ENDOMORFISMOS.
AUTOVECTORES Y DIAGONALIZACIÓN

En lo que resta de este tema, nos centraremos en un tipo especial de aplicaciones lineales: los endomorfismos.

Definición: Endomorfismo.

Se llama endomorfismo a una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V$, en que el espacio inicial y final son el mismo.

La matriz de un endomorfismo es cuadrada nxn, donde n es la dimensión de V.

ENDOMORFISMOS BIYECTIVOS

Observemos que un endomorfismo **ha de ser inyectivo y suprayectivo a la vez, o bien ninguna de las dos cosas**.

Esto se obtiene de la fórmula **dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = n** (siendo n la dimensión del espacio V).

Notemos que si el primer sumando es **n** (suprayectiva), el segundo ha de ser **0** (inyectiva), y viceversa.

Teorema: Caracterización de los endomorfismos biyectivos.

Sea $f: V \longrightarrow V$ y sea A su matriz asociada.

Las siguientes propiedades son todas equivalentes, es decir, si se cumple una, se cumplen todas las demás:

- f es biyectiva
- f es inyectiva
- f es suprayectiva
- rg(f) = n
- rg(A) = n
- det(A) ≠ 0
- f transforma bases en bases
- 0 no es valor propio

(más adelante se verá el significado de esto último)

Ejemplos de endomorfismos biyectivos (es decir, que cumplen todo lo anterior) son las aplicaciones ya vistas: giros, simetrías y homotecias.

Los endomorfismos biyectivos son inversibles, es decir, existe un endomorfismo f^{-1} que “deshace” lo hecho por f. Si la matriz de f es A, la matriz de f^{-1} es su inversa, A^{-1}.

Aplicándolo a los ejemplos geométricos que se vieron en el tema de Aplicaciones Lineales:

- Si A es la matriz de un giro de ángulo 45º en sentido horario, A^{-1} será la matriz de un giro de 45º en sentido antihorario (movimiento contrario al anterior).

- Si A es la matriz de una homotecia de razón 2, que duplica todos los vectores, A^{-1} será la matriz de una homotecia de razón ½, que los reduce a la mitad.

- Si A es la matriz de una simetría, la inversa de A será la propia A, ya que el movimiento contrario a una simetría es efectuar otra vez la misma simetría.

- Veamos qué sucede si A es la matriz de una proyección, que lleva todos los vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ a un cierto plano, sobre el que proyectamos (como si fuese un objeto produciendo sombra). Por ejemplo la proyección "en planta" sobre el plano XY:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,0) \end{array}$$

Su matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que no tiene inversa. En efecto, la proyección es un endomorfismo no inversible. Esto se debe a que distintos vectores se proyectan sobre el mismo: tanto (1,2,3) como (1,2,5) o (1,2,9) se proyectan sobre (1,2,0). Por esto la transformación no se puede deshacer, porque una vez que hemos proyectado un vector, no sabemos cuál era el original. Esto se traduce en que la matriz tiene determinante cero y por tanto no es inversible.

SEMEJANZA DE MATRICES

Cuando aplicamos a endomorfismos el concepto de "matriz en distintas bases", visto para aplicaciones lineales, utilizaremos siempre la misma base B en el espacio inicial y final:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{f}"] & \mathbf{V} \\ \text{b. canónica} \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[d, shift right, "\mathbf{P^{-1}}"'] & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "\mathbf{P^{-1}}"'] \\ \text{base } B \arrow[r, "\mathbf{M}"] \arrow[u, shift right, "\mathbf{P}"'] & \text{base } B \arrow[u, shift right, "\mathbf{P}"'] \end{tikzcd}$$

- A es la matriz de f en base canónica

- P es la matriz de cambio de base: de la base B a la canónica

- M es la matriz de f en base *B*

Entonces, $\boxed{\mathbf{M = P^{-1} A P}}$

Esto nos lleva a la siguiente

<u>Definición: Matrices semejantes.</u>

Se dice que dos matrices cuadradas A y B son <u>semejantes</u> si son matrices del mismo endomorfismo en distintas bases.

