BASES Y DIMENSIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES.

Definición: Base. Se llama base de un espacio (o subespacio) vectorial a un conjunto linealmente independiente que sea a la vez sistema generador de dicho espacio o subespacio.

- Por tanto, la dimensión es *el máximo número de vectores linealmente independientes* que podemos tener en el espacio o subespacio.

  En otras palabras, es el *máximo rango* que puede tener un conjunto de vectores de dicho espacio.

  Es también el rango de cualquier sistema generador de dicho espacio.

Propiedades de las bases.

1. Una base de S es un sistema generador minimal de S (lo más pequeño posible).

2. Además es un conjunto independiente maximal dentro de S (lo más grande posible).

3. Una base de S permite expresar todos los vectores de S como combinación lineal de ella, de manera única para cada vector.

Ejemplos de bases.

1. La base canónica de $\mathbb{R}^n$:

$e_1 = (1,0,\dots,0)$
$e_2 = (0,1,\dots,0)$
....
$e_n = (0,0,\dots,1)$

- Son linealmente independientes porque forman un determinante no nulo.

- Son sistema generador de $\mathbb{R}^n$ porque todo vector $(a_1,a_2,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar como combinación lineal de ellos:

$$(a_1,a_2,\dots,a_n) = a_1(1,0,\dots,0) + a_2(0,1,\dots,0) + \dots + a_n(0,0,\dots,1)$$

2. Otra base de $\mathbb{R}^3$ distinta de la canónica: (1,0,0), (1,1,0), (0,2,-3).

- Son linealmente independientes porque forman un determinante no nulo.

- Son sistema generador de $\mathbb{R}^3$ porque cualquier vector (a,b,c) se puede poner como combinación lineal de ellos. En efecto, dado (a,b,c), buscamos α, β, γ que satisfagan

$$(a,b,c) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,2,-3)$$

Se obtiene un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = a \\ \beta + 2\gamma = b \\ -3\gamma = c \end{array}\right\}$$

en las incógnitas α, β, γ, que es compatible determinado para cualesquiera a, b, c.

3. (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) en $\mathbb{R}^3$ no forman base porque no son linealmente independientes (su determinante es nulo).

4. Base de un subespacio. En $\mathbb{R}^3$, consideremos el subespacio S= plano XY. Veamos que los vectores (3,2,0) , (1,–1,0) forman una base de S.

- Son linealmente independientes, porque uno no es múltiplo del otro.

- Son un sistema generador de S: Dado un vector genérico de S, de la forma (a,b,0), lo podemos poner como combinación lineal de (3,2,0) y (1,–1,0). Para ello, buscamos α, β que cumplan:

$$(a,b,0) = \alpha(3,2,0) + \beta\ (1,-1,0) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 3\alpha+\beta = a \\ 2\alpha-\beta = b \end{array}\right\} \quad \text{S. C. D. para cualesquiera a,b.}$$

5. Extender un conjunto para que forme base. ¿Es (1,0,2), (1,0,–1) base de $\mathbb{R}^3$?

- Son linealmente independientes, porque uno no es múltiplo del otro.

- Pero no son un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, porque no es cierto que todo vector de $\mathbb{R}^3$ pueda ponerse como combinación lineal de ellos. Por ejemplo, el (0,1,0) no se puede poner (resulta un sistema incompatible).

Por tanto no son base de $\mathbb{R}^3$. ¿Puede obtenerse una base de $\mathbb{R}^3$ de algún modo?

Sí, añadiendo algún otro vector de manera que siga siendo independiente de los anteriores, por ejemplo (0,1,0). Así el conjunto (1,0,2), (1,0,–1), (0,1,0) es linealmente independiente, y genera $\mathbb{R}^3$, por tanto es base de $\mathbb{R}^3$.

6. Reducir un conjunto para que forme base. ¿Es (2,0,0), (0,3,0), (4,1,0) base de S=plano XY de $\mathbb{R}^3$?

- Son un sistema generador de S, pero no son independientes (su determinante es nulo).

Por tanto no son base de S. ¿Puede obtenerse una base de S de algún modo?

Sí. Uno de los vectores es combinación lineal de los demás: (4,1,0)=2·(2,0,0) + $\frac{1}{3}$ · (0,3,0).

Suprimimos por tanto (4,1,0) y los restantes vectores (2,0,0), (0,3,0) siguen generando el mismo subespacio S y son independientes. Son por tanto base de S.

