SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN - Aplicaciones lineales

A) Soluciones a las Cuestiones

C-1) **a)** **Sí** puede, si la matriz, que es 4x2, tiene rango 2.

b) **No** puede, pues la matriz, que es 2x3, no puede tener rango 3.

c) **No** puede, pues la matriz, que es 4x2, no puede tener rango 4.

d) **Sí** puede, si la matriz, que es 4x5, tiene rango 4.

e) **Sí** puede, si la matriz, que es 4x2, tiene rango 2 (inyectiva) y no tiene rango 4 (de hecho no puede tenerlo).

f) **No** puede, pues si es inyectiva (matriz 6x6, rango 6) también será suprayectiva.

C-2) **Falso**: $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ serán un sistema generador de **Im(f)**, pero no de W (a no ser que **Im(f)** sea igual a W, pero no tiene por qué serlo. Sólo si f es suprayectiva).

C-3) **a)** Basta poner una matriz **4x3 de rango 3**, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Basta poner una matriz **3x4 de rango 3** , por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Ha de ser entre dos espacios de la misma dimensión, o de un espacio en sí mismo, por ejemplo $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Basta entonces poner una matriz cuadrada **nxn de rango n,** por ejemplo la identidad de tamaño n.

C-4) El rango de A es el rango de f, por tanto es la dimensión de **Im(f).**

C-5) **a)** La dimensión de **Im(f)** ha de ser menor o igual que la dimensión del espacio inicial $\mathbb{R}^3$ (ya que la dimensión no puede aumentar). También ha de ser menor o igual que la dimensión del espacio final $\mathbb{R}^4$, ya que **Im(f)** está contenido en $\mathbb{R}^4$. Así pues, la dimensión de **Im(f)** ha de ser ≤ 3 y ≤ 4 , por tanto puede ser **0 (si fuese la aplicación nula), 1, 2 ó 3.**

b) Por similar razonamiento, la dimensión de **Im(f)** ha de ser ≤ 5 y ≤ 2 , por tanto puede ser **0, 1, ó 2 .**

C-6) **a)** **Ker(f)** está contenido en $\mathbb{R}^3$, por tanto su dimensión puede ser **0, 1, 2 ó 3.**
b) Lo mismo. El espacio final no influye.

B) Soluciones a los Ejercicios.

E-1) **a)** **No es lineal**, basta ver que f(0,0) = (1,1,0) no es cero.
b) **Sí es lineal**:

f(a,b)=(b,a)
f(c,d)=(d,c)
f(a+c, b+d) = (b+d, a+c) coincide con la suma (b,a) + (d,c).

f(a,b)=(b,a)
f(λa, λb) = (λb, λa) que coincide con λ(b,a).

E-2) **a)** f(S) está generado por las imágenes de (1,0,1,0) y (2,3,0,–1).

f(1,0,1,0) = (1,3,0)
f(2,3,0,–1) = (7, 4,0)

Los vectores **(1,3,0) y (7,4,0)** son linealmente independientes y por tanto base de f(S).

b) f(T) está generado por las imágenes de (0,0,3,2), (4,6,3,–1), (1,0,0,2).

f(0,0,3,2)= (2,7,0)
f(4,6,3,–1)=(15, 16,0)
f(1,0,0,2)=(3,–2,0)

Los vectores (2,7,0), (15, 16, 0), (3,–2,0) no son independientes. La matriz que forman tiene rango 2, por ello sólo 2 son independientes (p.ej. los 2 primeros), con lo que una base de f(T) será **{ (2,7,0), (15, 16, 0) }.**

E-3) **a)** Im(f) está generada por las imágenes de la base canónica:

f(1,0,0,0)=(1,0,0)
f(0,1,0,0)=(2,1,0)
f(0,0,1,0)=(0,3,0)
f(0,0,0,1)=(1,–1,0)

que son las columnas de la matriz de f. La matriz está ya escalonada y tiene rango 2, con columnas pivotales las dos primeras. Por tanto una base de Im(f) será **{ (1,0,0), (2,1,0) }**

b) Resolviendo el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se obtiene $(6\alpha+3\beta, -3\alpha+\beta, \alpha, \beta)$ y de ahí un sistema generador de Ker(f), que es **(6, –3, 1, 0), (–3, 1, 0, 1).** Como estos dos vectores son linealmente independientes, son base de Ker(f).

