SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN - Espacios Vectoriales.

A) Soluciones a las Cuestiones

Sol. C-1) **a)** Sí, por ejemplo el eje X, formado por los vectores de la forma (λ, 0), que se identificarían con el número real λ . También valdría el eje Y, o cualquier otra recta que pase por el origen. (Al ser de dimensión 1, una recta se puede identificar con $\Re$, que también es de dimensión 1).

b) No es posible, pues $\Re^2$ tiene dimensión 2, y no puede contener un espacio que "se parezca" a $\Re^3$, pues éste tendría dimensión 3. Un espacio de dimensión 3 no puede estar contenido en otro de dimensión 2.

Sol. C-2) Hay muchas posibilidades; estos son sólo algunos ejemplos: las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b+c & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Sol. C-3) Utilizamos la fórmula dim S + dim T = dim(S+T) + dim(S∩T).

a) El primer miembro de la igualdad es 2+3, por tanto el segundo miembro ha de sumar también 5, así que las posibilidades son:

- dim(S+T) = 5 , dim(S∩T) = 0
- dim(S+T) = 4 , dim(S∩T) = 1
- dim(S+T) = 3 , dim(S∩T) = 2

No hay más posibilidades. No sería correcto "dim(S+T) = 2 y dim(S∩T) = 3" porque la suma ha de ser "más grande" que S y que T, y la intersección ha de ser "más pequeña" que S y que T.

b) Ahora las posibilidades son:

- dim(S+T) = 4 , dim(S∩T) = 1
- dim(S+T) = 3 , dim(S∩T) = 2

es decir, las mismas que en **a)** excepto la primera. No sería posible dim(S+T) = 5 porque estamos en $\Re^4$, así que no puede haber un subespacio de dimensión 5.

Sol. C-4) Como en la cuestión anterior, dim S + dim T = dim(S+T) + dim(S∩T).

Ahora S y T son planos, por tanto ambos de dimensión 2, así que el 2º miembro ha de sumar 4, lo que nos da las posibilidades:

- dim(S+T) = 2 , dim(S∩T) = 2 (plano)
- dim(S+T) = 3 , dim(S∩T) = 1 (recta)

No hay más posibilidades. No es correcto " dim(S+T) = 4 y dim(S∩T) = 0 " porque estamos en $\Re^3$, así que no puede haber un subespacio de dimensión 4.

Por tanto, en ninguna de las posibilidades S∩T es un punto (que sería de dimensión 0).

Sol. C-5) **a)** Es fácil, porque prácticamente tres vectores cualesquiera en $\Re^2$ (a no ser que los 3 estén alineados) van a tener rango 2. Por ejemplo,

u=(1,0), v=(0,1), w=(1,1)   su rango es 2.

Se puede suprimir uno cualquiera de ellos y el rango sigue siendo 2.

b) Habría que poner 2 vectores que sean linealmente dependientes entre sí, p. ej. u=(1,0) , v=(2,0) , y otro que sea independiente de ellos: p.ej. w= (1,1) . Este conjunto tiene rango 2.

Así, quitando u se conserva el rango; quitando v también; pero no podemos quitar w porque entonces el rango disminuye.

Sol. C-6) a) No, porque nunca pueden ser independientes más vectores de lo que indica la dimensión.

b) No, pues nunca pueden ser sistema generador menos vectores de lo que indica la dimensión.

Sol. C-7) Sí, porque si **u, v** son linealmente independientes, como sólo son 2 vectores, significa que uno no es múltiplo del otro. Entonces **2u** y **3v** tampoco pueden ser uno múltiplo del otro.

(Imagina que **2u** fuese múltiplo de **3v ,** p.ej. 5 veces: 2u = 5·3v, entonces despejando tendríamos u = $\frac{15}{2}$ v , y no puede ser porque **u** y **v** eran independientes).

Sol. C-8) Cierto, pues el conjunto independiente siempre tiene un número de vectores <u>menor o igual</u> que la dimensión del espacio, mientras que el sistema generador siempre tiene un número de vectores <u>mayor o igual</u> que la dimensión del espacio.