Teorema y definición: Dimensión.

Todas las bases de un mismo espacio o subespacio tienen el mismo número de vectores. Se llama dimensión de dicho espacio o subespacio.

Ejemplos de dimensión.

1. $\Re^n$ tiene dimensión n, pues tiene una base de n elementos (p.ej. la canónica).

2. $\mathbf{M}_{2x2}$= {matrices 2x2 con términos reales} tiene dimensión 4. Una base de $\mathbf{M}_{2x2}$ es:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

3. $\mathbf{P}_2$= {polinomios de grado $\leq$ 2 con coeficientes reales} tiene dimensión 3. Una base de $\mathbf{P}_2$ es, por ejemplo, la formada por los tres polinomios siguientes:

$1+0x+0x^2$, $0+x+0x^2$, $0+0x+x^2$ (es decir, los polinomios 1, x, x^2).

Otra base: $1+2x+3x^2$, $4+x^2$, $3–x–5x^2$.

Propiedades de la dimensión.

1. Significado físico de la dimensión: los planos tienen dimensión 2, las rectas dimensión 1, el punto dimensión 0. El subespacio {0} es el único que tiene dimensión 0.

2. La dimensión de un subespacio en $\mathbb{R}^n$, coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica.

3. Si S y T son subespacios y S está contenido en T, entonces dim S $\leq$ dim T.

Además, si se da la igualdad, dim S = dim T, ambos espacios han de coincidir.

4. El rango de una familia de vectores, es igual a la dimensión del subespacio que generan.

Es decir: si $v_1, v_2, \ldots v_n$ generan un cierto subespacio S, y si el rango de dicho conjunto es r, entonces dim S = r.

(Si un cierto conjunto de vectores tienen rango 2, entonces generan un plano; etc.)

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^3$, sea S el subespacio generado por: (1,0,2), (0,–1,–2), (3,3,3), (2,2,0).

Observamos que el rango de este conjunto (= rango de la matriz que forman, por filas o por columnas) es 3. Así por la propiedad **4** , tenemos que dim S = 3. Pero como estamos en $\mathbb{R}^3$, por la propiedad **3** ha de ser S=$\mathbb{R}^3$.

Teorema.

Sea S un espacio o subespacio de dimensión **m**. Entonces,

- Si tenemos **m** vectores linealmente indep. en S, también serán sistema generador de S.
- Si tenemos **m** vectores que generan S, también serán linealmente independientes.

Por tanto, si tenemos un conjunto formado por tantos vectores como indica la dimensión, dichos vectores serán a la vez linealmente independientes y sistema generador, o bien ninguna de las dos cosas.

Así pues, para probar que son base, bastaría probar solamente una de las dos cosas: que son linealmente independientes, o que son sistema generador.

<u>Esto solamente se puede aplicar cuando conocemos la dimensión del espacio y cuando tenemos tantos vectores como indica la dimensión.</u>

<u>Teorema</u>. En un espacio o subespacio de dimensión **m**,

- un conjunto de más de **m** vectores nunca puede ser linealmente independiente.
- un conjunto de menos de **m** vectores nunca puede ser sistema generador.

Así pues, por ejemplo, 3 vectores en $\mathbb{R}^2$ podrán ser o no sistema generador de $\mathbb{R}^2$, pero nunca podrán ser linealmente independientes.

Del mismo modo, 2 vectores en $\mathbb{R}^3$ podrán ser linealmente independientes o no, pero nunca serán sistema generador de $\mathbb{R}^3$ (aunque sí podrán serlo de un subespacio más pequeño).

IMPLICITACIÓN

Vimos ya las formas implícita y paramétrica de subespacios; el paso **de la forma implícita a la paramétrica** es sencillo pues se reduce a resolver un sistema de ecuaciones.

El paso inverso, **de la paramétrica a la implícita**, puede explicarse ahora a la luz de los conocimientos que ya tenemos. Podrá hacerse de dos formas; veámoslo con unos ejemplos.

1) <u>Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(\alpha, \beta, 3\alpha-5\beta)$ } de $\mathbb{R}^3$</u>.

