).



% b) Comprob. de que las imagenes de los autovects producen los multiplos esperados:
% ----------------------------------------------------------------------------------

A*B1      % devuelve la propia base B1, que es lo esperado para autovalor 1
% [3, -1]
% [1,  0]
% [0,  1]

A*B2      % devuelve 0*vector = vector0
% 0
% 0
% 0



% c) Razona si existe base B de R3 formada por autovectores de A.
%    En caso afirmativo escribe B y la matriz estandar de la aplicacion
%    relativa a esa base.
% -----------------------------------------------------------------------

% dim B1 = 2 = multiplicidad de lamba=1 => existe base de R3 formada
% por autovectores de A

% B = {(3,1,0),(-1,0,1),(1,1,1) }  base de R3 formada por autovectores de A

D=diag([1 1 0])  % matriz de la aplicacion relativa a la base B de autovectores

% D =
%     1     0     0
%     0     1     0
%     0     0     0



% No se pide comprobacion de que A = B D B^-1.
% Ni la comprobacion alternativa mas sencilla A*B = B*D.
% Pero la realizamos aqui la segunda.

B=[B1 B2]

% B =
% [ 3, -1, 1]
% [ 1,  0, 1]
% [ 0,  1, 1]

A*B
% [ 3, -1, 0]
% [ 1,  0, 0]
```

```
% [ 0,  1, 0]

B*D
% [ 3, -1, 0]
% [ 1,  0, 0]
% [ 0,  1, 0]
```

Solución Ejemplo 11

```
% Pide determinar si la transformacion es diagonalizable.

% Primera transformacion lineal:
% -----------------------------

A=[2 0 0; 0 4 0; 1 0 2]
syms s
solve(det(A-s*eye(3)))

% A =
%     2     0     0
%     0     4     0
%     1     0     2

% 2
% 2
% 4

% Las tres raices son reales, y por tanto autovalores,
% por lo que se cumple la primera condición.
% Los autovalores son lambda=2 doble y lambda=4 simple.

% La segunda condicion es que para los autovalores multiples
% dim Vlambda = multiplicidad de lambda.
% Tenemos lambda=2 doble, por tanto dim Vlambda ha de ser 2.

s1=2; B1=null(    sym( A-s1*eye(3) ) );
%     0
%     0
%     1

% Este subespacio no aporta dos vectores l.i., es decir dim Vlambda no es igual a 2 =>
% no existe base de R3 formada por autovectores A y A no es diagonalizable.



% Segunda transformacion lineal:
% -----------------------------

% Estudiamos ahora la matriz B del enunciado
A = [ 2 0 0 ; -1 4 0; -3 6 2]    % volvemos a llamar A a la matriz
solve(det(A-s*eye(3)))

% A =
%     2     0     0
%    -1     4     0
%    -3     6     2

% 2
% 2
% 4
```

```
% De nuevo tenemos tres autovalores, y tenemos que comprobar la dimension del
% subespacio propio correspondiente a lambda=2, que tiene multiplic. 2.

s1=2; B1=null(    sym( A-s1*eye(3) ) );
%     2     0
%     1     0
%     0     1

% Este subespacio aporta los dos autovectores l.i. necesarios =>
% existe base de R3 formada por autovectores de A, y por tanto A es diagonalizable.

% Se pide determinar P invertible y D diagonal tales que A = P D P^-1

% P ha de tener como columnas una base de R3 de autovectores
% D los autovalores correspondientes en su orden.

s2=4; B2=null(    sym( A-s2*eye(3) ) );
% 0
% 1/3
% 1

% B={(2,1,0),(0,0,1),(0,1/3,1) }  es la base de R3 formada por autovectores de A


P=[B1 B2]            % La matriz P pedida

D=diag([2 2 4])      % La matriz D pedida

% P =
% [ 2,  0,   0]
% [ 1,  0, 1/3]
% [ 0,  1,   1]

% D =
%     2     0     0
%     0     2     0
%     0     0     4
```

```
% comprobamos A*P = P*D, aunque no lo pide el ejercicio.

A*P
P*D

% [ 4, 0,   0]
% [ 2, 0, 4/3]
% [ 0, 2,   4]

% En esta matriz comprobamos que:
%     el primer autovector se transforma en 2 veces el mismo.
%     el segundo en 2 veces el mismo.
%     el tercero en 4 veces el mismo.
```

P.11 Semana 17 de mayo

Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

Para el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 2.5)$ y $C = (-3, 6.5)$, obtén:
a) Los ángulos interiores en A, B y C.
b) El perímetro.
c) El área.
d) El centro geométrico, centroide o baricentro.
e) El cuarto vértice del paralelogramo de vértices consecutivos CAB.
f) Un vector bisector angular en el vértice A.

Este ejercicio es muy sililar al Ejercicio 1 de los apuntes de este tema. La diferencia es la inclusión aquí del apartado f), y el cambio de datos. ($A = (1, 1), B = (5, 3), C = (-3, 7)$) en los apuntes).

Sol.:
Las instrucciones de MATLAB, incluidos los comentarios, están escritos en azul, y las salidas en rojo.

a) Ángulos.