También se puede expresar así: A y B son semejantes si existe una matriz cuadrada inversible P tal que $\mathbf{B = P^{-1} A P}$ **.**

- Notar que el concepto de equivalencia de matrices es más amplio que el de semejanza. Si dos matrices son semejantes entonces son equivalentes, pero no al revés.

En este tema se tratará de ver, dada una matriz, **si existe otra matriz semejante a ella que sea diagonal: P^{-1} A P = D,** y en ese caso calcular la diagonal D y la matriz de paso P.

En otras palabras: dado un endomorfismo, trataremos de encontrar una base en la cual la matriz del endomorfismo sea sencilla (diagonal si es posible).

Para ello se utilizarán los **valores y vectores propios**.

VALORES Y VECTORES PROPIOS.

En un endomorfismo, dado que el espacio inicial y el final son el mismo, podemos comparar un vector **v** con su imagen **f(v)**, y ver si es múltiplo suyo.

Definición.

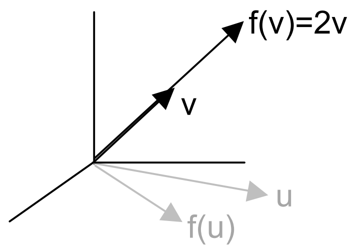
Si un vector v (no nulo) cumple que su imagen es múltiplo suyo, es decir, si

$$\mathbf{f\ (v) = \lambda v}$$

con λ escalar, se dice que v es un vector propio (o autovector) de f, y que λ es su valor propio (o autovalor) asociado.

Además, si λ es un valor propio, todos sus vectores propios asociados forman un subespacio. Se llama subespacio propio (o autoespacio) asociado a λ, y se denota por V_{λ}.

Geométricamente: un autovector es aquel que, al aplicarle el endomorfismo, **permanece sobre la misma recta**. Es decir, no cambia de dirección (aunque sí puede cambiar de sentido y/o de módulo).



En la figura, v es autovector, ya que se transforma en un múltiplo suyo (no cambia de dirección al aplicar f)
Pero u no es autovector, ya que cambia de dirección al aplicarle f.

Como ejemplo, los autovectores de autovalor 1 son los que no varían por el endomorfismo: **v** se transforma en el mismo vector, 1 **v** = **v** . Por otra parte, los autovectores de autovalor –1 son los que cambian de sentido pero no de módulo: **v** se transforma en (–1) **v** = –**v**

La noción de autovalores y autovectores fue introducida por el matemático alemán David Hilbert a principios del siglo XX. Siguiendo la denominación original, en inglés se llaman **eigenvalues** y **eigenvectors**.

Ejemplos.

1) En una homotecia $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x,\ 2y) \end{array}$ todos los vectores son vectores propios, y su valor propio es 2, ya que cualquier vector v queda transformado en 2v. La homotecia de razón 2 duplica todos los vectores, manteniéndolos en la misma dirección que tenían.

2) Consideremos una simetría respecto al plano XZ, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,-y,z) \end{array}$

- Observar que todos los vectores de la forma $(\alpha,0,\beta)$ quedan transformados en sí mismos (es decir, multiplicados por 1). Por tanto 1 es valor propio, con vectores propios los de la forma $(\alpha,0,\beta)$

- Observar que los vectores de la forma $(0,\gamma,0)$ quedan transformados en $(0,-\gamma,0)$, es decir, multiplicados por –1. Por tanto –1 también es valor propio, con vectores propios los de la forma $(0,\gamma,0)$.

Es decir, el plano XZ que actúa como "espejo" de la simetría queda fijo. Por eso está formado por autovectores de valor propio 1. Por el contrario, el eje Y, que es perpendicular al "espejo", queda invertido y por eso está formado por autovectores de autovalor –1.

3) En un giro de 45º, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y,\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right) \end{array}$ no hay valores ni vectores propios, ya que ningún vector (no nulo) queda transformado en un múltiplo de sí mismo: todos cambian de dirección con el giro.

Propiedades.

1. Si los valores propios de A son $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ entonces los de αA son $\alpha\lambda_1,\ldots,\alpha\lambda_n$. Los vectores propios de αA son los mismos que los de A.

Esto se debe a que αA consiste en efectuar el endomorfismo y además multiplicar todo por α. Por tanto cada autovector se multiplica por su autovalor λ y también por α, es decir, se multiplica por $\alpha\lambda$.

