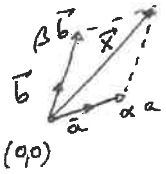
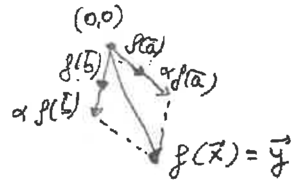
A.L. en $\mathbb{R}^2$





$B=\{\vec a,\vec b\}$
base de $\mathbb{R}^2$

$$\vec x=\alpha\vec a+\beta\vec b \quad \underset{AL}{\uparrow} \quad f(\vec x)=\alpha f(\vec a)+\beta f(\vec b) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} [f(\vec x)]_B=\alpha[f(\vec a)]_B+\beta[f(\vec b)]_B$$

premult.
por $B^{-1}=[\vec a\ \vec b]^{-1}$

$$[\vec y]_B=\begin{bmatrix}[f(\vec a)]_B & [f(\vec b)]_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{bmatrix}}_{[\vec y]_B=}=\underbrace{\begin{bmatrix}[f(\vec a)]_B & [f(\vec b)]_B\end{bmatrix}}_{F}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}}_{[\vec x]_B}$$

Conocida imagen de una base, o sea de dos vectores l.i., quedan determinadas todas las imágenes.

Particularizamos para base canónica de $\mathbb{R}^2$: $B=\{\vec e_1,\vec e_2\}$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}f(\vec e_1) & f(\vec e_2)\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Matriz estándar

$\vec x=x_1\vec e_1+x_2\vec e_2$

$f(\vec x)=\begin{bmatrix}f(\vec e_1) & f(\vec e_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

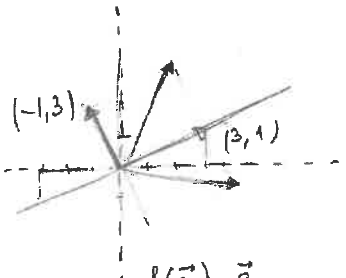
Dada $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ A.L. para cada base considerada una matriz asociada. Esa matriz tiene por columnas las imágenes de los vectores base en coordenadas relativas a la propia base. Lo mismo para $\mathbb{R}^n$

Relación entre A y F en $\mathbb{R}^n$

A y F igual rango
" determinante
" traza $=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\begin{tikzcd}
\vec x \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P_B^{-1}"'] & \vec y \\
{[\vec x]_B} \arrow[r, "F"'] & {[\vec y]_B} \arrow[u, "P_B"']
\end{tikzcd}$$

$A=P_BFP_B^{-1}$ $\boxed{A=PFP^{-1}}$



Calcula la matriz estándar de la simetría respecto de la recta $y = 1/3\, x$

$x=3 \quad y=1 \qquad (3,1)$

Base natural para el problema: $\{\underset{\vec{a}}{(3,1)}, \underset{\vec{b}}{(-1,3)}\}$

$f(\vec{a}) = \vec{a}$

$f(\vec{b}) = -\vec{b}$

$$\begin{cases} f(\vec{a}) = 1\vec{a} + 0\,\vec{b} \\ f(\vec{b}) = 0\vec{a} + -1\,\vec{b} \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$[f(\vec{a})]_B \qquad [f(\vec{b})]_B$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

- Obtener A
- Comprobar $A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

- ... transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$
- simetría respecto a recta vectorial (que pasa por el origen)

  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matriz asociada respecto a base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$

  $\vec{a}$ en recta simetría, $\vec{b} \perp \vec{a}$

- proyección ortogonal sobre recta vectorial

  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ la misma base anterior

- Giro centro $(0,0)$ ángulo α $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ respecto de todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$

  La estándar es una de ellas

  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ simetría respecto del origen. Matriz $-I$ respecto de cualquier base.

  $f(\vec{x}) = -\vec{x} = -I\,\vec{x}$

  Giro 0° I

- Dilatación $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $k > 1$ $\quad kI$ en todas las bases
- Contracción $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$ $\quad kI$ en todas las bases

  $f(\vec{x}) = k\,\vec{x} = k\,I\,\vec{x}$

- Escalamiento no uniforme $\begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix}$ $0 < ki$

es la matriz respecto de base $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ siendo $\bar{a}$ la dirección del escalamiento $k1$ y $\bar{b}$ la dirección del escalamiento $k2$.