Sol. C-9) **a)** La base { **(0,1)** , **(1,0)** } , es decir, la canónica pero con los vectores en orden contrario. Así claramente (1,2) = 2 · **(0,1)** + 1 ·**(1,0).**

b) La base { **(–1,0), (0,–1)**} , es decir, la canónica pero con los vectores cambiados de signo. Así claramente (1,2) = (–1) · **(–1,0)** + (–2) · **(0,–1)**

c) No es posible. En cualquier base, las coordenadas (0,0) son exclusivas del vector nulo.

Sol. C-10) **a)** No, por no ser cuadrada.

b) No, por no ser inversible.

c) Sí, por ser cuadrada e inversible. Sería la matriz de cambio entre ciertas bases de $\Re^2$. (de hecho es la matriz de cambio de B={ (1,3), (1,2) } a la base canónica).

B) Soluciones a los Ejercicios

Sol. E-1) **a) No,** porque no contiene al (0,0), ya que no hay ningún valor de a, b que cumpla a la vez a+b=0 y a+b+2=0.

b) Sí. Es el conjunto de todos los vectores de $\Re^2$ que tienen sus dos coordenadas iguales. Se ve más fácilmente si llamamos b=a+1, entonces el conjunto es { (b,b) }. Es subespacio porque:

- La suma de dos elementos es (b,b)+(c,c)=(b+c,b+c) que es otro elemento del conjunto.

- Si λ es un escalar, λ (b,b) = (λb,λb) que es otro elemento del conjunto.

Sol. E-2) *1ª forma*: Plantear el sistema dado por $\alpha(1,2,4)+\beta(-1,-1,2)=(1,4,16)$. Es compatible, por tanto es posible poner v como combinación lineal de (1,2,4) y (-1,-1,2). **Sí pertenece**.

2ª forma: Hallar el rango de los tres vectores y ver que es 2. Por tanto, v es combinación lineal de (1,2,4) y (-1,-1,2). **Sí pertenece.**

Sol. E-3) **a)** *1ª forma*: Como hay 2 parámetros, y estamos en $\Re^3$, hará falta 1 ecuación. "Claramente" ésta es **y=x+z** , es decir, **x-y+z=0.**

2ª forma: Un sistema generador del subespacio es (1,1,0), (1,2,1). Un vector (x,y,z) pertenece al subespacio si el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$ es 2. Esto ocurre cuando **x-y+z=0** (se puede ver calculando el determinante o triangulando la matriz).

b) Resolviendo el sistema de una sola ecuación, la incógnita principal es x, quedando como parámetros y=α, z=β. La solución al sistema es por tanto **($2\alpha-3\beta$, α, β),** que es la forma paramétrica.

Sol. E-4) **a)** Escalonando la matriz se ve que es de rango 4, igual al número de vectores, luego el conjunto es **independiente**. (*Otra forma*: porque el determinante 4x4 que forman, es no nulo).

b) Escalonando la matriz se ve que es de rango 2, menor que el número de vectores, luego el conjunto es **dependiente**. (*Otra forma*: viendo que alguno es combinación lineal de los otros).

Sol. E-5) **a)** Escalonando la matriz se obtiene **rango 2** (2 filas no nulas).
Otra forma: Sin escalonar la matriz. Está claro que la matriz que forman tiene una columna toda nula, así que el determinante es nulo, luego el rango ya no es 3. Sería 2 ó 1. No es 1 porque entonces serían todos los vectores múltiplos uno de otro, y no lo son. Por tanto, **rango 2.**

b) Escalonando la matriz se obtiene **rango 2** (2 filas no nulas).
Otra forma: Sin escalonar la matriz. Está claro que el rango no puede ser más de 2, pues estamos en $\Re^2$ (la matriz sólo tiene 2 filas). Y el rango no es 1 porque entonces serían todos los vectores múltiplos uno de otro, y no lo son. Por tanto, **rango 2.**

Sol. E-6) Haciendo la forma escalonada de la matriz, las columnas pivotales son la 1ª, 2ª y 4ª. Por tanto extraemos los **vectores independientes 1º, 2º y 4º.**

(Hay otras soluciones, por ejemplo 1º, 2º y 5º, o también 3º, 4º y 5º, etc. Pero otras posibilidades no valen, por ejemplo 1º, 2º y 3º no vale, porque no son independientes.)