2. Si los valores propios de A son $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ entonces los de A^k son $\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k$. Los vectores propios de A^k son los mismos que los de A.

Esto se debe a que A^k consiste en efectuar el endomorfismo k veces. Por tanto cada autovector se multiplica k veces por su autovalor λ, es decir, se multiplica por λ^k

3. Si los valores propios de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y si A tiene inversa, entonces los valores propios de A^{-1} son $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$. Los vectores propios de A^{-1} son los mismos que los de A.

Esto se debe a que A^{-1} deshace lo hecho por A. Por tanto, si A multiplica cada autovector por su autovalor λ, el endomorfismo inverso multiplica dicho autovector por $1/\lambda$. (Obviamente se requiere que todos los autovalores sean distintos de 0, pero ocurre que si 0 es autovalor la matriz no tiene inversa).

Cálculo de los valores y vectores propios.

¿Cómo encontrar escalares λ y vectores **v** que verifiquen **f(v) =** $\boldsymbol{\lambda}$**v** ?

Veámoslo con un ejemplo.

Sea $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y,\ y) \end{array}$ cuya matriz es $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La búsqueda de vectores propios parte de la ecuación **f(v) =** $\boldsymbol{\lambda}$**v**, es decir, **Av =** $\boldsymbol{\lambda}$**v.**

Por tanto planteamos la ecuación Av = λv, que es $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Esto también podemos escribirlo como $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

para poder pasar todo al miembro izquierdo,

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que es una ecuación equivalente a la primera, **f(v)=** $\boldsymbol{\lambda}$**v**, es decir, los vectores **v=(x,y)** no nulos que la verifiquen, serán vectores propios, y los $\boldsymbol{\lambda}$ serán los valores propios.

Para la mayoría de los valores de λ, este sistema será compatible determinado (rango 2), y por tanto no tendrá más soluciones que x=0, y=0. Estos valores de λ **no** son valores propios.

Sin embargo, para algunos valores de λ, el sistema será compatible indeterminado y por tanto existirán soluciones no nulas del sistema: es decir, vectores no nulos tales que f(v)=λv.

Estos valores de λ, que hacen el sistema <u>compatible indeterminado</u>, son los valores propios. Las soluciones v de este sistema para cada λ, son los vectores propios.

¿Cuándo el sistema será compatible indeterminado? Esto ocurrirá cuando la matriz del sistema tenga determinante nulo, ya que entonces su rango no será completo. Planteamos entonces

det $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ = 0.

es decir $(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$

lo que se cumple sólo para los valores λ=1, λ=3. Estos son los valores propios.

Ahora calculamos los vectores propios resolviendo el sistema

A v = λ v

para los autovalores λ que ya hemos calculado.

Este sistema, según los cálculos anteriores, se traduce en

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para λ=1 y para λ=3.

Recordemos que el sistema ha de ser compatible indeterminado.

<u>λ=1 :</u>

El sistema a resolver es A v = 1 v, que se traduce en

$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ haciendo λ=1

Es decir

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuya solución son los vectores (α,–α).

Por tanto, estos son los vectores propios de valor propio 1. El subespacio que forman es V_1.

Una base de V_1 es (1,–1).

<u>λ=3 :</u>

El sistema a resolver es A v = 3 v, que se traduce en

$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ haciendo λ=3

Es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ cuya solución son los vectores $(\mu,0)$.

Por tanto, estos son los vectores propios de valor propio 3. El subespacio que forman es V_3. Una base de V_3 es (1,0).

Procedemos a resumir este método para cualquier matriz A cuadrada, de dimensión n.

<u>Método general para calcular los valores y vectores propios :</u>

1. Calcular el determinante **det(A – λ I)**, que será un polinomio de grado n, en la indeterminada λ. Se llama **<u>polinomio característico</u>** de A.