E-4) **a)** La matriz de la aplicación es A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2. Esta es la dimensión de Im(f). Entonces:

dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim (espacio inicial)
2 + ? = 4 $\Rightarrow$ dim(Ker(f)) = 2

Como Ker(f) no tiene dimensión 0, no es inyectiva.
Como Im(f) tiene la misma dimensión que el espacio final $\mathbb{R}^2$, sí es suprayectiva.

b) La matriz de la aplicación es A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de rango 3 (se ve escalonando la matriz).

Esa es la dimensión de Im(f). Entonces:

dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim (espacio inicial)
3 + ? = 3 $\Rightarrow$ dim(Ker(f)) = 0

Como Ker(f) tiene dimensión 0, es inyectiva.
Como Im(f) no tiene la misma dimensión que el espacio final $\mathbb{R}^4$, no es suprayectiva.

c) La matriz de la aplicación es A=$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2. Esta es la dim de Im(f).

Entonces:
dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim (espacio inicial)
2 + ? = 3 $\Rightarrow$ dim(Ker(f)) = 1

Como Ker(f) no tiene dimensión 0, no es inyectiva.

Como Im(f) no tiene la misma dimensión que el espacio final $\mathbb{R}^3$, no es suprayectiva.

d) La matriz de la aplicación es A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ que tiene rango 3. Esta es la dim de Im(f).

Entonces:

dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim (espacio inicial)

3 + ? = 3 $\Rightarrow$ dim(Ker(f)) = 0

Como Ker(f) tiene dimensión 0, es inyectiva.

Como Im(f) tiene la misma dimensión que el espacio final $\mathbb{R}^3$, es suprayectiva.

Por tanto, es biyectiva.

(En efecto, las aplicaciones biyectivas corresponden a una matriz cuadrada regular o inversible, es decir de rango máximo, como en este caso.)

E-5) **a)** Los datos nos proporcionan las columnas de la matriz de la aplicación:

A= $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Así, la imagen de un vector (x_1, x_2, x_3) es $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}$

y la ecuación de la aplicación es $\begin{cases} y_1 = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = 4x_1 + x_2 + 9x_3 \end{cases}$

E-6) **a)** El sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es compatible determinado, tiene como solución **(0,3,1).** Es el único vector cuya imagen es (4,1,3,0) .

b) El sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **, que es compatible indeterminado, tiene como**

solución **{ $(-\lambda, 1+\lambda, \lambda)$: $\lambda \in \mathbb{R}$ }.** Estos son todos los vectores cuya imagen es (1,1).

E-7) **a)** La matriz estándar de f es $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz de f^{-1} es $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

.

La imagen por f^{-1} de un vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x_1-7x_2 \\ -2x_1+5x_2 \end{pmatrix}$ por tanto la

ecuación

de f^{-1} es $\begin{cases} y_1= 3x_1-7x_2 \\ y_2= -2x_1+5x_2 \end{cases}$

E-8) **a)** La matriz estándar de f es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la de g es $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

luego la matriz de h = $g \circ f$ es $B\times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

E-9) Puede resolverse de dos formas:

<u>1ª forma</u>: La matriz de f en bases canónicas es $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz de cambio de la base B a la base canónica en $\mathbb{R}^3$ es $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto la matriz que se pide es

$$A\times P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

<u>2ª forma</u>: La matriz que se pide, tendrá en sus columnas las imágenes de la base B (expresadas en base canónica). Basta por tanto calcular dichas imágenes.

f(1,1,0)=(2,3)
f(0,1,1)=(3,2)
f(0,0,1)=(3,0)

Poniéndolas por columnas se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

E-10) La matriz de f en bases canónicas es A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz de cambio de la base canónica a B' en $\mathbb{R}^2$ es Q^{-1}=$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto la matriz que se pide es

$$Q^{-1} A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & -\mathbf{\frac{3}{2}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

E-11) a) El cambio de base B a la base canónica en $\mathbb{R}^2$ es P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

El cambio de la base canónica a B' en $\mathbb{R}^3$ es Q^{-1}=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz pedida es $Q^{-1}A\,P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{-12} \\ \mathbf{-4} & -\mathbf{\frac{10}{3}} \end{pmatrix}$

b) El cambio de base canónica a la base B en $\mathbb{R}^2$ es P^{-1}=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

El cambio de B' a la base canónica en $\mathbb{R}^3$ es Q=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz pedida es $Q\,M\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-30} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

E-12) a) No, ya que no tienen la misma dimensión, una es 3x2 y la otra es 2x2, por tanto no pueden representar a la misma aplicación lineal.

b) Sí, ya que tienen la misma dimensión, 3x2, y el mismo rango, 2.