<u>1ª forma</u>. Veamos primero cuántas ecuaciones implícitas son necesarias. La forma paramétrica tiene dos parámetros libres. Entonces,

nº ecuaciones	+	nº parámetros libres (es decir, dim S)	=	3 (en $\mathbb{R}^3$)
1	+	2	=	3

Hace falta, por tanto, **1 ecuación implícita**. Tratemos de buscar <u>una</u> relación entre las coordenadas x,y,z del vector genérico $(\alpha, \beta, 3\alpha-5\beta)$

Observamos que *la tercera coordena*da es *tres veces la primera menos cinco veces la segunda*. Así, la relación es **z = 3x - 5y.** Esta es la forma implícita.

(<u>Nota</u>: las ecuaciones implícitas nunca pueden tener término independiente, pues siempre ha de satisfacerlas el vector cero).

<u>2ª forma</u>. Obtenemos una base de S:

$(\alpha, \beta, 3\alpha-5\beta) = \alpha(1,0,3) + \beta(0,1,-5)$ $\rightarrow$ sistema generador (1,0,3), (0,1,-5).

y son linealmente independientes: rg$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$=2, luego son base. *(Por tanto dimS = 2).*

Ahora, un vector (x,y,z) de $\Re^3$ pertenecerá a S si es combinación lineal de (1,0,3), (0,1,-5) : por tanto si al añadirlo a ellos, el rango no aumenta y sigue siendo 2.

Debe ser rg$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix}$**=2.** Escalonamos esta matriz para ver su rango.

(Notar que el hecho de que sus términos sean incógnitas no impide en absoluto efectuar operaciones elementales en las filas, como en cualquier matriz numérica.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 5 & z-3x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3x+5y \end{pmatrix}$$

Las dos primeras filas de la matriz son no nulas, así que el rango será 2 cuando la tercera fila sea nula, es decir, cuando **z - 3x + 5y = 0.** Esta es la forma implícita buscada. Notar que es la misma que se obtuvo en la 1ª forma.

<u>Otra variante de esta 2ª forma</u>: como la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix}$ es cuadrada, podemos también hallar su determinante, que resulta ser **z - 3x + 5y .** Cuando el determinante sea nulo, el rango de la matriz es 2. Se obtiene así también la misma ecuación implícita.

2) <u>Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(\alpha, \beta, 2\alpha+\beta, -\alpha+3\beta)$ } de $\mathbb{R}^4$</u>.

<u>1ª forma</u>. nº ecuaciones + nº parámetros libres (es decir, dim S) = 4 (en $\mathbb{R}^4$)

2 + 2 = 4

Hacen falta, por tanto, **2 ecuaciones implícitas**. Tratemos de buscar <u>dos</u> relaciones entre las coordenadas x,y,z,t del vector genérico $(\alpha, \beta, 2\alpha+\beta, -\alpha+3\beta)$

Estas dos relaciones son “claramente” **z = 2x + y ; t = -x + 3y.**

Así pues, esta es la forma implícita.

(<u>Nota</u>: La forma implícita no es única. Otra posibilidad es: **z = 2x + y ; z + 2t = 7y** *por ejemplo.)*

<u>2ª forma</u>. Obtenemos una base de S:

$(\alpha,\beta,2\alpha+\beta,-\alpha+3\beta)=\alpha(1,0,2,-1)+\beta(0,1,1,3)$

y son linealmente independientes: $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=2$, luego son base. *(Por tanto dimS = 2).*

Un vector (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$ pertenecerá a S si es combinación lineal de $(1,0,2,-1),(0,1,1,3)$, por tanto si al añadirlo a ellos, el rango no aumenta y sigue siendo 2.

Debe ser $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$**=2.** Escalonamos esta matriz para ver su rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-2x \\ 0 & 3 & t+x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-2x-y \\ 0 & 0 & t+x-3y \end{pmatrix}$$

Las dos primeras filas de la matriz son no nulas, así que el rango será 2 cuando la tercera y cuarta filas sean nulas, es decir, cuando **z – 2x – y = 0 ; t + x – 3y = 0.** Estas son las ecuaciones implícitas buscadas. Notar que son las mismas que se obtuvieron en la 1ª forma.

3) <u>Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$ } de $\mathbb{R}^3$.</u>

<u>1ª forma</u>. nº ecuaciones + nº parámetros libres (es decir, dim S) = 3 (en $\mathbb{R}^3$)

2 + 1 = 3

Hacen falta, por tanto, **2 ecuaciones implícitas**. Tratemos de buscar <u>dos</u> relaciones entre las coordenadas x,y,z,t del vector genérico $(\alpha,2\alpha,3\alpha)$.