(Nota: También es posible definirlo como **det(λ I – A).** *Aunque se obtenga un polinomio cambiado de signo, sus raíces son las mismas y eso es lo que nos interesará.)*

2. Hallar las raíces de dicho polinomio. Estos serán los valores propios. Se puede mencionar su multiplicidad (es decir, si son simples, dobles, triples…)

Nota. La "multiplicidad" de una raíz a en un polinomio es el exponente con que aparece el factor (x-a). *Por ejemplo, en* $(x-4)^3(x+5)$, *la raíz 4 tiene multiplicidad 3, o es triple, y la raíz –5 tiene multiplicidad 1, o es simple).*

3. Para cada valor propio **λ,** resolver el sistema $(A-\lambda I)\,\vec{x}=\vec{0}$ (que será compatible indeterminado), la solución será el subespacio propio asociado a λ.

<u>Observación.</u>

Vista la forma de calcular los valores propios, de ello se deducen algunas propiedades más:

1. Los valores propios de una matriz diagonal o triangular, son sus elementos diagonales.

Al calcular el polinomio característico, nos daremos cuenta de que directamente sale factorizado con factores de la forma $(a-\lambda)$, *donde a es un elemento de la diagonal.*

2. Los valores propios de A son los mismos que los de su traspuesta.

Al calcular el polinomio característico, nos daremos cuenta de que se obtiene el mismo polinomio para A que para At, y por tanto los mismos valores propios. Pero los vectores propios son distintos, ya que los sistemas a resolver son distintos.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Partimos de A, la matriz de un endomorfismo f en base canónica.

Nuestro propósito era encontrar otra base, en que la matriz de f fuese diagonal. Esto es interesante porque hacer cálculos con matrices diagonales es más fácil y rápido, además de que ocupan menor memoria en los sistemas informáticos, etc (al tener solo n entradas no nulas)

Pues bien,

Si B es una base formada por vectores propios, la matriz en base B es diagonal.

En efecto, hemos visto que los vectores propios conservan su dirección cuando se les aplica el endomorfismo. Por ello, podemos considerar que los vectores propios marcan las direcciones principales a lo largo de las cuales actúa el endomorfismo, conservando fijas dichas direcciones. Por eso la matriz en una base de vectores propios es más sencilla.

Veámoslo con el ejemplo anterior:

Hemos encontrado los vectores propios u=(1,–1) y v=(1,0), correspondientes a los dos valores propios. Con estos dos vectores, como son linealmente independientes, se forma una base de $\mathbb{R}^2$, B={ (1,–1) , (1,0) }.

Hallemos la matriz de f en esta base y comprobaremos que efectivamente es diagonal.

Recordemos la definición de la matriz de f en base **B** (la misma base en el espacio inicial y final):

Hay que poner en las columnas las imágenes de los vectores de la base **B***, expresadas en coordenadas respecto de la base* **B***.*

Ahora bien, sabemos que los vectores de la base, **u** y **v**, son vectores propios: por tanto conocemos su imagen, que es un múltiplo suyo.

f(**u**) = 1·**u** (ya que **u** es vector propio de valor propio 1).

f(**v**) = 3·**v** (ya que **v** es vector propio de valor propio 3).

Ahora hay que expresar estas imágenes en coordenadas respecto de la misma base **B**, es decir, expresarlas como combinación lineal de **u** y **v**. Es fácil:

f(**u**) = 1·**u** se expresa como 1·**u** + 0·**v** → coordenadas (1,0) → 1ª columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

f(**v**) = 3·**v** se expresa como 0·**u** + 3·**v** → coordenadas (0,3) → 2ª columna $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Así ya podemos formar la matriz D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, que efectivamente es diagonal.

Los elementos de la diagonal son precisamente los valores propios, 1 y 3 en este caso.

Además se cumplirá el siguiente esquema:

$$\boxed{\mathbf{P^{-1}\,A\,P = D}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{f}"] & \mathbf{V} \\ \text{b. canónica} \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[d, shift right, "\mathbf{P^{-1}}"'] & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "\mathbf{P^{-1}}"'] \\ \text{base } B \arrow[r, "\mathbf{D}"] \arrow[u, shift right, "\mathbf{P}"'] & \text{base } B \arrow[u, shift right, "\mathbf{P}"'] \end{tikzcd}$$

donde:

- A es la matriz de f en base canónica, que ya conocíamos: A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es la diagonal de los valores propios.

