SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN
Endomorfismos. Autovectores y diagonalización

A) Soluciones a las Cuestiones

C-1) **a)** Una matriz 3x3 puede tener **como mucho 3 valores propios**: ya que el polinomio característico es de grado 3 y puede tener como máximo 3 raíces.

C-2) **a)** Como la matriz es diagonal, los valores propios son los elementos diagonales: **4, –1, 3.** Ya que al formar el polinomio característico, este aparece factorizado: $(\lambda-4)\ (\lambda+1)\ (\lambda-3)$.

b) Los vectores propios son los de la **base canónica**: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Ya que, como la matriz contiene las imágenes de la base canónica en columnas, se observa que

f(1,0,0) = (4,0,0) luego (1,0,0) es vector propio de valor propio 4.
f(0,1,0) = (0,-1,0) luego (0,1,0) es vector propio de valor propio –1.
f(0,0,1) = (0,0,3) luego (0,0,1) es vector propio de valor propio 3.

C-3) **a)** Tendrá rango **estrictamente menor que 4,** es decir**, 3, 2, 1, 0.** Ya que la matriz $A-8\,I$ dará lugar a un sistema compatible indeterminado, cuyas soluciones son los vectores propios de valor propio 8.

b) Como todos los subespacios propios, podrá tener dimensión como mínimo 1, y como máximo la dimensión del espacio vectorial, en este caso 4. Por tanto, dimensión **1, 2, 3 ó 4.**

Además la dimensión de V_8 está relacionada con el rango de la matriz $A-8\,I$, puesto que

$\dim (V_8) = 4 - \mathrm{rg}(A-8\,I)$.

C-4) **a)** Los subespacios propios son V_3 y V_5 . Los dos valores propios son simples, es decir, de multiplicidad 1. Como la dimensión del subespacio propio está comprendida entre 1 y la multiplicidad, dicha dimensión ha de ser 1, tanto para V_3 como para V_5 .

Entonces 1 + 1= 2. Hay en total 2 vectores propios linealmente independientes, que forman base de $\mathbb{R}^2$. **Es diagonalizable**.

b) Los subespacios propios son V_6 , V_7 y V_8. De manera similar, los tres valores propios son simples, de multiplicidad 1. Como la dimensión del subespacio propio está comprendida entre 1 y la multiplicidad, dicha dimensión ha de ser 1, para los tres subespacios .

Entonces 1+1+1= 3, Hay en total 3 vectores propios linealmente independientes, que forman base de $\mathbb{R}^3$. **Es diagonalizable**.

c) El subespacio propio será V_{-3} , cuya dimensión estará comprendida entre 1 y la multiplicidad que es 2. Por tanto, **no sabemos con estos datos** si dicha dimensión será 1 ó 2. Si fuese 2, la matriz sería diagonalizable (2 vectores propios independientes), pero si fuese 1, no lo sería.

d) Los subespacios propios serán V_9 y V_1 . La dimensión de V_1 ha de ser 1 por un razonamiento como los anteriores, pero la dimensión de V_9 puede ser 1 ó 2. Si fuese 2 la matriz sería diagonalizable (2+1=3) pero si fuese 1, no lo sería. Por tanto, **con estos datos no se sabe**.

C-5) Lo más fácil es una matriz que ya sea diagonal, así seguro que es diagonalizable. (Entonces la matriz de paso P sería la identidad.). También podríamos poner cualquier matriz real simétrica, que siempre es diagonalizable.

C-6) **a)** En una matriz real simétrica, los vectores propios de distinto valor propio son ortogonales. Por tanto el vector asociado a μ deberá ser ortogonal a (–1,3). Por ejemplo **(3,1)** o cualquier múltiplo suyo.

B) Soluciones a los Ejercicios

E-1) **a)** El rango de la matriz es 3 (se obtiene escalonando), rango máximo. Luego el endomorfismo es **inyectivo y suprayectivo**, por tanto **biyectivo**.

b) La matriz del endomorfismo es $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1.

No tiene rango máximo, luego el endomorfismo **no es inyectivo ni suprayectivo**.

c) La matriz del endomorfismo es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2, rango máximo.

Luego el endomorfismo es **inyectivo y suprayectivo**, por tanto **biyectivo**.

E-2) **a)** Hallamos la imagen de u: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

vemos que $f(u) = 1\cdot u$, luego **u es vector propio de valor propio 1.**

b) Hallamos la imagen de v: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

vemos que $f(v) = 0\cdot v$, **v es vector propio de valor propio 0.**

c) Hallamos la imagen de w: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

vemos que $f(w)$ no es múltiplo de w . Por tanto **w no es vector propio**.

E-3) **a)** (Como es triangular, el polinomio característico se resuelve fácilmente) El polinomio característico es (λ-2) (λ-1) (λ+6), luego los valores propios son **2,1,-6.**

b) El polinomio característico es $\lambda(\lambda-5)$ luego los valores propios son **0 , 5.**

E-4) **a)** Polinomio característico: $(-1-\lambda)\,(2-\lambda)^2$, valores propios **-1 simple, 2 doble** .

b) Para $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ solución $(\alpha,0,-2\alpha)$, **vector propio (1,0,-2)**

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ solución $(0,\beta,-\beta)$, **vector propio (0,1,-1)**

c) Los vectores propios son en total dos, luego no forman una base de $\mathbb{R}^3$. El endomorfismo **no es diagonalizable**.

E-5) Primero escribimos la matriz de f, que es A= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Polinomio característico: $(3-\lambda)^2\,(-3-\lambda)$, valores propios **3 doble, –3 simple**.

b) Para $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ solución $(\alpha,\beta,0)$, **vectores propios (1,0,0) , (0,1,0)**

Para $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ solución $(\beta,-3\beta,2\beta)$, **vector propio (1,–3,2)**

c) Hay en total tres vectores propios independientes. que forman una base de $\mathbb{R}^3$. Esto significa que el endomorfismo **sí es diagonalizable**.

d) La diagonal es la de los valores propios: **D=** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

La matriz de paso tiene en columnas los vectores propios (en el mismo orden que los valores): **P=** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(Se puede comprobar que se cumple D= $P^{-1}AP$).

E-6) Valores de A^t : **1, –1 ,2** (los mismos que A)
Valores de 4A: **4, –4, 8** (los de A multiplicados por 4)
Valores de A^3 : **1, –1, 8** (los de A elevados al cubo)
Valores de A^{-1}: **1, –1,** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (inversos de los de A).

E-7) Primero escribimos la matriz del endomorfismo en base canónica, A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz de cambio de base tendrá en sus columnas la base dada: **Q=** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz en la base dada es **M = Q^{-1} A Q =** $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

E-8) D será la diagonal de los valores propios 0 y 3 : D= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

La matriz de paso P tiene en sus columnas los vectores propios: P= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces, A=P D P^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(Puede comprobarse que efectivamente A tiene los valores y vectores propios del enunciado).

E-9) El valor es **8** y el vector es **(0.50, 1).** Para dos cifras significativas converge en unas 10 iteraciones, según el vector inicial que se tome.