```
% Introducimos los datos que son las coordenadas de los tres vertices A, B, C y
% seguidamente determinamos los vectores AB, AC, BC

 A=[1 1]'; B=[5 2.5]'; C=[-3 6.5]';  % introducidos como vectores columna
 AB=B-A   ,  AC=C-A , BC=C-B


AB =
    4.0000
    1.5000
AC =
   -4.0000
    5.5000
BC =
    -8
     4


% tomamos AB y AC para calcular el angulo en el vertice A

 angA=acosd(dot(AB,AC)/norm(AB)/norm(AC));

% dot( , )  es el producto escalar de los vectores que aparecen como argumentos
% norm(  )  es la norma o longitud del vector
% acosd( )  es el arcocoseno en grados

% tomamos BA y BC para obtener con el mismo procedimiento el angulo en B
```

```
% (BA=-AB)

 angB=acosd(dot(-AB,BC)/norm(AB)/norm(BC));

% tomamos CA y CB para obtener el angulo en vertice C (CA=-AC , CB=-BC)

 angC=acosd(dot(-AC,-BC)/norm(AC)/norm(BC));

[ angA  angB angC]   % Pedimos que los valores de los angulos se muestren como
                     % una fila para ahorrar espacio.

  105.4713   47.1211   27.4076


angA + angB + angC  - 180   % Este resultado deber salir 0, como comprobacion
                            % de que la suma de los angulos es 180

  0
```

b) Perímetro.

```
peri=norm(AB)+norm(BC)+norm(AC)
20.0170
```

c) Área.

```
% Situamos el triángulo en el plano XY de R3, aniadiendo a los vertices
% la coordenada z=0
% Hallamos el area a partir de la norma del producto vectorial de los vectores
% AB3, AC3, siendo AB3, AC3 los vectores AB, AC, pero considerados no sobre R2
% sino sobre el plano XY de R3.
% Es necesario hacerlo asi ya que el producto vectorial es una operacion en R3

AB3 = [AB ; 0] % extendemos el vector col. AB con una tercera coord. igual a 0
AC3 = [AC ; 0] % extendemos el vector col. AC con una tercera coord. igual a 0
area=1/2*norm(cross(AB3,AC3))

% cross( , )  producto vectorial de los vectores que aparecen como argumentos

AB3 =
    4.0000
    1.5000
         0
AC3 =
   -4.0000
    5.5000
         0
area =
    14
```

d) Centroide

```
cen= 1/3*(A+B+C)

    1.0000
    3.3333
```

e) El cuarto vértice, D, del paralelogramo de vértices consecutivos CAB.

```
AD = AB+AC       % AB+AC  es el vector AD.
D = A + AD       % D es igual a A + el vector AD
                 % Tambien se puede entender asi: OD = OA + AD

AD =
     0
     7

D =
     1
     8
```

f) Un vector bisector angular en el vértice A.

```
% El angulo en A se obtuvo en un apartado anterior.
% En este apartado obtendremos un vector con origen en A que divide el angulo
% anterior en dos partes iguales, o lo que es lo mismo, que forma el mismo angulo
% con AB y con AC

v=AB/norm(AB)+AC/norm(AC)  % es necesario tomar los vectores en las orientaciones
                           % AB y AC con la misma longitud, porque solo asi
                           % la suma de los vectores da como resultante un vector
                           % que divide el angulo en A en partes iguales.
v =
    0.3482
    1.1599
```

P.12 Semana 24 de mayo

Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

---

Ejemplo 3.10. Considerados en $\mathbb{R}^3$ el vector $\vec{v} = (5, -1, 1)$ y el plano Π de ecuación $x - 2y + z = 0$.

a) Obtén la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre Π.

b) Obtén el simétrico de $\vec{v}$ respecto de Π.

c) Obtén la distancia de $\vec{v}$ a Π.

d) Obtén la norma del simétrico de $\vec{v}$.

e) Obtén el coseno del ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con su proyección sobre Π.

Razona si el ángulo es agudo u obtuso.

Solución:

```
% a) Tema 7

% a) Proyeccion ortogonal del vector  v = (5,-1,1) sobre el plano Pi
% de ec. x - 2y + z = 0

% Metodo 1) Calculando en primer lugar, mediante productos escalares, la proy.
% ortogonal sobre la recta vectorial ortogonal al plano.