- P es la matriz de cambio de la base **B** a la canónica; por tanto tendrá en sus columnas los vectores de **B** expresados en base canónica:

P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (es decir, P tiene en sus columnas los vectores propios **u**, **v**).

Planteándolo en general,

<u>Diagonalizar</u> una matriz cuadrada A es encontrar una diagonal D semejante a A.

Interpretando A como la matriz de un endomorfismo f, se trata de encontrar una base en la cual la matriz de f sea una diagonal D.

Para ello tendremos que hallar los valores y vectores propios de f. Así,

- **La diagonal D será la diagonal de los valores propios.**
- **La base en cuestión será la base formada por los vectores propios.**
- **Poniendo los vectores propios en columna, se obtiene P tal que P^{-1} A P = D.**

Pero atención: <u>esto no es posible para todas las matrices</u>. Si la construcción anterior es posible, diremos que **<u>A es diagonalizable</u>**.

Para ver si A es diagonalizable, habrá que ver si se puede formar la base de vectores propios. Es decir, habrá que ver si, uniendo las bases de los distintos subespacios propios, “hay suficientes vectores” como para formar con ellos una base del espacio total V.

Y esto ocurrirá **<u>si la suma de las dimensiones de los subespacios propios es igual a la dimensión total.</u>**

$$\boxed{\textbf{A es diagonalizable}} \Leftrightarrow \boxed{\dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim(V_{\lambda_r}) = n}$$

Para que ocurra esto, cada autovalor deberá proporcionar tantos autovectores independientes como indica su multiplicidad. Es decir, si un autovalor es doble deberá proporcionar dos autovectores independientes; si es triple tres, etc. De lo contrario no habrá “suficientes” para formar una base.

Veamos cómo hallar esas dimensiones.

<u>Dimensión de los subespacios propios:</u>

Observemos que V_λ es el subespacio solución de un sistema compatible indeterminado,cuya matriz es $A - \lambda I$.

Por tanto, la dimensión del espacio solución (es decir, el número de parámetros del sistema) es igual al número de incógnitas menos el rango de la matriz del sistema:

$$\boxed{\dim(V_\lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I)}$$

También nos pueden ayudar los siguientes resultados: La dimensión de V_λ,

a) no puede ser cero (pues debe contener algún autovector no nulo),

b) está comprendida entre 1 y la multiplicidad de λ en el polinomio característico:

$$1 \leq \dim(V_\lambda) \leq \text{mult}(\lambda)$$

Esto es útil para los λ de multiplicidad 1, pues $\dim(V_\lambda)$ está comprendida entre 1 y 1 , por tanto es $\dim(V_\lambda)=1$ sin tener que calcular el rango de la matriz.

Método general para diagonalizar matrices.

Dada una matriz cuadrada A de tamaño nxn, o equivalentemente el endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$:

A) Ver si es diagonalizable.

1) Calcular el polinomio característico y hallar los valores propios.

2) Para cada valor propio λ, calcular la dimensión del subespacio propio V_λ

3) Sumar las dimensiones de todos los V_λ. Si la suma es n, la matriz (o el endomorfismo) es diagonalizable. En caso contrario no es diagonalizable, y hemos terminado.

B) Diagonalizar, en el caso de que sea diagonalizable.

1) Hallar los vectores propios, resolviendo el sistema correspondiente para cada valor propio.

2) Hallar una base de cada subespacio propio, y unirlas todas para formar una base de vectores propios del espacio total $\mathbb{R}^n$.

3) La matriz P es la que contiene en sus columnas la base de vectores propios.

4) La matriz D es la diagonal de los valores propios.

Para que D sea nxn se necesitarán n valores propios, así que en la diagonal habrá que repetir cada valor propio λ tantas veces como indique $\dim(V_\lambda)$. Además ha de respetarse un mismo orden al colocar los valores propios en D y los vectores propios en las columnas de P.

5) Todo lo anterior garantiza que se cumple $\mathbf{P^{-1}\, A\, P = D}$, lo cual es la diagonalización de A.

Ejemplos.

1) Veamos si es diagonalizable la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

El polinomio característico es $\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18$ que factoriza como $(\lambda-2)\,(\lambda-3)^2$. Por tanto, sus raíces son $\lambda=2$ (simple), $\lambda=3$ (doble).