Estas dos relaciones son **z = 3x ; y = 2x.** Estas son las ecuaciones implícitas.

<u>2ª forma</u>. Obtenemos una base de S:

$(\alpha,2\alpha,3\alpha)=\alpha(1,2,3)$ luego (1,2,3) es una base. *(Por tanto dimS = 1).*

Ahora, un vector (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ pertenecerá a S si es combinación lineal de (1,2,3) por tanto si al añadirlo a él , el rango no aumenta y sigue siendo 1.

Debe ser $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{pmatrix}$**=1.** Escalonamos esta matriz para ver su rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-2x \\ 0 & z-3x \end{pmatrix}$$

La primera fila de la matriz es no nula, así que el rango será 1 cuando la tercera y cuarta filas sean nulas, es decir, cuando **$y - 2x = 0$; $z - 3x = 0$.** Estas son las ecuaciones implícitas buscadas. Notar que son las mismas que se obtuvieron en la 1ª forma.

4) Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(\alpha+2\beta, 2\alpha+4\beta, 3\alpha+6\beta)$ } de $\mathbb{R}^3$.

A pesar de las apariencias, pues hay dos parámetros, la dimensión de S no es dos. Ello se debe a que los parámetros no son libres. Se aprecia al hallar una base:

$(\alpha+2\beta, 2\alpha+4\beta, 3\alpha+6\beta) = \alpha(1,2,3) + \beta(2,4,6) \rightarrow$ Sistema generador (1,2,3) , (2,4,6)

Pero no son independientes, luego no son base. Hay que quitar el segundo vector, que es múltiplo del primero: La base es (1,2,3), por tanto se trata del mismo espacio del ***ejemplo 3).***

5) Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(6\alpha+2\beta, 0, 0, \alpha+4\beta, 0)$ } de $\mathbb{R}^5$.

Es inmediato por la 1ª forma:

nº ecuaciones	+	nº parámetros libres (es decir, dim S)	=	5 (en $\mathbb{R}^5$)
3	+	2	=	5

Hay que buscar tres relaciones entre las coordenadas x,y,z,t,s del vector genérico $(6\alpha+2\beta, 0, 0, \alpha+4\beta, 0)$.

Obviamente se tiene: **y=0 , z=0 , s=0.** Por tanto, estas son las ecuaciones implícitas.

(Nota: una forma paramétrica más sencilla de este subespacio es $(\lambda, 0, 0, \mu, 0)$).

COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE

Definición: Coordenadas.

En un espacio vectorial V, fijada una base $\{v_1,v_2,...v_n\}$, todo vector $u\in V$ puede ponerse de forma única como combinación lineal de dicha base:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... \alpha_n v_n$$

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ se llaman coordenadas del vector u en la base $\{v_1,v_2,...v_n\}$.

Ejemplos de coordenadas.

1. Coordenadas en distintas bases.

En $\mathbb{R}^2$ fijemos la base canónica, { (1,0), (0,1) }. Consideremos el vector **v**=(1,2). Para hallar sus coordenadas en esta base, ponemos u como combinación lineal de la misma:

(1,2)=**1**·(1,0) + **2**·(0,1)

Por tanto, (1,2) son las coordenadas de **v** en base canónica.

Cuando se utiliza la base canónica, obtenemos el sentido usual de “coordenadas”.

Pero cuando se utiliza otra base no es así.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ fijemos ahora la base **B** = { (2,3), (1,–1) } y consideremos el mismo vector **v**=(1,2). Hallemos sus coordenadas en la base **B**. Para poner **v** como combinación lineal de dicha base, planteamos el sistema

(1,2)= α(2,3)+β (1,–1) cuya solución es $\alpha=\frac{3}{5}$, $\beta=-\frac{1}{5}$. Así pues,

v = $\frac{3}{5}$ (2,3) – $\frac{1}{5}$ (1,–1)

Por tanto, $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$ son las coordenadas de **v** en base **B**.

<u>No debe confundirse el vector con sus coordenadas</u>; aquí el vector sigue siendo **v**=(1,2), y las coordenadas $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$ son un par de números que indican cómo expresar **v** en combinación lineal de la base B.

2. Si u es el vector que tiene como coordenadas (5, –6) en la base (1,2) (3,4), ¿cuál es el vector u?

Según la definición de coordenadas,

u = 5 (1,2) + (–6) (3,4) = (–13, –14).

