

# SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN - Endomorfismos y diagonalización

---

## A) Soluciones a las Cuestiones

**Sol. C-1) a)** Una matriz  $3 \times 3$  puede tener **como mucho 3 valores propios**: ya que el polinomio característico es de grado 3 y puede tener como máximo 3 raíces.

**Sol. C-2) a)** Como la matriz es diagonal, los valores propios son los elementos diagonales: **4, -1, 3**.

**b)** Los vectores propios son los de la **base canónica**:  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ . Ya que, como la matriz contiene las imágenes de la base canónica en columnas, se observa que

$f(1,0,0) = (4,0,0)$  luego  $(1,0,0)$  es vector propio de valor propio 4.

$f(0,1,0) = (0,-1,0)$  luego  $(0,1,0)$  es vector propio de valor propio  $-1$ .

$f(0,0,1) = (0,0,3)$  luego  $(0,0,1)$  es vector propio de valor propio 3.

**Sol. C-3) a)** Tendrá rango **estrictamente menor que 4**, es decir, **3, 2, 1, ó 0**. Ya que la matriz  $A-8I$  dará lugar a un sistema compatible indeterminado, cuyas soluciones son los vectores propios de valor propio 8.

**b)** Como todos los subespacios propios, podrá tener dimensión como mínimo 1, y como máximo la dimensión del espacio vectorial, en este caso 4. Por tanto, dimensión **1, 2, 3 ó 4**.

De hecho la dimensión de  $V_8$  está relacionada con el rango de la matriz  $A-8I$ , puesto que  $\dim(V_8) = 4 - \text{rg}(A-8I)$ .

**Sol. C-4) a)** Los subespacios propios son  $V_3$  y  $V_5$ . Los dos valores propios son simples, es decir, de multiplicidad 1. Como la dimensión del subespacio propio está comprendida entre 1 y la multiplicidad, dicha dimensión ha de ser 1, tanto para  $V_3$  como para  $V_5$ .

Entonces  $1 + 1 = 2$ , **sí es diagonalizable**.

**b)** Los subespacios propios son  $V_6$ ,  $V_7$  y  $V_8$ . De manera similar, los tres valores propios son simples, de multiplicidad 1. Como la dimensión del subespacio propio está comprendida entre 1 y la multiplicidad, dicha dimensión ha de ser 1, para los tres subespacios.

Entonces  $1+1+1=3$ , **sí es diagonalizable**.

**c)** El subespacio propio será  $V_{-3}$ , cuya dimensión estará comprendida entre 1 y la multiplicidad que es 2. Por tanto, **no sabemos con estos datos** si dicha dimensión será 1 ó 2. Si fuese 2, la matriz sería diagonalizable (2 vectores propios), pero si fuese 1, no lo sería.

**d)** Los subespacios propios serán  $V_9$  y  $V_1$ . La dimensión de  $V_1$  ha de ser 1 por un razonamiento como los anteriores, pero la dimensión de  $V_9$  puede ser 1 ó 2. Si fuese 2 la matriz sería diagonalizable ( $2+1=3$ ) pero si fuese 1, no lo sería. Por tanto, **con estos datos no se sabe**.

**Sol. C-5)** Lo más fácil es una matriz que ya sea diagonal, así seguro que es diagonalizable. (Entonces la matriz de paso P sería la identidad.). También podríamos poner cualquier matriz real simétrica, que siempre es diagonalizable.

**Sol. C-6)** a) En una matriz real simétrica, los vectores propios de distinto valor propio son ortogonales. Por tanto el vector asociado a  $\mu$  deberá ser ortogonal a  $(-1,3)$ . Por ejemplo **(3,1)** o cualquier múltiplo suyo.

## **B) Soluciones a los Ejercicios**

**Sol. E-1)** a) El rango de la matriz es 3 (se obtiene escalonando), rango máximo. Luego el endomorfismo es **inyectivo y suprayectivo**, por tanto **biyectivo**.

b) La matriz del endomorfismo es  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$  que tiene rango 1.

No tiene rango máximo, luego el endomorfismo **no es inyectivo ni suprayectivo**.

c) La matriz del endomorfismo es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  que tiene rango 2, rango máximo.

Luego el endomorfismo es **inyectivo y suprayectivo**, por tanto **biyectivo**.

**Sol. E-2)** a) Hallamos la imagen de u:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

vemos que  $f(u) = 1 \cdot u$ , luego **u es vector propio de valor propio 1**.

b) Hallamos la imagen de v:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

vemos que  $f(v) = 0 \cdot v$ , **v es vector propio de valor propio 0**.

c) Hallamos la imagen de w:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

vemos que  $f(w)$  no es múltiplo de w. Por tanto **w no es vector propio**.

**Sol. E-3)** a) (Como es triangular, el polinomio característico se resuelve fácilmente) El polinomio característico es  $(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+6)$ , luego los valores son **2,1,-6**.

b) El polinomio característico es  $\lambda(\lambda-5)$  luego los valores son **0, 5**.

**Sol. E-4)** a) Polinomio característico:  $(-1-\lambda)(2-\lambda)^2$ , valores propios **-1 simple, 2 doble**.

b) Para  $\lambda = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solución } (\alpha, 0, -2\alpha), \text{ vector propio } (1, 0, -2)$$

Para  $\lambda = 2$ :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solución } (0, \beta, -\beta), \text{ vector propio } (0, 1, -1)$$

c) Los vectores propios son en total dos, luego no forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .  
El endomorfismo **no es diagonalizable**.

**Sol. E-5)** Primero escribimos la matriz de f, que es  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Polinomio característico:  $(3-\lambda)^2(-3-\lambda)$ , valores propios **3 doble, -3 simple**.

b) Para  $\lambda = 3$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solución } (\alpha, \beta, 0), \text{ vectores propios } (1, 0, 0), (0, 1, 0)$$

Para  $\lambda = -3$ :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solución } (\beta, -3\beta, 2\beta), \text{ vector propio } (1, -3, 2)$$

c) Hay en total tres vectores propios que forman una base de  $\mathbb{R}^3$ . Esto significa que el endomorfismo **sí es diagonalizable**.

d) La diagonal es la de los valores propios:  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

La matriz de paso tiene en columnas los vectores propios (en el mismo orden que los valores):  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(Se puede comprobar que se cumple  $D = P^{-1}AP$ ).

**Sol. E-6)** Valores de  $A^t$ : **1, -1, 2** (los mismos que A)  
Valores de  $4A$ : **4, -4, 8** (los de A multiplicados por 4)  
Valores de  $A^3$ : **1, -1, 8** (los de A elevados al cubo)  
Valores de  $A^{-1}$ : **1, -1,  $\frac{1}{2}$**  (inversos de los de A).

**Sol. E-7)** Primero escribimos la matriz del endomorfismo en base canónica,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz de cambio de base tendrá en sus columnas la base dada:  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz en la base dada es  $M = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Sol. E-8)** D será la diagonal de los valores propios 0 y 3 :  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

La matriz de paso P tiene en sus columnas los vectores propios:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces,  $A = P D P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(Puede comprobarse que efectivamente A tiene los valores y vectores propios del enunciado).

**Sol. E-9)** El valor es **8** y el vector es **(0.50, 1)**. Para dos cifras significativas converge en unas 10 iteraciones, según el vector inicial que se tome.