Estos son los valores propios.

Para ver si es diagonalizable, hallemos las dimensiones de los subespacios V_2, V_3 :

$$\dim(V_2) = 3 - \mathrm{rg}(A-2I) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

(o también, $\mathbf{\dim(V_2)=1}$ directamente porque $\lambda=2$ tiene multiplicidad 1)

$$\dim(V_3) = 3 - rg(A-3I) = 3 - rg\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

La suma de ambas dimensiones es 1+1=2, no es igual a la dimensión total 3.

Por tanto, **<u>A no es diagonalizable</u>**.

2) Veamos si es diagonalizable el siguiente endomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-4y, -y, 2y+z) \end{array}$$

Ello se refiere a diagonalizar la matriz de f en base canónica, $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Para ver si es diagonalizable, hallamos sus valores propios. El polinomio característico es

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2\,(-1-\lambda)$$

Valores propios: λ =1 doble, λ = –1 simple.

Como λ = –1 es simple (multiplicidad 1), ya sabemos que $\dim(V_{-1}) = 1$. Hallemos $\dim(V_1)$.

$$\dim(V_1) = 3 - rg(A - I) = 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

La suma de ambas dimensiones es 1+2 = 3, la dimensión del espacio total $\mathbb{R}^3$.

Por tanto, **A** (o el endomorfismo **f**) **<u>es diagonalizable</u>**.

Para diagonalizar, calculamos los subespacios propios, resolviendo los sistemas

$(A-\lambda I)\,\vec{x} = \vec{0}$ para λ =1 y para λ = –1.

<u>λ = 1 :</u>

El sistema es $(A - I)\,\vec{x} = \vec{0}$, es decir, $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ solución $(\alpha, 0, \beta)$

Base de V_1 : { (1,0,0) , (0,0,1) } (notar que efectivamente se obtiene un espacio de dimensión 2)

$\lambda = -1$:

El sistema es $(A + I)\,\vec{x} = \vec{0}$, es decir, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → solución $(2\gamma, \gamma, \gamma)$

Base de V_{-1} : { (2,1,1) } (notar que efectivamente es un espacio de dimensión 1)

Así pues, la base de vectores propios se forma uniendo las bases de V_1 y V_{-1} :

B= { (1,0,0) , (0,0,1), (2,1,1) }

Poniendo esta base en columnas se obtiene la P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Y la diagonal se forma con los valores propios 1 doble y –1 simple: D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(Notar que ha de respetarse un mismo orden al colocar los valores y los vectores propios).

Así pues, la diagonalización es $P^{-1} A P = D$, es decir,

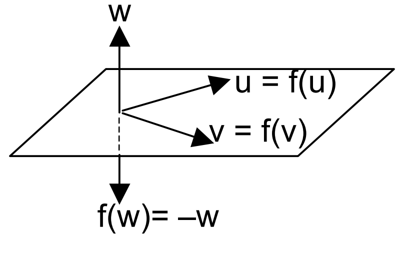
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Compruébese la igualdad. Puede hacerse fácilmente, viendo que AP=PD).

La interpretación geométrica de este ejemplo es la siguiente: eligiendo una base adecuada , la base **B** = {u, v, w} de vectores propios, el endomorfismo f toma una forma "sencilla":

- el primer vector de la base, al aplicarle f queda como está (es de valor propio 1) : **f(u) = u**
- lo mismo para el segundo, v , también de valor propio 1 : **f(v) = v**
- el tercero, w , queda convertido en su opuesto (es de valor propio –1): **f(w) = – w**

Esto nos permite saber que f es en realidad una simetría, con plano de simetría dado por u y v, que actúa como un "espejo".



Al ver la forma original de la matriz, dada en base canónica, no era evidente cuál era el comportamiento geométrico de f. Ahora, trabajando en base **B** = {u, v, w}, sí está claro y además la matriz de f es más sencilla.

Teorema: Matrices reales simétricas.

Toda matriz real simétrica es diagonalizable, y todos sus valores propios son reales.

Por tanto si la matriz es real simétrica, no hace falta comprobar que es diagonalizable.