3. El vector cero tiene coordenadas (0, . . . ,0) en cualquier base.

4. <u>Coordenadas en un subespacio</u>.

En $\mathbb{R}^3$, sea el subespacio S generado por los vectores (1,1,0) y (0,0,1). (Se trata del plano **x=y** en $\mathbb{R}^3$). Los dos vectores son independientes, por tanto forman base de S.

Consideremos el vector **v** = (2,2,3) perteneciente a S. Hallemos las coordenadas de este vector respecto a la base (1,1,0), (0,0,1) de S. Para ello expresamos **v** como combinación lineal de dicha base:

(2,2,3)= **2**·(1,1,0) + **3**·(0,0,1)

Así pues, las coordenadas de **v** en esta base de S son (2,3).

No debe sorprendernos que **v** tenga sólo 2 coordenadas. El vector **v** ciertamente tendría 3 coordenadas como elemento de $\mathbb{R}^3$, pero tiene 2 coordenadas <u>como elemento del plano S,</u> que es un subespacio de dimensión 2.

Definición: Matriz del cambio de base.

En un espacio vectorial V, dadas dos bases B y B' , se llama matriz de cambio de base (o de cambio de coordenadas) de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

Su utilidad es la siguiente: Conocidas las coordenadas de un vector en base B, nos permitirá hallar las coordenadas de dicho vector en base B'.

En efecto, sean ($a_1, a_2, \ldots a_n$) las coordenadas de un vector en base B, y sea P la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces:

$$P\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

obteniéndose así ($b_1, b_2, \ldots b_n$) las coordenadas del vector en base B'.

Ejemplo.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ las dos bases siguientes:

la base del ejemplo (1) anterior, B ={ (2,3), (1, –1) }

la base canónica B' ={ (1,0), (0,1) }

- Vamos a construir la matriz de cambio de base de B a B'.

Para ello debemos expresar los vectores de la base B en función de la base canónica B'.

(2,3) = **2**·(1,0) + **3**·(0,1) → coordenadas (2,3)

(–1,1)= **1**·(1,0) –**1**·(0,1) → coordenadas (1, –1)

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B a B':

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Del mismo modo podemos construir la matriz de cambio de base de B' a B.

Para ello expresamos los vectores de la base canónica B' en función de la base B. Podemos hallarlo planteando dos sistemas de ecuaciones, de los cuales se obtendrá

(1,0) = $\frac{1}{5}$(2,3) + $\frac{3}{5}$(1,–1) → coordenadas ($\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$)

(0,1)= $\frac{1}{5}$(2,3) – $\frac{2}{5}$(1,–1) → coordenadas ($\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{5}$)

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B' a B.

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Vamos a aplicar estas matrices para hallar las coordenadas en base B del vector **v**=(1,2). Tenemos sus coordenadas en la base canónica B' que son (1,2). Utilizamos la matriz Q de cambio de base de B' a B:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Así hemos obtenido $\left(\frac{3}{5} \quad , \quad -\frac{1}{5}\right)$, las coordenadas de v en base B. Comprobar que son las mismas que se obtuvieron en el ejemplo (1) anterior.

Podemos volver a las coordenadas en base B' utilizando la matriz P de cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Propiedades de las matrices de cambio de base</u>.

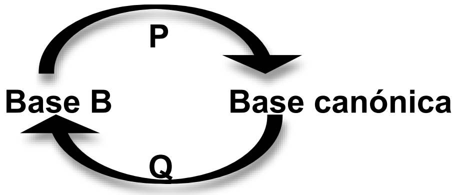
1. Toda matriz de cambio de base es cuadrada nxn, donde n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases.

2. Toda matriz de cambio de base es inversible (es decir, con determinante no nulo).

Además, la matriz de cambio de B a B' es inversa de la matriz de cambio de B' a B.

3. La matriz de cambio de una base B a la misma base B, es la matriz identidad.

- Comprobar en el ejemplo anterior que P y Q son inversas entre sí. Por tanto, después de hallar P, podríamos haber hallado Q como P^{-1}.
- También se observa en el ejemplo anterior que la matriz más fácil de obtener es la **P**, que pasa de una base B a la base canónica, pues basta escribir en las columnas la base B. La **Q** puede entonces obtenerse como la inversa de P.