% En efecto   v = proy_v_r + proy_v_pi,  siendo
%  proy_v_r   la proyección ortogonal de v sobre la recta r ortogonal a pi
%  proy_v_pi  la proyeccion ortogonal sobre el plano, que es la pregunta.
```

```
% Notación:
% Para seguir la notación de los apuntes llamamos z a proy_v_r

% Datos:
format rat
v = [5 -1 1]' ;
n = [1 -2 1]' ;  % n es el vector normal al plano
                 % Es el vector director de la recta r ortogonal a pi
                 % Sus coords. son los coeficientes de la ec. implicita de pi

% Fórmulas:
%  proy de v sobre <n>  = v.n /(n.n)  n         z
%  y seguidamente:
%  proy de v sobre pi = v - proyeccion anterior

z = dot(v,n) / dot(n,n) * n  % vector proy sobre <n>

%       4/3
%      -8/3
%       4/3

proy_v_Pi = v - z

%      11/3
%       5/3
%      -1/3


n'*proy_v_Pi  % resultado 0 es la comprobacion de que la proyeccion obtenida
              % está en el plano.
              % Podemos entender la ec. de dos formas:
              %   *  proy_v_Pi cumple la ecuacion  x - 2y + z = 0
              %   *  n y el vector proyeccion han de ser ortogonales, y
              %      por tanto su producto escalar ha de ser 0

%        1/1125899906842624

%  b) simetrico de v respecto del plano

% Formula:    vsim = v - 2*z     o    vsim = proy_v_pi- z

vsim = v - 2*z

%       7/3
%      13/3
%      -5/3

% c) distancia de v a Pi
dist=norm(z)

% 1277/391

format short, dist
%  3.2660

format rat
```

```
% d) norma de vsim

[norm(v) norm(vsim)] % La calculamos y a la vez comprobamos que coincide con
                     % la norma de v

%    1351/260       1351/260

format short, [norm(v) norm(vsim)]
%    5.1962    5.1962

% e) Obten el coseno del angulo que forma v  con su proyeccion sobre Pi.
%    Razona si el angulo es agudo u obtuso.

format short, coseno = v'*proy_v_Pi/ norm(v) / norm(proy_v_Pi)

% 0.7778

% el coseno está entre 1 y 0, por tanto el angulo es agudo
acosd(coseno)     % no se pide pero lo calculamos tambien (en grados).

% 38.9424



% Metodo 2 para obtener proy_v_pi :  Descomposicion única a partir
% de la suma directa de subespacios.

% Base de Pi    junto con     n         forman base de R3
% ----------               -----      ------------------
%  plano                   recta r

Base_pi = null(sym(n'))

% [2, -1]
% [1,  0]
% [0,  1]

Base = [Base_pi n]

[2, -1,  1]
[1,  0, -2]
[0,  1,  1]

Ampliada = [Base v]

[2, -1,  1,  5]
[1,  0, -2, -1]
[0,  1,  1,  1]

% es la ec. que hay que resolver, para obtener alpha, beta, gamma tales que
% proy_v_pi = alpha * (2,1,0) + beta*(-1,0,1)
%      z     = gamma*(1,-2,1)

rref(Ampliada)

[1, 0, 0,  5/3]
[0, 1, 0, -1/3]
[0, 0, 1,  4/3]
```

```
% alpha = 5/3, beta = -1/3, gamma = 4/3

linsolve(Base,v)  % Otra forma de resolver el SL Compatible Determinado
                  % Da directamente la solucion.
%  5/3
% -1/3
%  4/3

Base_pi*[5/3 -1/3]'   % el resultado es proy_v_pi, que ha de coincidir
                      % con el obtenido con el metodo 1

% 11/3
%  5/3
% -1/3


% Metodo 3 para obtener proy_v_pi :  proy_v_pi = A * v
% A se calcula a partir de su forma diagonal, ya que:
% La base B anterior es base de autovectores de la proyección ortogonal,
% que es una aplicación lineal.
% En efecto, los dos primeros vectores de B están en el plano y la proyeccion
% sobre el plano los ``transforma'' en ellos mismos. Tienen por tanto autovalor 1.
% El vector n se transforma en el vector (0,0,0), porque se proyecta sobre
% (0,0,0), por tanto n es autovector con autovalor 0.

D = diag([1 1 0])

%       1              0             0
%       0              1             0
%       0              0             0

Base =     % recordamos la base obtenida

% [2, -1,  1]
% [1,  0, -2]
% [0,  1,  1]

A = Base * D * Base^-1

% [  5/6, 1/3, -1/6]
% [  1/3, 1/3,  1/3]
% [ -1/6, 1/3,  5/6]

A*v    % el resultado es proy_v_pi, que ha de coincidir con el obtenido
       % con los metodos anteriores

% 11/3
%  5/3
% -1/3



% Recordamos el significado de autovectors y autovalores de la transformacion:

% f ( 2,1,0) = (2 ,1,0) = 1 (2,1,0)
% f (-1,0,1) = (-1,0,1) = 1 (-1,0,1)
% f (-1,0,1) = ( 0,0,0) = 0 (-1,0,1)
```

P.13 Semana 31 de mayo

Espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 12. a) Demuestra que no es posible expresar el vector $\vec{v} = (15, 6, 4, -5)$ como combinación lineal de los vectores del conjunto $S = \{(-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2)\}$.
b) Obtén los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de S que dan el vector más cercano a $\vec{v}$.

Ejemplo 13. Obtén la matriz de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$ sobre el plano W de ecuación implícita $x + y + z = 0$.