(Además, una vez estudiado el tema del Espacio Euclídeo, se podrá ver que en una matriz simétrica los subrespacios propios son todos ortogonales entre sí).

Uso de la diagonalización para calcular potencias de una matriz.

Supongamos que queremos calcular la potencia A^n de una matriz. Esto puede llevar una gran cantidad de operaciones.

Pero si la matriz A es diagonalizable, el cálculo se facilita notablemente.

En ese caso, diagonalizando la matriz tendremos $P^{-1}AP = D$, por tanto $A = PDP^{-1}$.

Entonces,

$$A^n = A\cdots A = P\,DP^{-1}\,PDP^{-1}\cdots\,PDP^{-1} = PD\cdots D\,P^{-1} = PD^nP^{-1}$$

es decir,

$$\boxed{\mathbf{A^n = PD^nP^{-1}}}$$

lo cual es muy fácil de calcular teniendo en cuenta que para hallar la potencia D^n basta elevar a la potencia n cada elemento diagonal.

Ejemplo

Hemos obtenido anteriormente la diagonalización de la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$P^{-1}AP = D$, por tanto $A= PDP^{-1}$, donde $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos entonces A^9.

$$A^9= P\,D^9\,P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1^9 & 0 \\ 0 & 3^9 \end{pmatrix}P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 19683 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 19683 & 19682 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EL CÁLCULO DE VECTORES PROPIOS</u>

<u>1. Círculos de Gershgorin.</u>

Este resultado permite localizar una zona del plano complejo (o de la recta real) en la que se encuentran los valores propios, y así acotarlos entre ciertos límites:

Dada una matriz A de tamaño nxn, se pueden dibujar en el plano complejo n círculos, uno por cada fila de la matriz, de la siguiente manera:

- Centro: el elemento diagonal de la fila
- Radio: la suma de los valores absolutos de los demás elementos de la fila

Entonces, **todo valor propio de A se encuentra contenido en alguno de los círculos, incluido el borde.**

- Si trabajamos en $\mathcal{R}$, podemos considerar sólo la parte real de los círculos, resultando entonces unos intervalos en la recta real.

<u>2. Método de las potencias.</u>

Se trata de un método iterativo para calcular el valor propio dominante (es decir, de mayor valor absoluto) de una matriz, así como su vector propio asociado.

Hay dos condiciones para asegurar la convergencia de este método :

1) Que haya <u>un único</u> valor propio de mayor valor absoluto *(p. ej. no se podría aplicar a una matriz cuyos valores propios fueran –5,1,5).* Este valor propio será el que calcularemos.

2) Que dicho valor tenga asociado un <u>subespacio propio de dimensión 1</u>, por tanto generado por un solo vector propio. Este vector propio será el que calcularemos.

En estas condiciones, el método se desarrolla de la siguiente manera:

1. Partir de un vector cualquiera (no nulo), v_0.
2. Calcular $u_1 = A\, v_0$.
3. Anotar σ_1 = la componente de mayor valor absoluto de A.
4. Dividir u_1 por la componente σ_1 : $v_1 = \dfrac{u_1}{\sigma_1}$
5. Iterar desde el paso 2:   v2 = A v1 , etc.

Entonces, los vectores v_i **convergen al vector propio** buscado, mientras que la componente de mayor valor absoluto σ_i **converge al valor propio**.

Se puede detener el proceso cuando dos iteraciones sucesivas sean iguales, o difieran en menos de una cantidad previamente estip ulada (una milésima, una diezmilésima...)

Ejemplo

Calculemos el valor propio dominante y su vector propio asociado, para A= $\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$

Partimos del vector v_0 = (1,0). Hemos trabajado con 4 cifras significativas.

Nº iteración	u_i	σ_i	$v_i = \frac{u_i}{\sigma_i}$
0	(1,0)	1	(1,0)
1	(–4,–6)	–6	(0.6667, 1)
2	(9.333, 10)	10	(0.9333, 1)
3	(8.2667,8.4)	8.4	(0.9841,1)
...	...	...	...
8	...	8	(1,1)
9	(8,8)	8	(1,1)

Como los vectores v_8 , v_9 ya son iguales, el proceso ya ha convergido, siendo 8 el valor propio dominante, y (1,1) su vector propio asociado.