P = base B en columnas; Q = P^{-1}

SUMA DIRECTA Y SUBESPACIOS SUPLEMENTARIOS

Dados dos subespacios S, T, consideramos el subespacio suma:

$S+T = \{ u+v : u \in S , v \in T\}$

Uniendo un sistema generador de S con uno de T se obtiene un sistema generador de S+T.

Sin embargo, no siempre es cierto que uniendo una base de S con una base de T se obtenga una base de S+T.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^3$, consideremos los subespacios

S = planoXY, una base es (1,0,0), (0,2,0).

T = planoXZ, una base es (3,0,0), (0,0,4).

S+T resulta ser el espacio total $\mathbb{R}^3$. En efecto, un sistema generador de S+T es la unión de ambos,

(1,0,0), (0,2,0), (3,0,0), (0,0,4)

que es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$. Pero no es una base, pues no es linealmente independiente.

(Ello ocurre porque $S \cap T$ no es cero)

Definición: Suma directa.

Se dice que la suma es directa, $S \oplus T$, si su intersección $S \cap T$ es solamente el vector cero.

Teorema.

Si la suma $S \oplus T$ es directa, al unir una base de S y una base de T se obtiene una base de $S \oplus T$.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^3$, consideremos los subespacios

S = planoXY, una base es (1,0,0), (0,2,0).

H = eje Z, una base es (0,0,5)

La suma es directa pues $S \cap H = \{0\}$. El subespacio suma $S \oplus H$ resulta ser el espacio total $\mathbb{R}^3$. Por el teorema anterior, uniendo las bases de S y de H se obtendrá una base del subespacio suma:

(1,0,0), (0,2,0), (0,0,5)

que efectivamente es base de $\mathbb{R}^3$.

Fórmulas de las dimensiones (Grassmann).

Del teorema anterior se deduce la siguiente fórmula: si la suma es directa,

$$\boxed{\dim (S \oplus T) = \dim (S) + \dim (T)}$$

Si la suma no es directa, hay que añadir un término más, teniéndose la fórmula

$$\boxed{\dim (S+T) + \dim (S \cap T) = \dim (S) + \dim (T)}$$

(la primera fórmula se puede obtener de la segunda, pues en el caso de suma directa, el término de la intersección vale cero).

Definición (subespacio suplementario):

Si dos subespacios S, T están en suma directa y además su suma es igual al espacio total, $S \oplus T = V$, se dice que S y T son suplementarios (o complementarios).

Todo subespacio tiene infinitos suplementarios, salvo el {0}, cuyo único suplementario es el total, y el total, cuyo único suplementario es el {0}.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^3$, el suplementario de un plano es cualquier recta que no esté contenida en el plano. Igualmente el suplementario de una recta es cualquier plano que no la contenga.

Cálculo de una base de un suplementario:

Dada una base de S, la prolongamos añadiendo vectores, independientes de los anteriores, hasta formar una base del espacio total. (Para ello podemos elegir cualesquiera vectores, por ejemplo elegirlos entre los de la base canónica).

Los vectores añadidos forman así una base de un suplementario de S.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^4$, sea S el subespacio cuya base es $v_1=(1,0,2,0)$, $v_2=(3,0,0,0)$. Vamos a hallar un suplementario de S. Para ello prolongamos la base dada añadiendo vectores que elegimos entre los de la base canónica. Han de ser independientes de los anteriores.

- No podemos añadir (1,0,0,0) porque no es independiente de los anteriores. (Es múltiplo de v_2).
- Podemos añadir $v_3 = (0,1,0,0)$ pues es independiente de v_1 , v_2 (La matriz formada por v_1, v_2, v_3 tiene rango 3).
- No podemos añadir $w = (0,0,1,0)$ pues no es independiente de los anteriores. (La matriz formada por v_1, v_2, v_3, w tiene rango 3; su determinante es cero).
- Podemos añadir $v_4 = (0,0,0,1)$ pues es independiente de v_1 , v_2 (La matriz formada por v_1, v_2, v_3, v_4 tiene rango 4; su determinante es no nulo).

– Ya hemos terminado, pues tenemos 4 vectores independientes y por tanto una base del total $\mathbb{R}^4$. Los dos vectores que hemos añadido, $v_3 = (0,1,0,0)$ y $v_4 = (0,0,0,1)$, forman una base de un suplementario de S.