Sol. E-7) Ponemos (a, a+b, a+b+c, c, 2a-b) = a (1,1,1,0,2) + b (0,1,1,0,-1) + c(0,0,1,1,0). Así, un sistema generador es **(1,1,1,0,2) , (0,1,1,0,-1), (0,0,1,1,0).**

Sol. E-8) a) Un sistema generador de S+T se obtiene uniendo ambos sistemas generadores:

(1,1,0,0), (1, -1, 0, 0), (0,2,1,0) , (-1,1,1,0)

b) Para saber si este sistema generador es base, hay que ver si son independientes, y si no lo son, quedarse con tantos como indique el rango.

1ª forma: Escalonando la matriz se obtiene que el rango es 3 (por tanto no son independientes); las columnas pivotales son la 1ª, 2ª y 3ª y así una base de S+T sería

(1,1,0,0), (1, -1, 0, 0), (0,2,1,0)

2ª forma: Sin escalonar la matriz se ve que su 4ª columna es toda nula, así que el rango ya no es 4. Será 3 o menor. Pero se ve fácilmente que los 3 primeros vectores son independientes, así que el rango es 3 y los 3 primeros vectores forman base: **(1,1,0,0), (1, -1, 0, 0), (0,2,1,0)**

Sol. E-9) a) S∩T se obtiene resolviendo el sistema formado por las 4 ecuaciones. $\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \\ x-y=0 \\ z-t=0 \end{cases}$

Se observa que el sistema es compatible determinado, y como es homogéneo, su solución única es (0,0,0,0). Por tanto **S∩T = { (0,0,0,0) }, es el subespacio cero.**

b) *1ª forma*: Siguiendo la sugerencia: Por **a)** tenemos que dim(S∩T)=0. También sabemos que:

- dim(S)=2, ya que está definido por 2 ecuaciones independientes en $\Re^4$ y por tanto tendría 4–2=2 parámetros, dimensión 2.
- dim(T)=2 por lo mismo.

Así, usando la fórmula dim(S)+ dim(T) = dim(S+T) + dim(S∩T), obtenemos que dim(S+T)=4.

Entonces S+T es un subespacio de dimensión 4 en $\Re^4$, así que sólo puede ser el total.

Concluimos por tanto que **S+T=** $\Re^4$**.**

2ª forma: Pasamos S y T a paramétricas, resolviendo cada uno de los dos sistemas. Se obtiene lo siguiente:

$S=\{ (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) \}$, $T=\{ (\lambda, \lambda, \mu, \mu) \}$

De lo cual se calcula un sistema generador de cada uno:

S= <(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)>, T= <(1,1,0,0), (0,0,1,1)>

y así la unión de ambos es un sistema generador de S+T :

S+T= <(1,-1,0,0), (0,0,1,-1), (1,1,0,0), (0,0,1,1)>

y se comprueba (p.ej. escalonando la matriz) que este conjunto tiene rango 4. Entonces S+T es un subespacio de dimensión 4 en $\Re^4$, así que sólo puede ser el total. Concluimos pues, que **S+T=**$\Re^4$.

Sol. E-10) Resolviendo el sistema obtenemos las implícitas: $(-3a-2b,\ 2a+b,\ a, b)$. Poniendo $(-3a-2b,\ 2a+b,\ a, b) = a\,(-3,2,1,0) + b\,(-2,1,0,1)$ se obtiene que un sistema generador es (-3,2,1,0) , (-2,1,0,1). Observamos que estos vectores son independientes (uno no es múltiplo del otro), por tanto **(-3,2,1,0), (-2,1,0,1) forman base y la dimensión del subespacio es 2.**

Sol. E-11) a) No, pues no son independientes (su determinante es nulo; o bien escalonando la matriz se ve que es de rango 2).

b) El subespacio {y=0} en $\Re^3$ es un plano; tiene dimensión 2 (pues está dado por 1 ecuación en $\Re^3$; 3–1=2). Así que los dos vectores serán base de este plano si son independientes. Y son independientes, porque uno no es múltiplo de otro. Por tanto **sí forman base.**

Sol. E-12) Tenemos 2 vectores; para formar una base de $\Re^4$ habrá que añadir otros 2, que sean independientes de los anteriores.

Probemos con vectores de la base canónica: por ejemplo si elegimos (0,0,1,0), (0,0,0,1) tendremos la familia **(2,3,0,1), (0,2,0,0), (1,0,0,0), (0,0,1,0)** que se ve claramente que es de rango 4 (la matriz ya está escalonada). Por tanto esta familia es base de $\Re^4$.

(Los vectores añadidos no tienen por qué ser de la base canónica, valdrían otros si el rango final es 4).

Sol. E-13) Habrá que quedarse con 3 vectores independientes. (Ojo, los 3 primeros no lo son). Para saber cuáles son, escalonamos la matriz y nos quedamos con las columnas pivotales, que son la 1ª, 2ª y 4ª. Por tanto una base será **(1,2,3) (4,5,6), (0,1,3) .**

Sol. E-14) *1ª forma*: Planteamos el sistema $(-3,-8) = \alpha\,(0,-1) + \beta\,(1,2)$, cuya solución es $\alpha = 2$, $\beta = -3$. Así pues, las coordenadas de v en la base dada son **(2, –3).**

2ª forma: Hallamos la matriz de cambio de base *(ver ejercicio E-15),* y multiplicándola por v se obtiene $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ que son las coordenadas pedidas.

Sol. E-15) a) Basta poner los vectores de la base en columnas, $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

b) Es la matriz inversa de la anterior: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Sol. E-16) a) La suma será directa si dim(S∩T)=0. Sabemos que tanto S como T tienen dimensión 2, entonces

$$\underset{2}{\dim S} + \underset{2}{\dim T} = \underset{4}{\dim(S+T)} + \underset{0}{\dim(S\cap T)}$$

vemos que el caso dim(S∩T)=0 sólo se da cuando dim(S+T)=4. Y esto ocurrirá en caso de que los vectores (1,2,0,0), (1,0,0,2), (0,0,2,1), (2,0,0,1) que generan S+T sean independientes.

En efecto lo son (la matriz que forman es de rango 4), así que dim(S+T)=4, y dim(S∩T)=0.

Por tanto **la suma es directa.**

b) La suma será directa si dim(S∩T)=0. Sabemos que tanto S como T tienen dimensión 2, entonces

$$\underset{2}{\dim S} + \underset{2}{\dim T} = \underset{4}{\dim(S+T)} + \underset{0}{\dim(S\cap T)}$$

vemos que el caso dim(S∩T)=0 sólo se da cuando dim(S+T)=4. Pero esto es imposible porque estamos en $\Re^3$, ningún subespacio puede tener dimensión 4. Por tanto dim(S+T)=4 no puede ser, y dim(S∩T)=0 tampoco. **La suma no es directa.**

*- También es posible, tanto en **a)** como en **b)**, calcular explícitamente la intersección y ver si es el subespacio cero o no (aunque lleva más trabajo).*

Sol. E-17) Añadimos vectores hasta formar una base de $\Re^3$: será necesario añadir 1 vector, que sea independiente de los anteriores. Por ejemplo (1,0,0) sirve, porque el rango de (1,2,3),(4,5,6), (1,0,0) es tres.

Así, **la base del suplementario son los vectores añadidos**, en este caso (1,0,0). Por tanto el suplementario encontrado es el espacio generado por este vector (en este caso se trata del eje x)

(Hay infinitas posibilidades más. De hecho cualquier recta no contenida en el subespacio sería un suplementario).